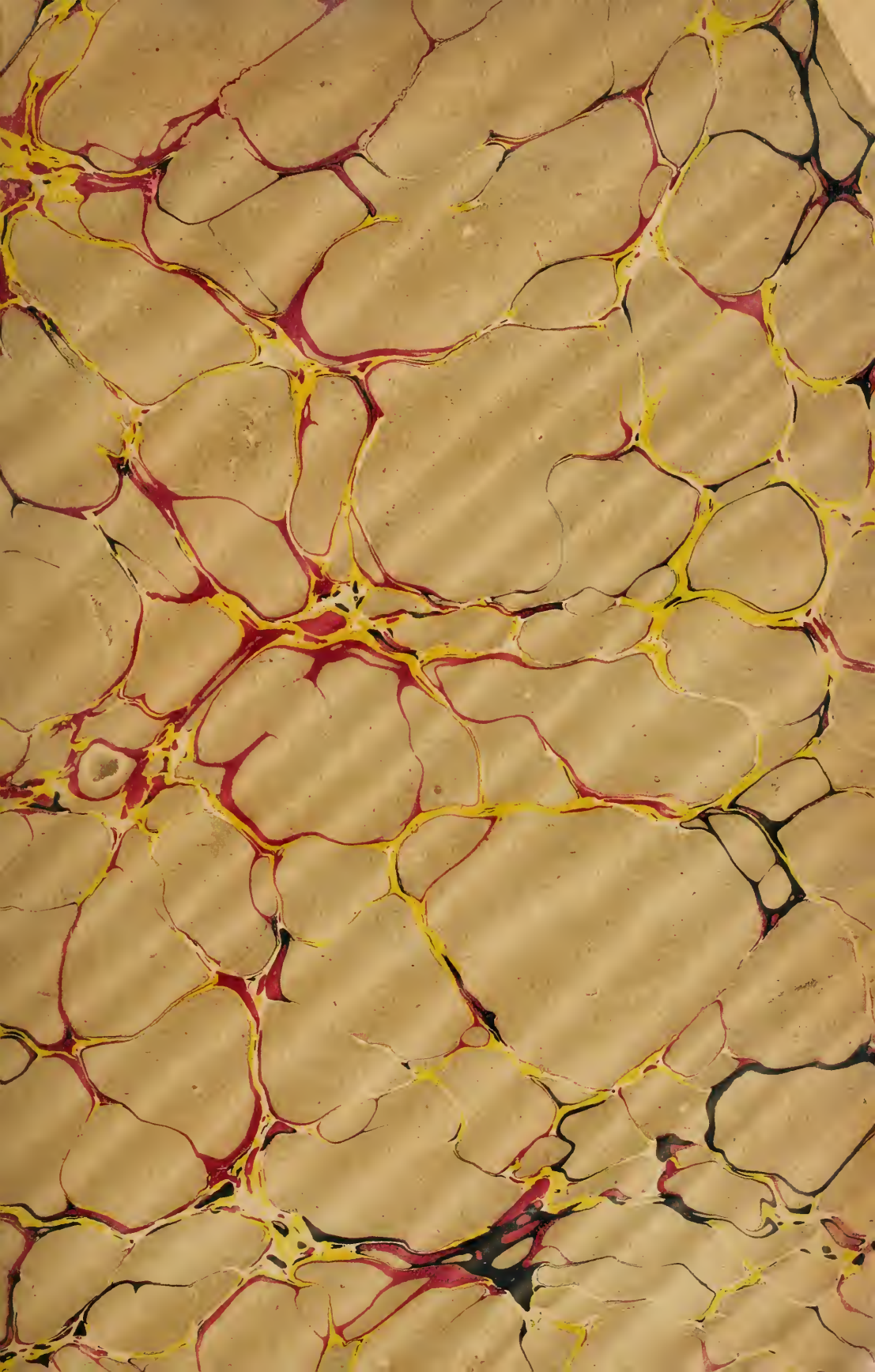
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00844544 7



Pisa, Tipografia Succ. Fratelli Nistri 1901

LUIGI BIANCHI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

SULLA

TEORIA DELLE FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

E

DELLE FUNZIONI ELLITTICHE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF TORONTO

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

1901

PARTE PRIMA

Teoria delle funzioni di variabile complessa

Capitolo I.

Funzioni di variabile complessa secondo Cauchy-Riemann. — Serie di potenze e loro proprietà. — Rappresentazioni conformi.

§. 1.

Piano complesso. — Sfera complessa.

La teoria delle funzioni di variabile complessa si può svolgere seguendo due metodi diversi, l'uno dovuto a Cauchy-Riemann, l'altro a Weierstrass.

Il primo metodo si fonda sulle proprietà degli integrali della così detta equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$

l'altro costruisce l'intera teoria in modo puramente aritmetico operando colle serie di potenze (serie di Taylor) come elementi. I due metodi si completano a vicenda e, per non rinunziare ai particolari vantaggi dell'uno e dell'altro, conviene ormai in questi studî svolgerli parallelamente. Questo ci proponiamo appunto di fare nella prima parte del presente corso, ove partiremo dalle definizioni di Cauchy-Riemann per arrivare all'importantissimo concetto di *funzione analitica* secondo Weierstrass e svilupparne le conseguenze.

Consideriamo una variabile complessa

$$z = x + i\,y$$

i cui valori distendiamo, secondo la consueta rappresentazione geometrica,

sul piano complesso di Gauss, sicchè ad ogni valore di z corrisponde un punto del piano complesso, *il suo indice,* cioè il punto che ha le coordinate Cartesiane ortogonali (x, y); e viceversa ad ogni punto del piano corrisponde un valore della variabile z. A causa di questa corrispondenza biunivoca fra il valore di z ed il punto rappresentativo, è lecito designare, come faremo, un punto qualsiasi del piano mediante il valore z_0 che vi ha la variabile z. E poichè riguardiamo il valore ∞ di z come un unico valore, così il piano complesso si riguarderà, in questi studî, come una superficie chiusa con un unico punto all'infinito. Questo modo di considerare i punti all'infinito del piano come raccolti in un unico punto, contrariamente alle ordinarie *convenzioni* della geometria projettiva ed analitica, non può produrre difficoltà, quando si pensi che qui il piano interviene soltanto come immagine geometrica della variabilità complessa e ci potremmo servire egualmente di qualunque altra superficie chiusa, ai punti della quale possano farsi corrispondere in modo biunivoco e continuo i valori della variabile complessa. Ed appunto spesse volte ci converrà adoperare in luogo del piano complesso la *sfera complessa,* riportando i punti del piano sulla sfera mediante la projezione stereografica polare. Per fissare completamente il modo di rappresentazione, prendiamo la sfera di raggio $=1$ col centro nell'origine O sicchè, indicando con ξ, η, ζ le coordinate correnti di punto, l'equazione della sfera sarà

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 ,$$

e dal punto $P \equiv (0, 0, 1)$ della sfera (polo) projettiamo ogni punto $M \equiv (x, y)$ del piano complesso (piano $\xi\eta$) in M' sulla sfera.

Per le coordinate ξ, η, ζ di questo punto M' troviamo subito

$$(1) \qquad \xi = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \quad , \quad \eta = \frac{2y}{x^2+y^2+1} \quad , \quad \zeta = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} ,$$

formole che, note le coordinate di un punto (x, y) del piano, fanno conoscere le coordinate ξ, η, ζ del punto corrispondente sulla sfera. Inversamente mediante le formole

$$(2) \qquad x = \frac{\xi}{1-\zeta} \quad , \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

determiniamo il punto del piano, che corrisponde ad un punto assegnato

sulla sfera. In ogni punto (ξ, η, ζ) della sfera abbiamo così per la variabile complessa z il valore

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}.$$

I punti all'infinito del piano vengono a raccogliersi sulla sfera nell'unico punto $(0, 0, 1)$ cioè nel polo, ove ha luogo il valore $z = \infty$ della variabile complessa.

Ricordiamo che la rappresentazione stereografica della sfera sul piano gode di due proprietà fondamentali, che si possono dimostrare elementarmente, od anche dedurre dalle formole (1), (2) di rappresentazione e cioè:

1.° la rappresentazione conserva gli angoli; vale a dire ogni angolo di una figura sferica è eguale a quello della figura piana corrispondente (rappresentazione conforme).

2.° ad ogni circolo (o retta) del piano corrisponde un circolo sulla sfera ed inversamente.

Diciamo ancora che in seguito per intorno di un punto z del piano complesso (o della sfera complessa) intenderemo un campo comunque piccolo, ma di ampiezza diversa da zero, che contenga nel *suo interno* il punto. Per intorno del punto $z = \infty$ del piano complesso s'intenderà quindi la parte del piano esterna ad un campo finito comunque grande, ciò che equivale appunto, per la sfera complessa, a considerare un intorno comunque piccolo del polo.

§. 2.

Funzioni di variabile complessa.

Consideriamo un campo C a due dimensioni del piano o della sfera complessa nel cui interno si muova l'indice della variabile complessa z. Sia

$$w = u + iv$$

una seconda variabile complessa *dipendente da* z in guisa che per ogni valore di z appartenente a C la w abbia un valore perfettamente determinato, cioè la parte reale u e il coefficiente v dell'immaginario in w siano nel campo C funzioni, nel senso ordinario, delle due variabili reali x, y.

Ove, seguendo i concetti generali di Dirichlet, considerassimo w come funzione della variabile complessa z, lo studio delle funzioni di variabile complessa non verrebbe a differire da quello delle ordinarie funzioni di due variabili reali. Ma nel concetto odierno di funzione di variabile complessa sono incluse alcune limitazioni, riguardanti la continuità e la esistenza della derivata, delle quali ora appunto andiamo a trattare.

In primo luogo supponiamo che la w, considerata come funzione delle due variabili reali x, y, sia continua *superficialmente* nel campo C, cioè che tali siano le due funzioni reali u, v nell'intorno di ogni punto di C. Si vedrà subito che la continuità di w in un punto z_0 del campo si può anche definire dicendo che, preso un numero ε positivo piccolo a piacere, deve esistere un intorno σ sufficientemente piccolo di z_0 [1] tale che per qualsiasi punto z appartenente a questo intorno si abbia

$$|w_z - w_{z_0}| < \varepsilon ,$$

ove con w_z indichiamo il valore di w in z e il simbolo $|w_z - w_{z_0}|$ significa, secondo Weierstrass, il modulo di $w_z - w_{z_0}$ [2].

In secondo luogo supponiamo che la w possegga derivate parziali prime

$$\frac{\partial w}{\partial x} , \quad \frac{\partial w}{\partial y}$$

pure *finite e continue* in C, onde segue che, se consideriamo una linea L qualunque [3] del piano complesso uscente da un suo punto $M \equiv z_0$ e, spostandoci lungo L da M_0 ad un punto vicino $M \equiv z_0 + \Delta z$, calcoliamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} ,$$

questo, al convergere di M verso M_0, convergerà verso un limite determinato e finito. E invero indicando con s l'arco della curva L, quando z

---

[1] S'intende che, se z_0 è interno al campo, l'intorno σ deve contenere z_0 nel suo interno, laddove se z_0 è sul contorno di C, l'intorno σ confinerà ad un tratto del contorno di C, che contenga nell'interno z_0.

[2] In generale essendo A una quantità complessa, col simbolo $|A|$ denotiamo, con Weierstrass, il modulo di A.

[3] Supponiamo che tale linea sia una curva ordinaria dotata di tangente, che varia con continuità al variare in modo continuo del punto di contatto.

si muove lungo L, potremo riguardare z e w con funzioni di s ed avremo

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim \frac{\left(\frac{\Delta w}{\Delta s}\right)}{\left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)},$$

e però

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds}}. \tag{3}$$

Questo limite, che dipende unicamente dalla direzione della tangente in M_0 alla curva, dicesi la derivata di w secondo quella direzione. In particolare le derivate di w prese nel senso dell'asse Ox e dell'asse Oy saranno

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{4}$$

Ora l'ulteriore limitazione che dobbiamo porre per arrivare al concetto di funzione di variabile complessa consiste in ciò che *la derivata di w sia indipendente dalla direzione secondo cui è calcolata.* In particolare le derivate (4) calcolate nel senso degli assi dovranno essere eguali, cioè dovrà essere soddisfatta la condizione:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{I}$$

Ma viceversa, se questa condizione è soddisfatta, la (3) può scriversi

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + i\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds}} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

e ci dimostra che la derivata sarà sempre la stessa in qualunque direzione si calcoli.

La condizione (I) si suole anche citare come condizione di *monogeneità* giacchè, supposte soddisfatte tutte le condizioni precedenti, Cauchy chiamava w funzione *monogena* di z. Oggidì, quando si parla di una *funzione w della variabile complessa z*, s'intende senz'altro che tutte le indicate condizioni, compresa la condizione (I) di monogeneità, debbono essere soddi-

sfatte o per tutti i punti del campo o almeno *generalmente,* cioè fatta eccezione da un numero finito di punti o di linee del campo, dove qualcuna delle precedenti condizioni od anche tutte potranno cessare di verificarsi. E così dunque porremo la seguente definizione fondamentale.

Diremo w funzione della variabile complessa z nel campo C *quando ad ogni valore di z in* C *corrisponde un valore determinato e* **generalmente** *finito per w; e w, considerata come funzione delle variabili reali x, y, sia continua e possegga derivate parziali del primo ordine* $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ *pure* **generalmente** *finite e continue e legate dalla relazione di monogeneità*

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Nelle presenti lezioni ci occuperemo principalmente del caso in cui per ogni punto z in C si abbia *un solo* valore di w. In tal caso se partendo da un punto qualunque M_0 in C descriviamo una curva chiusa qualunque σ tutta compresa entro C, incontreremo per w una catena continua di valori, che parte dal valore iniziale w_0 in M_0 e vi ritorna. Allora la funzione w di z si dice *monodroma* in C per significare appunto che descrivendo qualunque cammino chiuso in C si ristabilisce con continuità per la funzione il valore iniziale. Ma si possono egualmente considerare, e si considerano, funzioni di variabile complessa a più valori ed anche con numero infinito (discreto) di valori in ogni punto; soltanto quando si consideri un intorno sufficientemente piccolo di un punto *generico* di C deve essere possibile di scindere le diverse determinazioni di w in altrettante funzioni *monodrome* nell'intorno.

Quando nel campo completo C, partendo da un punto M_0, si descrive una curva chiusa scegliendo i valori di w colla legge di continuità, si ritornerà in M_0 o col valore w_0 scelto inizialmente o con uno degli altri valori che w ha in M_0. E se effettivamente per certi cammini chiusi si ritornerà con un valore di w diverso dall'iniziale, la w si dirà funzione *polidroma* nel campo. Più tardi, quando parleremo delle funzioni *analitiche*, ritorneremo sui concetti di *monodromia* e *polidromia* delle funzioni che verranno allora meglio precisati.

Se nella condizione (I) di monogeneità scindiamo la parte reale e l'immaginaria ponendo

$$w = u + i\,v,$$

vediamo che le funzioni reali u, v delle variabili reali x, y dovranno possedere derivate parziali prime, generalmente finite e continue nel campo, e legate dalle relazioni fondamentali

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \, . \end{cases}$$

In seguito dimostreremo che per una funzione di variabile complessa l'ipotesi (inclusa nella definizione) di una derivata prima generalmente finita, continua e indipendente dalla direzione, trae seco, come conseguenza, l'esistenza e la continuità di tutte le derivate degli ordini superiori. E così le due funzioni reali u, v possederanno pure le derivate parziali di tutti gli ordini, generalmente finite e continue. Ammettendo per un momento la cosa, in particolare per le derivate seconde, deduciamo subito dalle (II) le equazioni del 2.° ordine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \, . \end{cases}$$

Così adunque la parte reale u ed il coefficiente v dell'immaginario di una funzione w di variabile complessa sono soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \, .$$

Il primo membro di questa equazione si indica spesso brevemente col simbolo $\Delta^2\theta$ e l'equazione stessa con $\Delta^2\theta = 0$.

Viceversa ad ogni soluzione u di questa equazione ne corrisponde una coniugata v definita, a meno di una costante additiva, secondo le (II), dal suo differenziale totale

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x} \, dy - \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \, ;$$

e in $w = u + iv$ si ha così una funzione della variabile complessa z. Lo studio delle funzioni di variabile complessa può riguardarsi quindi anche, da un punto di vista del tutto reale, come lo studio delle coppie coniugate (u, v) di soluzioni dell'equazione di Laplace.

§. 3.

Serie di potenze. — Cerchio di convergenza.

Stabilito nel §. precedente il concetto di funzione di variabile complessa, andiamo subito a considerare nelle serie di potenze il più importante esempio di tali funzioni. Per serie di potenze di una variabile complessa z intendiamo una serie

$$(5) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \sum_0^\infty a_n z^n$$

che procede per le potenze ascendenti intere e positive di z. L'importanza delle serie di potenze nella nostra teoria è affatto fondamentale, poichè esse sono gli elementi coi quali può costruirsi ogni funzione di variabile complessa (Cauchy-Weierstrass).

Cominciamo dunque dal ricordare e precisare le proprietà riguardanti la convergenza delle serie di potenze. Innanzi tutto è chiaro che una serie (5) ha almeno un punto ove converge, il punto $z = 0$, ove si riduce al suo primo termine a_0; ma noi supponiamo che essa converga anche in qualche altro punto z_0 del piano. Allora dimostriamo il teorema fondamentale:

Se in un punto z_0 del piano complesso, diverso dall'origine O, *la serie di potenze* (5) *converge e descriviamo col centro in* O *un cerchio che lasci il punto z_0 all'esterno, per quanto prossimo alla periferia, in tutta l'area del cerchio e sul contorno la serie* (5) *converge assolutamente ed in egual grado.*

Il teorema sarà dimostrato se proviamo la convergenza in egnal grado della serie dei moduli

$$(\alpha) \qquad \sum_0^\infty |a_n| \, |z|^n ,$$

cioè se dimostriamo che, dato un numero ε piccolo a piacere, possiamo trovare un numero m tanto grande che il resto della serie

$$R_m = |a_m| \, |z|^m + |a_{m+1}| \, |z|^{m+1} + \ldots$$

per tutti i valori di z i cui indici cadono nella detta area circolare, sia $< \varepsilon$. Ora poichè la serie

$$\sum a_n z_0^n$$

converge per ipotesi, avremo certamente

$$\lim_{n=\infty} (a_n z_0^n) = 0 ,$$

quindi anche

$$\lim_{n=\infty} |a_n| \, |z_0|^n = 0 .$$

Possiamo dunque fissare una quantità positiva finita g, tale che per tutti i valori di n si abbia

$$|a_n| \, |z_0|^n < g . \tag{6}$$

Ora possiamo scrivere

$$R_m = |a_m| \, |z_0|^m . \zeta^m + |a_{m+1}| \, |z_0|^{m+1} \zeta^{m+1} + \ldots$$

avendo posto

$$\zeta = \frac{|z|}{|z_0|}$$

e però, a causa della diseguaglianza (6), abbiamo

$$R_m < g (\zeta^m + \zeta^{m+1} + \zeta^{m+2} + \ldots) . \tag{7}$$

Se indichiamo con r il raggio del nostro cerchio e poniamo

$$\frac{r}{|z_0|} = q$$

sarà evidentemente

$$\zeta \leq q < 1$$

e la (7) ci darà

$$R_m < g \frac{\zeta^m}{1 - \zeta}$$

e a più forte ragione

$$R_m < g \frac{q^m}{1 - q} .$$

Basta dunque prendere m tanto grande che si abbia

$$g \frac{q^m}{1 - q} \leq \varepsilon ,$$

ciò che è sempre possibile essendo $q < 1$, ed avremo che per tutti i punti dell'area circolare e della periferia risulterà, come si voleva:

$$R_m < \varepsilon .$$

Dal teorema dimostrato risulta come corollario che *se in punto* z_1 *la serie di potenze* (5) *diverge, a più forte ragione divergerà in qualsiasi punto distante dall'origine più di* z_1.

Dalle considerazioni precedenti facilmente deduciamo l'esistenza del così detto *cerchio di convergenza* delle serie di potenze. Per ciò distribuiamo tutti i circoli col centro in O (o i loro raggi) in due classi A) B); diremo un cerchio della prima classe A) se *in tutto l'interno* del cerchio la serie converge, della seconda classe B) quando *in tutto l'esterno* del cerchio la serie diverge. Ogni cerchio apparterrà necessariamente alla una o all'altra classe poichè se non è della classe A) ciò significa che in qualche punto interno al cerchio la serie diverge ed allora, pel corollario sopra notato, essa diverge a più forte ragione in tutto l'esterno del cerchio, il quale appartiene dunque a B). Similmente se un cerchio non è della classe B), esso appartiene necessariamente alla classe A).

Di più è chiaro che se un cerchio è della classe A), qualunque cerchio concentrico e più piccolo vi appartiene egualmente, e se un cerchio appartiene a B), lo stesso accade di qualunque cerchio concentrico più grande. In fine non vi può essere al massimo che *un solo* cerchio appartenente insieme alle due classi.

La ripartizione dei circoli di centro O nelle due classi A), B) soddisfa quindi alle condizioni fondamentali che ci assicurano dell'esistenza di un cerchio C limite delle due classi [1], dotato cioè della proprietà che ogni circolo col centro in O appartiene alla classe A) se è interno a C, alla classe B) se è esterno. Così adunque: *In ogni punto interno a* C *la serie di potenze converge, in ogni punto esterno la serie diverge.* Quanto a ciò che accade sui punti della periferia di C nulla si può dire *in generale*, potendosi avere in tali punti convergenza o divergenza secondo la natura particolare della serie.

Il cerchio C di cui abbiamo così dimostrato l'esistenza, e che può del resto estendersi talora a tutto il piano [2], dicesi il *cerchio di convergenza* della serie.

Dalle nostre considerazioni risulta altresì l'importante risultato:

In qualunque campo tutto interno al cerchio C *di convergenza la serie di potenze converge assolutamente ed in egual grado.*

---

[1] Vedi Dini. *Fondamenti ecc.*, §. 9, pag. 11.

[2] Ogni circolo appartiene allora alla classe A).

Per noti teoremi sulla convergenza in egual grado delle serie [1], si ha quindi anche:

La somma $w = \Sigma a_n z^n$ *della serie di potenze, in qualunque campo tutto interno al cerchio di convergenza, rappresenta una funzione finita e continua delle due variabili reali* x, y. Che la w sia una funzione della variabile complessa z risulterà poi dai §§. seguenti.

Notiamo in fine che il cerchio C di convergenza della serie di potenze $\Sigma a_n z^n$ è perfettamente caratterizzato dalle proprietà seguenti:

1.ª In ogni punto interno a C *la serie dei moduli* $\Sigma |a_n| \, |z|^n$ *della proposta è convergente; 2.ª in ogni punto esterno a* C *la medesima serie* $\Sigma |a_n| \, |z|^n$ *è divergente.*

§. 4.

Serie derivata.

Il termine generale $a_n z^n$ della serie di potenze è una funzione della variabile complessa z ed ha per derivata

$$n a_n z^{n-1} .$$

Consideriamo la serie delle derivate

$$\sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$$

e dimostriamo che questa serie di potenze ha il medesimo cerchio C di convergenza della serie primitiva. Per ciò basterà provare, secondo quanto abbiamo notato alla fine del §. precedente:

1.° che in qualunque punto interno a C la serie dei moduli:

$$\sum n \, |a_n| \, |z|^{n-1} \tag{8}$$

è convergente.

2.° che in qualunque punto esterno a C la serie (8) diverge.

Sia z_0 un punto interno a C sicchè, detto R il raggio di C, sarà

$$|z_0| < \mathrm{R} ;$$

dimostriamo la convergenza della serie dei moduli

$$\sum n \, |a_n| \, |z_0|^{n-1} .$$

---

[1] Dini. *Fondamenti,* pag. 109 (§. 97).

Prendiamo un punto z_1 interno a C, ma più prossimo alla periferia di z_0, sicchè

$$|z_1| > |z_0|$$

e scriviamo

$$\sum n\,|a_n|\,|z_0|^{n-1} = \sum n\,|a_n|\,|z_1|^{n-1}\left(\frac{|z_0|}{|z_1|}\right)^{n-1}.$$

Posto $q = \frac{|z_0|}{|z_1|}$, è $q < 1$, e i termini della serie

$$\sum n\,|a_n|\,|z_0|^{n-1} = \sum n\,|a_n|\,|z_1|^{n-1}\,.\,q^{n-1}$$

si deducono da quelli della serie convergente

$$\sum n q^{n-1} \text{ (1)}$$

moltiplicandoli per quantità positive

$$|a_n|\,|z_1|^{n-1},$$

che non solo si mantengono finite ma vanno indefinitamente decrescendo, a causa della convergenza in z_1 della serie primitiva. Dunque anche la serie $\Sigma\, n\,|a_n|\,|z_0|^{n-1}$ è convergente c. d. d.

Sia ora z_1 un punto esterno a C; dico che la serie $\Sigma\, n\,|a_n|\,|z_1|^{n-1}$ è divergente. E invero, se fosse convergente, tale sarebbe pure la serie

$$\sum n\,|a_n|\,|z_1|^n$$

e a più forte ragione l'altra

$$\sum |a_n|\,|z_1|^n,$$

ciò che è assurdo, essendo z_1 esterno al cerchio di convergenza della serie primitiva.

Dunque: *La serie derivata* $\Sigma\, n a_n z^{n-1}$ *ha lo stesso cerchio di convergenza della serie primitiva.* Ne segue che in qualunque campo tutto

---

(1) Che questa serie sia convergente risulta dall'applicare il primo criterio di convergenza delle serie a termini positivi. Qui abbiamo

$$u_n = n q^{n-1}\ ,\quad u_{n+1} = (n+1)\,q^n$$

indi

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{q} > 1\,.$$

interno al cerchio C la serie derivata converge in egual grado. In un tale campo è adunque legittima la derivazione per serie [1] e posto

$$w = \sum a_n z^n ,$$

la w ammetterà derivate parziali prime pure finite e continue, date dalle formole

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = \sum n a_n z^{n-1} \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = i \sum n a_n z^{n-1} , \end{cases}$$

onde sarà soddisfatta la condizione di monogeneità

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y} .$$

Abbiamo dunque il teorema:

Una serie di potenze $w = \Sigma a_n z^n$ rappresenta nell' interno del cerchio di convergenza una funzione finita, continua e monodroma della variabile complessa z.

È chiaro poi che una tale funzione possiede non solo la derivata prima, ma anche derivate di tutti gli ordini, rappresentate dalle serie delle corrispondenti derivate prime, seconde ecc., le quali tutte hanno il medesimo cerchio di convergenza della primitiva, e per ciò le successive derivate di w sono tutte funzioni finite, continue e monodrome della variabile complessa z entro il cerchio di convergenza.

§. 5.

Teorema di Cauchy-Hadamard.

Le considerazioni del §. 3 ci hanno dimostrata l'*esistenza* del cerchio di convergenza per una serie di potenze. Ora andiamo a stabilire un criterio, col quale si riesce a precisare il valore del raggio R del cerchio di convergenza. Questa proposizione, già contenuta nelle ricerche di Cauchy, fu ritrovata nuovamente ed in tempo recente da Hadamard e si cita comunemente come *teorema di Hadamard*. Colla sua dimostrazione

---

[1] Dini. *Fondamenti*, §. 105, pag. 115.

si viene nuovamente a provare l'esistenza ed a stabilire le proprietà del cerchio di convergenza.

Partiamo dall'ipotesi che la serie

$$\sum a_n z^n$$

converga in qualche punto z_0 fuori dell'origine; allora, perchè

$$\lim_{n=\infty} |a_n| \, |z_0|^n = 0 ,$$

potremo prendere m tanto grande che si abbia sempre

$$|a_n| \, |z_0|^n < 1 \quad \text{per } n \geq m ,$$

cioè

$$|a_n| < \frac{1}{|z_0|^n} \quad (n \geq m) .$$

Estraendo, nel senso aritmetico, la radice n^{ma} dai due membri avremo quindi

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{|z_0|} \quad (n \geq m) .$$

Ne risulta che per una serie di potenze, convergente in qualche punto fuori dell'origine $z = 0$, nella serie dei numeri positivi

$$(9) \qquad |a_1| \, , \; \sqrt{|a_2|} \, , \; \sqrt[3]{|a_3|} \, , \; \ldots \; \sqrt[n]{|a_n|} \, , \; \ldots$$

tutti i termini si debbono mantenere inferiori ad una quantità finita g. Ora ripartiamo i numeri positivi $< g$ in due classi A) B), ponendo nella prima classe A) ogni numero a tale che nella serie (9), *in là quanto si vuole*, vi siano sempre dei termini $> a$ e attribuendo un numero b alla seconda classe B) quando nella serie (9), *da un certo punto in poi*, tutti i termini sono $\leqq b$. Questa ripartizione dei numeri fra 0 e g in due classi soddisfa, come subito si vede, alle condizioni fondamentali già citate al §. 3 [1], che assicurano l'esistenza di un numero limite α che separa le due classi, tale cioè che qualunque numero $< \alpha$ appartiene alla classe A), qualunque numero $> \alpha$ appartiene a B). Ciò posto, il teorema di Cauchy-Hadamard consiste nella proposizione seguente: *Il*

---

[1] Dini. *Fondamenti*, pag. 19.

raggio R *del cerchio di convergenza è precisamente eguale all'inversa di questo numero* α:

$$R = \frac{1}{\alpha}.$$

E infatti sia dapprima

$$|z| < \frac{1}{\alpha}$$

e prendiamo ε positivo e così piccolo che sia

$$(\alpha+\varepsilon)\,|z| = q < 1.$$

Poichè il numero $\alpha+\varepsilon$ appartiene a B), da un certo valore di n in poi, è sempre

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \alpha+\varepsilon,$$

indi

$$\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z| \leqq q,$$

$$|a_n|\,|z|^n \leq q^n;$$

dunque la serie

$$\sum |a_n|\,|z|^n$$

ha, da un certo punto in poi, i suoi termini minori di quelli della progressione Σq^n, di ragione $q < 1$, ed è per ciò convergente.

Sia ora invece

$$|z| > \frac{1}{\alpha}$$

e poniamo

$$\varepsilon = \alpha - \frac{1}{|z|}.$$

Il numero

$$\alpha - \varepsilon = \frac{1}{|z|}$$

appartiene alla classe A), quindi vi sono sempre dei valori di n, tanto grandi quanto si vuole, e tali che

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|},$$

cioè

$$|a_n|\,|z|^n > 1,$$

onde deduciamo che la serie $\Sigma\,|a_n|\,|z|^n$ è in tal caso divergente.

Da questo teorema seguono diversi corollari notevoli. In primo luogo questo, che il raggio del cerchio di convergenza di una serie di potenze dipende unicamente dai moduli dei coefficienti, ciò che del resto segue anche subito dal fatto che la serie dei moduli è convergente nell'interno, divergente all'esterno del cerchio. In secondo luogo si vede che la serie sarà convergente in tutto il piano quando sia $\alpha = 0$, ossia quando

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 .$$

E infatti se $\alpha = 0$, un numero positivo ε comunque piccolo appartiene alla classe B) e perciò, da un certo valore di n in poi, si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \varepsilon .$$

Viceversa, se $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, sarà $\alpha = 0$; dunque: *La condizione necessaria e sufficiente perchè la serie di potenze* $\Sigma a_n z^n$ *sia convergente in tutto il piano è che si abbia:*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 .$$

§. 6.

Funzioni elementari e^z, sen z, cos z, log z, z^u

Esempî di serie convergenti in tutto il piano si hanno nelle serie:

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{\pi(n)} = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{\pi(2n+1)} = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} \cdots .$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{\pi(2n)} = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} \cdots ,$$

che per z reale, $z = x$, rappresentano rispettivamente le funzioni esponenziali e circolari: e^x, sen x, cos x. Ma anche per valori complessi di z le serie hanno un significato e rappresentano funzioni finite, continue

e monodrome della variabile complessa in tutto il piano, che si indicano ancora coi simboli

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\pi(n)},$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{\pi(2n+1)},$$

$$\cos z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{\pi(2n)},$$

e queste formole, per z qualunque, servono appunto di definizione alle funzioni stesse. In sostanza queste funzioni si riducono unicamente alla esponenziale, mediante le celebri formole d'Eulero:

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \\ e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z. \end{cases}$$

La proprietà fondamentale della funzione esponenziale è espressa dal teorema d'addizione

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

che si verifica facilmente eseguendo la moltiplicazione delle due serie. Ne segue che in $e^z = e^{x+iy}$ si può subito separare la parte reale ed immaginaria colla formola

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Di qui si trae che si ha $e^{z_1} = e^{z_2}$ allora soltanto quando la differenza $z_1 - z_2$ eguaglia un multiplo intero di $2\pi i$, ossia:

La funzione esponenziale e^z è una funzione semplicemente periodica col periodo fondamentale $2\pi i$.

Dalle formole d'Eulero segue poi che sen z, cos z *sono semplicemente periodiche col periodo fondamentale* 2π.

In fine notiamo che il teorema d'addizione della funzione esponenziale porta ad estendere i teoremi d'addizione delle funzioni circolari a valori complessi dell'argomento colle formole:

$$\operatorname{sen}(z_1+z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2.$$

Oltre le funzioni elementari precedenti, consideriamo anche le funzioni

$$\log z \quad , \quad z^a ,$$

con a costante complessa qualunque, le quali, benchè in certi campi non siano più monodrome, sono di natura così elementare che conviene osservarne subito le proprietà.

Per definire la funzione $\log z$ ricordiamo che (a causa delle citate formole d'Eulero) si può esprimere z per mezzo del suo modulo r e dell'argomento θ colla formola

$$z = r e^{i\theta} ;$$

ma ricordiamo altresì che, mentre il modulo $\sqrt{x^2+y^2}$ è perfettamente determinato, l'argomento $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ lo è soltanto a meno di multipli di 2π. Prendiamo allora come definizione di $\log z$ la formola:

$$\log z = \log r + i\theta .$$

Prescindendo da ciò che $\log z$ ha in ogni punto infiniti valori, differenti per multipli di $2\pi i$, vediamo che le parti reale ed immaginaria di $\log z$:

$$u = \frac{1}{2} \log (x^2+y^2) \ , \ v = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

soddisfano alle condizioni di monogeneità

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

Ora osserviamo che, se in un punto del piano scegliamo per l'argomento θ uno dei suoi valori, e facciamo descrivere a z, partendo dal punto, una linea qualunque continua, in ogni punto del cammino sarà fissato dalla legge di continuità il valore che dovremo prendere per θ e in particolare, se descriveremo una linea chiusa σ *che non giri attorno all'origine*, ritorneremo al punto di partenza col medesimo valore di θ. Se consideriamo adunque p. e. un circolo di raggio grande quanto si vuole, ma che non contenga nell'interno il punto $z=0$, basterà fissare il valore di $\log z$ in un punto del campo e la funzione $\log z$ sarà in quel campo circolare finita, continua e monodroma. Così potremo dire (§. 2) che in qualunque campo la funzione $\log z$ sarà funzione della

variabile complessa z e soltanto, se il campo sarà tale che si possano descrivervi curve chiuse avvolgenti l'origine, la funzione $\log z$ sarà polidroma (infinitiforme) ed avrà in ogni punto infiniti valori, differenti per multipli di $2\pi i$.

Descritte così le proprietà della funzione $\log z$, definiremo la potenza z^a di z, con a costante complessa qualunque, assumendo

$$z^a = e^{a \log z}.$$

Essa sarà anche una funzione della variabile complessa z e i suoi valori in un punto risulteranno da uno di essi, moltiplicando questo particolare valore per potenze di $e^{2\pi i a}$. Il numero di questi valori sarà finito solo quando a sia un numero reale frazionario; in tutti gli altri casi infinito. La polidromia di z^a, come quella di $\log z$, dipende dal poter girare intorno al punto (singolare) $z = 0$; ma le varie determinazioni di z^a costituiscono altrettante funzioni monodrome in ogni campo, ove tali giri attorno all'origine siano impossibili.

§. 7.

Esempî di serie di potenze considerate sulla periferia del cerchio di convergenza.

Vediamo ora in effettivi esempî come una serie di potenze possa offrire sulla periferia del cerchio di convergenza le circostanze più svariate. Per cominciare da un esempio semplicissimo, consideriamo la progressione geometrica

$$\sum_0^\infty z^n = \frac{1}{1-z},$$

che ha un cerchio di convergenza di raggio $= 1$.

Sulla circonferenza essa non converge in alcun punto; e invero per $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, si riduce a

$$\sum (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

e non converge perchè il modulo del termine generale, anzichè convergere a zero, è sempre $= 1$. Eguali circostanze offrirà la serie

$$\sum a_n z^n,$$

quando i moduli dei coefficienti a_n non tendono a zero e si abbia

$$\lim_{n=\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1 ;$$

il cerchio di convergenza della serie è di raggio $=1$ e la serie non converge in nessun punto della periferia.

Al contrario consideriamo una serie

$$\sum \alpha_n z^n ,$$

in cui i coefficienti α_n siano quantità reali, tutte positive decrescenti (da un certo punto in poi) e tali che

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0 \ , \ \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 1 .$$

Sulla circonferenza del cerchio di convergenza, di raggio $=1$, la serie convergerà dappertutto salvo eventualmente nel punto $z=1$, le condizioni imposte alle α non assicurando la convergenza della serie $\Sigma \alpha_n$. Proveremo la nostra osservazione dimostrando che le serie

$$\sum \alpha_n \cos n\theta \ , \ \sum \alpha_n \operatorname{sen} n\theta$$

convergono ogni qualvolta θ non è multiplo di 2π. Consideriamo p. e. la somma

$$S_n = \alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \cos 2\theta + \ldots + \alpha_n \cos n\theta$$

dei primi n termini della prima serie. Ne deduciamo

$$2\, S_n \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \alpha_1 \left(\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \right) + \alpha_2 \left(\operatorname{sen}\frac{5\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} \right) + \ldots$$
$$+ \alpha_n \left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\theta}{2} \right)$$

che possiamo scrivere

$$2\, S_n \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = -\alpha_1 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) + \operatorname{sen}\frac{5\theta}{2} (\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots$$
$$+ \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\theta}{2} (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\theta}{2} .$$

Poichè $\lim \alpha_n = 0$ e la serie

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \ldots,$$

che ha, almeno da un certo punto in poi, termini tutti positivi, è una serie convergente, convergerà pure verso un limite determinato e finito

$$2\, S_n \operatorname{sen} \frac{\theta}{2},$$

quindi anche S_n, essendo $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \neq 0$. Considerazioni analoghe valgono per la seconda serie $\Sigma \alpha_n \operatorname{sen} n\theta$.

Come esempio del caso ora considerato, adduciamo la serie logaritmica

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots,$$

che converge su tutta la periferia del cerchio di convergenza, salvo che in $z = 1$.

In fine, essendo m un numero intero qualunque > 1, consideriamo la serie

$$z + z^m + z^{m^2} + \ldots + z^{m^n} + \ldots,$$

che ha un cerchio di convergenza di raggio $= 1$. Se consideriamo un punto della periferia ove un termine z^{m^r} della serie sia eguale alla unità, anche tutti i termini seguenti saranno $= 1$ e la serie sarà ivi *divergente*. Questi punti della periferia corrispondono ad anomalie θ date da

$$\theta = \frac{2k\pi}{m^r} \quad (k, r \text{ interi qualunque}),$$

e formano sulla circonferenza un gruppo di punti dovunque condensato.

§. 8.

Rappresentazioni conformi.

Della teoria delle funzioni di variabile complessa si può dare una interpretazione geometrica *reale* che importa conoscere.

Supponiamo che sia w funzione della variabile complessa z in un certo campo C. Scindendo w nella sua parte reale ed immaginaria

$$w = u + iv,$$

distendiamo i valori di w in un altro piano complesso π', ove gli assi delle quantità reali ed immaginarie si diranno gli assi $O'u$, $O'v$. Ad ogni punto z di C corrisponderà un punto w di π' e mentre z percorre tutta l'area C, w percorrerà nel suo piano un campo C' a due dimensioni [1], che sarà finito se w è dovunque finita. Si avrà così una *rappresentazione* dell'area piana C sull'area piana C', tale che ad ogni punto di C corrisponderà un solo punto di C' e ad ogni punto di C' uno o più punti di C, con legge di continuità. Se z descrive in C una curva ordinaria γ, w descriverà in C' una curva corrispondente γ' e in generale ogni figura in C avrà in C' la sua figura (immagine) corrispondente. Ora la proprietà essenziale di una siffatta rappresentazione è data dal teorema: *Ogni angolo di una figura nel piano z eguaglia l'angolo corrispondente della figura immagine nel piano w (salvo in punti eccezionali)* [2]. Una rappresentazione che goda della proprietà di conservare gli angoli dicesi *conforme*, talchè ogni funzione di variabile complessa dà luogo ad una rappresentazione conforme. E noi dimostreremo ora, insieme al teorema enunciato, anche il suo inverso, che cioè ogni rappresentazione conforme di un'area piana sopra un'altra area piana si ottiene in siffatta guisa e preciseremo inoltre se vi ha conservazione *diretta o inversa* degli angoli.

Consideriamo dunque due piani π, π' sui quali scegliamo due rispettivi sistemi di assi cartesiani ortogonali Ox, Oy; $O'x'$, $O'y'$ e fissando le

---

[1] Che il campo C' descritto dal punto (u, v) sia realmente a due dimensioni risulta subito dalla teoria delle funzioni implicite di variabili reali, ove si osservi che il determinante funzionale:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

è generalmente diverso da zero. Esso si annulla invero solo nei punti ove è nulla la derivata $w'(z)$.

[2] I punti eccezionali sono, come si vedrà, quelli ove la derivata $\frac{dw}{dz}$ è zero o infinita.

pagine positive dei due piani, supponiamo le coppie di assi *egualmente orientate* [1]. Consideriamo poi una rappresentazione del piano π sul piano π', analiticamente espressa dalle formole

$$x' = x'(x, y) \quad , \quad y' = y'(x, y) \ ,$$

le funzioni $x'(x, y)$, $y'(x, y)$ di x, y essendo supposte entro un certo campo C ad un sol valore, finite e continue insieme alle derivate parziali prime. Se consideriamo un punto $P \equiv (x, y)$ ed una curva γ uscente da esso, indicando con θ l'angolo di cui deve rotare nel verso positivo (da destra verso sinistra) la direzione positiva dell'asse delle x per assumere la direzione della tangente a γ in P, avremo

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{dy}{dx} \ ,$$

i differenziali essendo presi lungo la curva [2].

Al punto $P \equiv (x, y)$ corrisponderà in π' il punto $P' \equiv (x', y')$ e alla curva γ una curva γ', uscente da P' con una direzione corrispondente alla formola

$$\operatorname{tang} \theta' = \frac{dy'}{dx'} = \frac{\dfrac{\partial y'}{\partial x} dx + \dfrac{\partial y'}{\partial y} dy}{\dfrac{\partial x'}{\partial x} dx + \dfrac{\partial x'}{\partial y} dy} \ .$$

Ne risulta la formola

$$\operatorname{tang} \theta' = \frac{\dfrac{\partial y'}{\partial x} + \dfrac{\partial y'}{\partial y} \operatorname{tang} \theta}{\dfrac{\partial x'}{\partial x} + \dfrac{\partial x'}{\partial y} \operatorname{tang} \theta} \ , \tag{10}$$

la quale mostra come ad ogni direzione uscente da P ne corrisponde, biunivocamente, una uscente da P' ed anzi i due fasci di direzioni corrispondenti sono sempre fra loro projettivi, qualunque sia la corrispondenza fra i due piani.

---

[1] Fissiamo p. e. che per un osservatore collocato sulla pagina positiva e che guardi verso la direzione positiva Ox ($O'x'$) la direzione positiva Oy ($O'y'$) giaccia alla sinistra.

[2] Quale delle due direzioni della tangente si assuma come positiva è evidentemente indifferente per la formola del testo.

Ma supponiamo ora che la rappresentazione sia conforme, cioè gli angoli siano conservati e distinguiamo due casi, secondo che anche il senso degli angoli viene conservato, ovvero invertito. Nel primo caso, se facciamo ruotare la direzione uscente da P in un certo senso, p. e. nel senso positivo, di altrettanto dovrà ruotare e nel medesimo verso la direzione corrispondente per P′, cioè la differenza $\theta' - \theta$ dovrà rimanere costante al variare di θ. Nel secondo caso invece rimarrà costante la somma $\theta' + \theta$. Avremo quindi

$$\theta' = \pm \theta + \alpha ,$$

il doppio segno corrispondendo ai due casi ed α essendo costante al variare di θ ma, in generale, funzione di x, y.

Ponendo

$$\operatorname{tg} \alpha = m ,$$

ne deduciamo

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{m \pm \operatorname{tg} \theta}{1 \mp m \operatorname{tg} \theta}$$

e, paragonando colla (10), ne deduciamo

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial x} = \pm \dfrac{\partial y'}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial x'}{\partial y} = \mp \dfrac{\partial y'}{\partial x} . \end{cases}$$

Viceversa, se le condizioni (11) sono soddisfatte, vediamo subito che sarà $\theta' - \theta$ o $\theta' + \theta$ costante e la rappresentazione sarà conforme diretta o conforme inversa. Nel primo caso le (11) mostrano che $x' + i y'$ deve essere funzione della variabile complessa $x + i y$, nel secondo invece della coniugata $x - i y$. Per altro qui è supposto implicitamente che non siano simultaneamente zero le derivate parziali di x', y', cioè che non sia nulla la derivata $\dfrac{dz'}{dz}$.

Dunque: *La più generale rappresentazione conforme diretta o inversa di un piano sopra un altro si ottiene ponendo la variabile complessa dell'un piano eguale ad una funzione della variabile complessa dell'altro, o della coniugata. Punti eccezionali della rappresentazione sono quelli, ove la derivata è nulla (o infinita).*

Spesso si dice di una rappresentazione conforme che essa conserva la similitudine delle parti infinitesime, ciò che è una conseguenza geometrica della conservazione degli angoli. Analiticamente constatiamo il fatto osservando che se ds è l'elemento d'arco di una curva γ, ds' quello corrispondente della curva γ', abbiamo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 ,$$

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\, dx + \frac{\partial x'}{\partial y}\, dy\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\, dx + \frac{\partial y'}{\partial y}\, dy\right)^2 ,$$

indi per le (11)

$$ds'^2 = \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2\right] . \, ds^2 .$$

Se valgono nelle (11) i segni superiori, abbiamo dunque

$$\frac{ds'}{ds} = \left|\frac{dz'}{dz}\right| .$$

Ciò dimostra che tutti gli elementi lineari spiccati da un punto P subiscono nella rappresentazione il medesimo allungamento, la cui grandezza è misurata dal modulo della derivata.

§. 9.

Esempî diversi.

a) Consideriamo la rappresentazione conforme stabilita fra i due piani complessi π, π', assumendo

$$z' = z^n ,$$

ove n è un numero intero positivo. Qui abbiamo $\frac{dz'}{dz} = nz^{n-1}$ e per ciò la rappresentazione riuscirà conforme in tutti i punti, salvo che in $z = 0$. E se introduciamo coordinate polari ponendo

$$z = \rho\, e^{i\theta} \quad , \quad z' = \rho'\, e^{i\theta'} ,$$

avremo le formole di rappresentazione

$$\rho' = \rho^n \quad , \quad \theta' = n\theta .$$

Queste dimostrano che nell'intorno dell'origine $z=0$ gli angoli non sono conservati nella rappresentazione, ma invece n-uplicati. Così p. e. se consideriamo nel piano z il settore OAB del circolo di raggio $=1$ racchiuso dalle rette $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{n}$, la figura immagine in z' sarà un semicerchio pure di raggio $=1$, ai due raggi estremi OA, OB corrispondendo i raggi per diritto O'A', O'B'.

b) Se prendiamo

$$z'=\frac{z-i}{z+i},$$

vediamo che per z reale il modulo di z' è $=1$ e, percorrendo z tutto l'asse reale da $-\infty$ a $+\infty$, z' percorre la circonferenza

$$x'^2+y'^2=1$$

in verso positivo cominciando da $z'=1$ e ritornandovi. Ai punti del semipiano positivo z (del semipiano in cui $y>0$), corrispondono biunivocamente i punti interni al detto cerchio. La formola precedente fornisce quindi la rappresentazione conforme del semipiano sul cerchio. Non vi ha alcun punto eccezionale perchè l'unico punto $z=-i$, ove diventano infinite z' e $\frac{dz'}{dz}$, non appartiene al semipiano positivo.

c) Consideriamo la funzione

$$z'=z^2-1=(z-1)(z+1).$$

Poichè i moduli di $z-1$, $z+1$ sono rispettivamente le distanze di z dai punti $+1, -1$, alla circonferenza di centro $z'=0$ e di raggio $=1$ corrisponderà una lemniscata di Bernoulli coi fuochi in $z=1$, $z=-1$ e più in generale ad ogni circonferenza concentrica in z' corrisponderà in z una *cassinoide* coi fuochi nei detti punti. L'interno della foglia a destra della lemniscata verrà rappresentato nell'interno del detto cerchio, al fuoco della lemniscata corrispondendo il centro del cerchio e la rappresentazione sarà dappertutto biunivoca e conforme tranne al nodo $z=0$ della lemniscata ove $\frac{dz'}{dz}=0$ [1]. Notiamo che alle circonferenze di centro O' corrispondendendo cassinoidi confocali, alle rette uscenti da O' corrisponderanno

---

[1] Ivi in effetto l'angolo piatto alla circonferenza viene trasformato in un angolo metà.

curve che taglieranno ad angolo retto tutte le cassinoidi. Scrivendo che lungo queste curve l'argomento di z' è costante, troviamo subito che esse hanno per equazione

$$x^2 - y^2 - 1 - 2kxy = 0 \quad (k \text{ parametro}) ;$$

esse sono dunque iperbole equilatere col centro in $z = 0$ e passanti pei due punti fissi $x = +1$, $x = -1$ sull'asse delle x [1].

d) Prendiamo la funzione

$$z' = \cos z ,$$

cioè

$$x' + i y' = \cos(x + i y) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y ,$$

da cui

$$x' = \cos x \cosh y \quad , \quad y' = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y ,$$

e però

$$\begin{cases} \dfrac{x'^2}{\cosh^2 y} + \dfrac{y'^2}{\operatorname{senh}^2 y} = 1 \\[2ex] \dfrac{x'^2}{\cos^2 x} - \dfrac{y'^2}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 . \end{cases}$$

Vediamo quindi che alle rette $y =$ costante corrispondono le ellissi coi fuochi in $x' = \pm 1$ $y' = 0$ e alle rette $x =$ costante le iperbole confocali. Segue di qui che ellissi ed iperbole confocali formano un doppio sistema ortogonale (isotermo).

e) Consideriamo ancora il seguente esempio di Schwarz. La funzione

$$z' = \operatorname{tang}^2 \left(\frac{\pi}{4} \sqrt{z} \right)$$

fornisce la rappresentazione conforme della parte del piano z, interna alla parabola col fuoco in $z = 0$ e col vertice in $z = 1$, sul cerchio del piano z' col centro nell'origine e di raggio unitario.

---

[1] Evidentemente si può anche dire che si ha un fascio di coniche i cui punti base, oltre i due ora detti, sono i punti immaginarii

$$x = 0 \qquad y = \pm i .$$

E invero l'equazione polare della detta parabola è

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}},$$

talchè, quando z percorre la sua periferia, si ha $\sqrt{z} = 1 + i \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$ e però

$$z' = \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} + i\,\frac{\pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}\right) = \left\{\frac{1 + i \operatorname{tangh}\left(\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right)}{1 - i \operatorname{tangh}\left(\frac{\pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}\right)}\right\}^2,$$

quindi $|z'| = 1$. Ai punti interni alla parabola corrispondono i punti interni al circolo (biunivocamente); al fuoco della parabola corrisponde il centro del circolo. Similmente si vedrà che la parte esterna alla detta parabola è rappresentata sul circolo stesso dalla formola

$$z' = \frac{2}{\sqrt{z}} - 1,$$

dove è da notarsi che, il punto $z = 0$ essendo esterno all'area ora considerata, la funzione del secondo membro è, nell'area, monodroma.

f) In fine, per addurre un semplicissimo esempio di rappresentazione conforme inversa, assumiamo

$$z' = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{x - i\,y},$$

onde

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Queste sono le formole d'*inversione per raggi vettori reciproci* rispetto al cerchio

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Capitolo II. [1]

Sostituzioni lineari. — Gruppi discontinui di sostituzioni lineari e loro rappresentazione geometrica.

§. 10.

Sostituzioni lineari come rappresentanti affinità circolari.

Consideriamo la rappresentazione biunivoca conforme che si stabilisce fra due piani, ponendo la variabile complessa z' dell'un piano eguale ad una funzione lineare della variabile complessa z dell'altro:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti complesse qualunque, tali soltanto che il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ non si annulli, condizione necessaria perchè il secondo membro della (1) dipenda effettivamente da z.

Moltiplicando simultaneamente i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ per un fattore k, ciò che non altera la *sostituzione lineare* (1), potremo dare al determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$, o modulo della sostituzione, il valore che più ci piace e noi fisseremo di assumere

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{2}$$

e chiameremo *unimodulari* le sostituzioni (1), per le quali questa condizione è verificata. I coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ di una data sostituzione unimodulare saranno così perfettamente fissati, a meno di un cangiamento simultaneo di segno.

La rappresentazione conforme fra i due piani z, z' stabilita dalla (1) gode della seguente importante proprietà: *Essa trasforma i circoli (o rette) del piano z in circoli (o rette) del piano z'.* Come trasformazione biunivoca dei due piani essa coincide con quella speciale corrispondenza quadratica che da Möbius prende il nome di *affinità circolare* (diretta).

Per dimostrare l'enunciata proprietà osserviamo che, indicando con U_0, come faremo costantemente in seguito, la quantità coniugata di una

---

[1] Il presente capitolo viene qui inserito in vista delle applicazioni che delle teorie in esso esposte dovremo fare nella seconda parte del corso, e della importanza fondamentale delle teorie stesse nel campo più vasto delle funzioni automorfe.

quantità complessa qualsiasi U, l'equazione di ogni circolo (o retta) del piano si potrà scrivere

$$A z z_0 + B z + B_0 z_0 + C = 0 ,$$

ove i coefficienti A, C sono reali e B, B_0 sono complessi coniugati. È chiaro che per $A = 0$ avremo una retta, per $A \neq 0$ un circolo ed il circolo sarà reale se

$$B B_0 - A C > 0 ,$$

immaginario se

$$B B_0 - A C < 0 ,$$

mentre si ridurrà alla coppia di rette cicliche uscenti dal centro quando sia

$$B B_0 - A C = 0 .$$

Ora, poichè z si esprime linearmente per z' colla sostituzione (inversa)

$$z = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha} ,$$

basterà evidentemente al nostro oggetto dimostrare che, quando z' descrive un circolo (o retta), anche z descrive un circolo (o retta).

Ad un circolo del piano z' di equazione

$$A z' z'_0 + B z' + B_0 z'_0 + C = 0$$

corrisponderà nel piano z la linea di equazione:

$$A (\alpha z + \beta) (\alpha_0 z_0 + \beta_0) + B (\alpha z + \beta) (\gamma_0 z_0 + \delta_0) + B_0 (\alpha_0 z_0 + \beta_0) (\gamma z + \delta) + \\ + C (\gamma z + \delta) (\gamma_0 z_0 + \delta_0) = 0 ,$$

che possiamo scrivere

$$A' z z_0 + B' z + B'_0 z_0 + C' = 0 , \tag{3}$$

dove si ponga

$$\begin{cases} A' = A \alpha \alpha_0 + B \alpha \gamma_0 + B_0 \alpha_0 \gamma + C \gamma \gamma_0 \\ B' = A \alpha \beta_0 + B \alpha \delta_0 + B_0 \beta_0 \gamma + C \gamma \delta_0 \\ B'_0 = A \alpha_0 \beta + B_0 \alpha_0 \delta + B \beta \gamma_0 + C \gamma_0 \delta \\ C' = A \beta \beta_0 + B \beta \delta_0 + B_0 \beta_0 \delta + C \delta \delta_0 . \end{cases}$$

Poichè con queste formole A', C' risultano reali e B', B'_0 complessi coniugati, ne segue appunto che la linea (3) è un circolo. Osserviamo

ancora che, essendo A', B', B'_0, C' composti linearmente ed omogeneamente con A, B, B_0, C: *ad ogni sistema lineare di circoli del piano z corrisponderà nel piano z' un sistema lineare di circoli di eguale dimensione, cioè ad un fascio un fascio, ad una rete una rete.*

Insieme alle rappresentazioni conformi *dirette* date dalla (1), ci occorrerà anche considerare quelle *inverse*, date dalla formola

$$(1^*) \qquad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}.$$

Anche in questa rappresentazione i circoli si trasformano in circoli e gli angoli si conservano; ma il senso degli angoli viene invertito. La corrispondenza fra i due piani è *un'affinità circolare inversa* di Möbius. Distingueremo le sostituzioni lineari corrispondenti (1), (1*), dicendo che le (1) sono di *prima specie*, le (1*) di *seconda specie*.

Notiamo che, con una conveniente sostituzione lineare di prima specie, si possono portare tre punti arbitrarii

$$z_1 \,,\; z_2 \,,\; z_3$$

del piano z rispettivamente in tre punti arbitrarii

$$z'_1 \,,\; z'_2 \,,\; z'_3$$

del piano z' e la corrispondente sostituzione è perfettamente determinata dalla formola:

$$\frac{z' - z'_1}{z' - z'_2} \cdot \frac{z'_3 - z'_2}{z'_3 - z'_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Ma se si vuole che un quarto punto z_4 venga trasportato in un quarto punto z'_4, sarà per ciò necessario e sufficiente che risultino eguali i due rapporti anarmonici

$$(z'_1\, z'_2\, z'_3\, z'_4) \;,\; (z_1\, z_2\, z_3\, z_4).$$

Di qui risulta: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè i quattro punti z_1, z_2, z_3, z_4 stiano sopra un circolo, è che il rapporto anarmonico $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$ sia reale.*

E infatti se z_1, z_2, z_3, z_4 sono sopra un circolo, potremo con una sostituzione lineare trasportarli in quattro punti z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 dell'asse reale sul piano z', onde

$$(z_1\, z_2\, z_3\, z_4) = (z'_1\, z'_2\, z'_3\, z'_4)$$

è reale. L'inversa risulta pure evidente.

§. 11.

Composizione delle sostituzioni.

Se eseguiamo successivamente due sostituzioni lineari di prima specie

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z'' = \frac{\alpha' z' + \beta'}{\gamma' z' + \delta'},$$

il risultato è una nuova sostituzione lineare:

$$z'' = \frac{(\alpha\alpha' + \gamma\beta') z + (\beta\alpha' + \delta\beta')}{(\alpha\gamma' + \gamma\delta') z + (\beta\gamma' + \delta\delta')}. \tag{4}$$

Spesso indicheremo la sostituzione lineare (1) scrivendo i coefficienti nel quadro

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix},$$

la denominazione data alle variabili essendo naturalmente indifferente. La sostituzione (4), che risulta dalle due successive

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix},$$

dicesi la sostituzione *composta* o il *prodotto* delle due, nell'ordine assegnato, e si scrive simbolicamente

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \gamma\beta', & \beta\alpha' + \delta\beta' \\ \alpha\gamma' + \gamma\delta', & \beta\gamma' + \delta\delta' \end{pmatrix}, \tag{5}$$

ponendo a sinistra la sostituzione eseguita prima [1]. La designazione dell'ordine è evidentemente necessaria perchè, invertendo l'ordine delle sostituzioni componenti, cambia (in generale) la sostituzione composta.

---

[1] Si osservi che la legge (5) di composizione di due sostituzioni è quella stessa della moltiplicazione dei determinanti $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$ e precisamente, nella notazione adottata, il 1.° e 2.° coefficiente della sostituzione composta si ottengono moltiplicando successivamente le due colonne di $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ per la prima linea di $\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$, ed il 3.° e 4.° moltiplicando le colonne della prima per la seconda linea della seconda.

Talora indicheremo anche, simbolicamente, una sostituzione lineare con una sola lettera e così, denotando con S_1, S_2 le due successive sostituzioni componenti, con S_3 la composta, scriveremo

$$S_1 S_2 = S_3 .$$

Definito il prodotto di due sostituzioni, riesce altresì definito il prodotto di tre o più sostituzioni

$$S_1 S_2 \ldots S_n ,$$

intendendo con ciò la sostituzione che nasce componendo prima S_1 con S_2, poi la sostituzione composta con S_3 e così via fino ad S_n [1]. È importante osservare che, mentre in un prodotto di sostituzioni non è lecito invertire l'ordine dei fattori, non vale cioè la legge *commutativa*, vale però la legge *associativa*. Per vederlo basta dimostrarlo pel caso elementare di tre fattori, cioè provare che si ha:

$$(S_1 S_2) S_3 = S_1 (S_2 S_3) ,$$

ciò che si può constatare direttamente colla formola (5) di composizione o dedurre anche *a priori* dal significato della composizione [2].

Se in un prodotto di n sostituzioni i singoli fattori sono tutti eguali fra loro e ad una medesima sostituzione S, il prodotto stesso si dice la potenza n^{ma} di S e si indica con S^n. A causa della legge associativa, vale evidentemente la formola

$$S^m . S^n = S^{m+n}, \tag{6}$$

essendo m, n numeri interi positivi.

Insieme ad una sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} \alpha , & \beta \\ \gamma , & \delta \end{pmatrix} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

---

[1] Dovremmo scrivere propriamente

$$\big(\ldots((S_1 S_2) . S_3) \ldots\big) S_n .$$

[2] La S_1 porti z in z', la S_2 z' in z'', la S_3 z'' in z'''. La sostituzione $S_1 S_2$ porta z in z'' e la $S_2 S_3$ porta z' in z''', quindi ambedue le sostituzioni $(S_1 S_2) S_3$, $S_1 (S_2 S_3)$ portano z in z''' e sono identiche.

si può considerare la sua inversa

$$\begin{pmatrix} \delta\,, & -\beta \\ -\gamma\,, & \alpha \end{pmatrix},$$

che composta con S produce la sostituzione identica $\begin{pmatrix} 1\,, & 0 \\ 0\,, & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta \\ \gamma\,, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\,, & -\beta \\ -\gamma\,, & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,, & 0 \\ 0\,, & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa sostituzione inversa si indica con

$$S^{-1},$$

sicchè, indicando col simbolo 1 la sostituzione identica, si ha $SS^{-1} = 1$; la sua introduzione ci permette di definire le potenze di S con esponente negativo, convenendo che sia

$$S^{-n} = (S^{-1})^n.$$

Dopo ciò si vedrà subito che la formola (6) vale per esponenti interi qualunque, positivi o negativi.

E perchè la medesima formola (6) valga senza eccezione, converremo di considerare anche la potenza S^0 di S con esponente zero, ponendo $S^0 = 1$.

Essendo S, T due qualunque sostituzioni, la sostituzione

$$S_1 = T^{-1}\,S\,T$$

dicesi la *trasformata della* S per mezzo della T e si ha inversamente

$$S = T\,S_1\,T^{-1} = (T^{-1})^{-1}\,S_1\,T^{-1},$$

talchè S è la trasformata della S_1 per mezzo della T^{-1}. Due tali sostituzioni S, S_1 si diranno *simili*. È importante osservare il teorema: *In due sostituzioni simili la somma $\alpha+\delta$ del 1.° e 4.° coefficiente è la stessa.* Il calcolo effettivo dimostra subito la proprietà enunciata, che potremo anche esprimere sotto altra forma dicendo: *La somma $j = \alpha+\delta$ non cangia trasformando comunque la sostituzione.* Per ciò diremo $j = \alpha+\delta$ l'*invariante* della sostituzione. Si osservi che l'invariante j di una sostituzione lineare è determinato soltanto a meno di un cambiamento di segno.

Può darsi che una sostituzione lineare S, ripetuta un numero sufficiente n di volte, riproduca l'identità, in simboli

$$S^n = 1\,;$$

allora la sostituzione si dice *periodica* ed il più piccolo esponente positivo n pel quale $S^n = 1$ dicesi il suo *periodo* [1].

Ma può anche accadere che nella serie indefinita (nei due sensi) delle potenze di S

$$S^{-3}, S^{-2}, S^{-1}, 1, S^1, S^2, S^3 \ldots$$

i termini non si riproducano mai e allora la sostituzione si dirà *aperiodica*. Due sostituzioni simili sono sempre insieme *aperiodiche* o *periodiche* ed, in quest'ultimo caso, hanno il medesimo periodo [2].

§. 12.

Classificazione delle sostituzioni di 1.ª specie.

Interpreteremo d'ora innanzi la variabile z e la sua trasformata lineare z' nel medesimo piano complesso. Per ogni sostituzione lineare (1) vi sono allora due punti, distinti o coincidenti, che rimangono fissi, quelli che corrispondono alle radici della equazione

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0. \tag{7}$$

Osserviamo che se la sostituzione S lascia fissi i punti A, B e la T trasporta A, B rispettivamente in A′, B′, la trasformata $T^{-1} S T$ avrà per punti fissi A′, B′.

Il discriminante della (7) essendo

$$(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = (\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) = (\alpha+\delta)^2 - 4,$$

i due punti fissi coincideranno quando

$$\alpha + \delta = \pm 2.$$

---

[1] Si vedrà subito che in tal caso, essendo α, β due numeri interi qualunque, sarà

$$S^\alpha = S^\beta,$$

quando e solo quando $\alpha \equiv \beta \pmod{n}$.

[2] Ciò risulta facilmente dall'osservare che

$$(T^{-1} S T)(T^{-1} U T) = T^{-1} (S U) T,$$

quindi

$$(T^{-1} S T)^n = T^{-1} S^n T.$$

In tal caso la sostituzione dicesi *parabolica*.

Ad ogni sostituzione parabolica possiamo sostituirne una simile che lasci fisso il punto $z = \infty$; questa avrà necessariamente la forma

$$z' = z + \beta \text{ [1]}$$

e rappresenterà nel piano complesso una traslazione. Una sostituzione parabolica è quindi necessariamente *aperiodica*.

Supponiamo ora che la sostituzione S lasci fissi due punti distinti. Potremo sostituirvi una trasformata che lasci fissi i due punti $z = 0$, $z = \infty$, che avrà quindi la forma:

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z \ , \ \alpha\delta = 1$$

e che scriveremo semplicemente

$$z' = kz \, .$$

Per l'invariante $j = \alpha + \delta$ avremo

$$j = \frac{k+1}{\sqrt{k}} \, .$$

Ora distinguiamo tre casi:

1.° k reale positivo; la sostituzione in tal caso si dice *iperbolica* e l'invariante j *è reale ed in valore assoluto* > 2.

2.° k immaginario di modulo $= 1$,

$$k = e^{i\varphi} \ , \ j = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \, .$$

La sostituzione si dice *ellittica* e l'invariante j è reale ed in valore assoluto < 2.

3.° k immaginario, ovvero reale e negativo.

Allora l'invariante j è immaginario e la sostituzione si dice *lossodromica*.

---

[1] Propriamente otteniamo dapprima

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\delta} \, ;$$

ma siccome $\alpha\delta = 1$ e inoltre (§. 11) $\alpha + \delta = \pm 2$, ne risulta $\alpha = \delta = \pm 1$.

Una sostituzione *normale* iperbolica

$$z' = kz \quad (k \text{ reale positivo})$$

è un'omotetia diretta del piano. Per essa tutte le rette uscenti dalla origine restano fisse.

Una sostituzione *normale* ellittica

$$z' = e^{i\varphi} z$$

è una rotazione del piano complesso attorno all'origine, d'ampiezza φ. Per essa rimangono fissi tutti i circoli col centro nell'origine [1].

In fine una sostituzione lossodromica è una combinazione di una ellittica e di una iperbolica coi medesimi punti fissi.

Riepilogando, abbiamo il risultato:

La specie di una sostituzione

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

dipende dall'invariante $j = \alpha + \delta$. *Se questo è reale, la sostituzione è ellittica, parabolica od iperbolica secondo che* $|j| \lesseqgtr 2$. *Quando l'invariante* j *è immaginario, la sostituzione è lossodromica.*

È chiaro che fra le sostituzioni lineari solo quelle ellittiche possono essere periodiche; ciò avviene quando l'ampiezza φ (che dipende unicamente dall'invariante j) è in rapporto commensurabile con 2π.

§. 13.

Sostituzioni di 2.ª specie. — Riflessioni.

Una sostituzione S di 2.ª specie

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

---

[1] In generale in una sostituzione iperbolica qualunque rimangono fissi tutti i circoli di un fascio con due punti base reali; in una ellittica quelli di un fascio coi punti base immaginarii.

dà luogo, ripetuta, alla sostituzione di 1.ª specie

$$(8) \qquad S^2 = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_0+\beta\gamma_0 \,, & \alpha\beta_0+\beta\delta_0 \\ \gamma\alpha_0+\delta\gamma_0 \,, & \gamma\beta_0+\delta\delta_0 \end{pmatrix},$$

che può anche ridursi all'identità. Consideriamo dapprima il caso generale, in cui S^2 non è l'identità. Poichè il suo invariante

$$j = \alpha\alpha_0 + \beta\gamma_0 + \beta_0\gamma + \delta\delta_0$$

è reale, essa non può essere lossodromica, ma è necessariamente ellittica, parabolica od iperbolica. Ricerchiamo quali punti fissi può avere la S. Essi debbono pure rimanere fissi per S^2 e saranno quindi al massimo due, quelli della S^2. D'altra parte se z_1, z_2 sono i due punti fissi di S^2, la S dovrà o lasciarli singolarmente invariati, o permutarli fra loro [1]. Dunque intanto, se la S^2 è parabolica, anche la S avrà un unico punto fisso. Nel caso ellittico od iperbolico, prendendo per punti fissi di S^2: $z = 0$, $z = \infty$, diamo ad S la forma

$$z' = kz_0 \,, \quad \text{o} \quad z' = \frac{k}{z_0} \,,$$

secondo che la nostra sostituzione lascia fissi singolarmente i due punti $0, \infty$, ovvero li scambia fra loro. La S^2 sarà rispettivamente nei due casi

$$z' = kk_0 z \,, \quad \text{o} \quad z' = \frac{k}{k_0} z \,,$$

quindi iperbolica nel primo, ellittica nel secondo caso. Dopo di ciò, possiamo classificare le sostituzioni S di 2.ª specie, *che non sono a periodo* 2, come paraboliche, iperboliche od ellittiche, secondo la specie di S^2. Le sostituzioni di 2.ª specie ellittiche non hanno alcun punto fisso, quelle paraboliche uno, le iperboliche due.

Veniamo ora al caso particolarmente interessante che la S sia a periodo 2. Osservando i coefficienti di S^2 nella (8), vediamo che, essendo $= 1$

---

[1] Invero se z_1 per S va in z'_1, ciò che indichiamo simbolicamente con

$$z'_1 = S(z_1) \,,$$

avremo

$$S^2(z'_1) = S^3(z_1) = S(S^2(z_1)) = S(z_1) = z'_1 \,,$$

cioè z'_1 sarà anche un punto fisso di S^2 e però coinciderà o con z_1 o con z_2.

il determinante della S^2, dovranno aver luogo o le formole

$$\begin{cases} \alpha\alpha_0 + \beta\gamma_0 = 1 \ , & \alpha\beta_0 + \beta\delta_0 = 0 \\ \gamma\alpha_0 + \delta\gamma_0 = 0 \ , & \gamma\beta_0 + \delta\delta_0 = 1 \ , \end{cases}$$

o le altre

$$\begin{cases} \alpha\alpha_0 + \beta\gamma_0 = -1 \ , & \alpha\beta_0 + \beta\delta_0 = 0 \\ \gamma\alpha_0 + \delta\gamma_0 = 0 \ , & \gamma\beta_0 + \delta\delta_0 = -1 \ . \end{cases}$$

Poichè $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, ciò equivale a dire che nel primo caso sarà

$$\alpha_0 = \delta \ , \quad \gamma_0 = -\gamma \ , \quad \beta_0 = -\beta \ , \quad \delta_0 = \alpha$$

e nel secondo

$$\alpha_0 = -\delta \ , \quad \gamma_0 = \gamma \ , \quad \beta_0 = \beta \ , \quad \delta_0 = -\alpha \ .$$

Ponendo in evidenza le parti reali ed immaginarie dei coefficienti, avremo quindi nel 1.° caso

$$(9) \qquad z' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\, z_0 + i\beta_1}{i\gamma_1 z_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2)} \ , \quad \text{con } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1\gamma_1 = 1 \ ,$$

indicando $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_1$ quantità reali, e nel 2.° caso

$$(9^*) \qquad z' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)\, z_0 + \beta_1}{\gamma_1 z_0 - (\alpha_1 - i\alpha_2)} \ , \quad \text{con } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1\gamma_1 = -1 \ .$$

Domandiamo ora se qualche punto del piano rimane fisso per la nostra sostituzione. Ponendo $z' = z$, vediamo che nel caso attuale restano fissi tutti i punti di un circolo, che ha rispettivamente per equazione

$$(10) \qquad \gamma_1 (x^2 + y^2) - 2\alpha_2 x + 2\alpha_1 y - \beta_1 = 0 \ , \quad \text{nel caso (9)}$$

e invece

$$(10^*) \qquad \gamma_1 (x^2 + y^2) - 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y - \beta_1 = 0 \ , \quad \text{nel caso (9*)}.$$

Il primo circolo è reale a causa di

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1\gamma_1 = 1 \ ,$$

e la sostituzione è un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto a questo cerchio; si dirà brevemente una *riflessione* su questo circolo. Nel secondo caso il circolo di riflessione (10*) è immaginario e la sostituzione

si dirà una *riflessione impropria*. È facile vedere che una riflessione impropria si può comporre con una riflessione propria ed una rotazione di π attorno al centro del circolo di riflessione [1].

§. 14.

Gruppi discontinui di sostituzioni lineari.

Le sostituzioni lineari sopra una variabile essendo operazioni suscettibili di composizione e valendo la legge associativa (§. 11), possiamo applicare ai sistemi di sostituzioni lineari i concetti generali della teoria dei gruppi di operazioni. Così diremo che: *un sistema di un numero finito od infinito di sostituzioni lineari forma un gruppo, quando componendo fra loro due qualunque sostituzioni, differenti od eguali, del sistema, la sostituzione composta appartiene pure al sistema.*

In particolare quindi un gruppo, insieme ad ogni sua sostituzione S, ne conterrà anche tutte le potenze con esponente intero e positivo. Se il gruppo è finito [2], vi figureranno altresì le potenze con esponente negativo e l'identità, ciò che, stando alla data definizione, non accadrà sempre necessariamente nel caso di un gruppo infinito. In questo caso però noi aggiungeremo esplicitamente la condizione che *il gruppo contenga insieme ad ogni sostituzione* S *anche la sua inversa* S^{-1} *e però tutte le potenze positive e negative di* S, *e l'identità.*

Una prima divisione dei gruppi di sostituzioni lineari in due classi si fa distinguendo i gruppi *continui* dai gruppi *discontinui*. Il gruppo dicesi continuo (gruppo di Lie) se nei coefficienti α, β, γ, δ entrano parametri suscettibili di prendere una serie *continua* di valori, discontinuo invece quando i coefficienti variano solo per valori discreti.

---

[1] Ad ogni riflessione si può sostituire una riflessione simile che scambi fra loro i punti $0, \infty$; questa ha allora la forma normale

$$z' = \frac{k}{z_0}$$

con k reale. Essa è propria od impropria, secondo che k è positivo o negativo. Ne risulta subito dimostrata l'asserzione del testo.

[2] Si sa che i gruppi finiti di sostituzioni lineari sopra una variabile sono tutti noti e si riducono a cinque tipi distinti, che portano il nome di gruppi dei poliedri regolari, della piramide e della doppia piramide regolare. (Cf. Klein, *Ikosaeder*).

Un'altra importante distinzione è da farsi nei gruppi discontinui, *in quanto consideriamo l'effetto delle loro operazioni sui punti del piano complesso.* Applicando ad un punto z_1 del piano le sostituzioni di un gruppo discontinuo G, si otterrà una serie infinita di punti, che diciamo *equivalenti* rispetto al gruppo. Ora si dirà che il gruppo G è *propriamente* discontinuo nell'intorno di un punto P del piano complesso, quando un intorno sufficientemente piccolo di P non contenga alcuna coppia di punti equivalenti rispetto a G; in caso contrario diremo che G è *impropriamente* discontinuo nell'intorno di P. Più brevemente diremo anche che nel primo caso G è propriamente discontinuo, nel secondo impropriamente discontinuo *nel punto* P. Si vede subito che se un gruppo è propriamente discontinuo in un punto P, esso è altresì propriamente discontinuo in tutti i punti di un intorno sufficientemente piccolo di P, onde segue che per un tale gruppo l'insieme dei punti, nell'intorno dei quali il gruppo opera in modo propriamente discontinuo, costituisce un campo a due dimensioni.

I gruppi che dovunque, nel piano complesso, sono impropriamente discontinui non hanno per lo scopo nostro (per la teoria delle funzioni) importanza alcuna. Ora vi è un caso in cui dalla natura stessa delle sostituzioni del gruppo si conclude immediatamente che il gruppo è dovunque impropriamente discontinuo; ciò accade quando nel gruppo si presentano *sostituzioni infinitesimali*, cioè sostituzioni vicine quanto si vuole alla identità. Precisiamo questo concetto dicendo: *Un gruppo* G *di sostituzioni lineari* $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ *contiene sostituzioni infinitesimali quando, preso un numero* ε *reale, positivo e piccolo a piacere, esistono sempre nel gruppo sostituzioni, diverse dall'identità, per le quali si ha*

$$|\beta| < \varepsilon \quad |\gamma| < \varepsilon \quad |\alpha - \delta| < \varepsilon \text{ (1)}.$$

Che il gruppo sia allora impropriamente discontinuo risulta dalle considerazioni seguenti. Suppongasi al contrario che si possa trovare ad esempio un'area circolare di raggio R, priva di coppie di punti equi-

---

(1) Se le sostituzioni si riducono unimodulari, si potrà anche dire che i moduli di

$$\beta, \gamma, \alpha \pm 1, \delta \pm 1$$

debbono essere inferiori ad ε.

valenti. Variando z comunque in quest'area, potremo sempre scegliere nel gruppo una tale sostituzione (non identica) $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$, per la quale si abbia

$$\left| \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - z \right| < \frac{R}{2}$$

e allora ogni punto che disti dal centro meno di $\frac{R}{2}$ e non coincida con uno dei due punti fissi di $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ avrà almeno un punto equivalente entro l'area circolare, contro l'ipotesi.

Così adunque: *Un gruppo discontinuo, contenente sostituzioni infinitesimali, è sempre impropriamente discontinuo in ogni regione del piano.*

Come primo esempio consideriamo una sostituzione ellittica *aperiodica*, che possiamo ridurre alla forma normale

$$z' = e^{i\varphi} z ,$$

dove φ sarà incommensurabile con π. Le potenze di S formano un gruppo con sostituzioni infinitesimali e per ciò dovunque impropriamente discontinuo. Ne deduciamo come corollario: *Ciascuna sostituzione ellittica di un gruppo propriamente discontinuo deve avere un periodo finito.*

La discontinuità propria di un gruppo è incompatibile, come si è visto, coll'esistenza di sostituzioni infinitesimali. Ma diciamo subito che sarebbe, in generale, erroneo il concludere dall'assenza di sostituzioni infinitesimali nel gruppo alla sua discontinuità propria; l'esempio che studieremo alla fine del presente capitolo lo dimostrerà chiaramente. Vi ha però un caso molto importante, nel quale tale conclusione è legittima, ed è quando le sostituzioni del gruppo sono tutte a coefficienti reali, o tali si possono ridurre con una conveniente trasformazione, quando cioè vi ha un circolo del piano complesso che da tutte le sostituzioni del gruppo è trasformato in sè medesimo (Hauptkreisgruppen). Sussiste infatti il teorema, dovuto a Poincarè [1], che noi qui ci limitiamo a citare:

Un gruppo di sostituzioni lineari a coefficienti reali, e privo di sostituzioni infinitesimali, è sempre impropriamente discontinuo nel piano complesso.

---

[1] *Acta Math.*, Bd. 3. — Vedi anche FRICKE. *Automorphe Functionen*, Bd. I, pag. 99.

§. 15.

Sottogruppi.

Prima di procedere allo studio di alcuni gruppi particolari, facciamo ancora qualche osservazione d'indole generale. I concetti e la terminologia dei gruppi finiti di operazioni si trasportano senz'altro nella teoria dei gruppi discontinui infiniti.

Un gruppo Γ di sostituzioni lineari si dirà un *sottogruppo* di un gruppo G, se tutte le sostituzioni di Γ appartengono a G. Si dirà poi che Γ è *invariante* in G quando qualunque sostituzione di Γ, trasformata con una sostituzione arbitraria di G, dà una sostituzione di Γ stesso, quando cioè Γ è permutabile con qualunque sostituzione di G.

Se G è un gruppo e Γ un suo sottogruppo, si potranno distribuire le sostituzioni di G rispetto a Γ in un quadro:

$$\begin{array}{llll} \gamma_1 , & \gamma_2 , & \gamma_3 & \cdots\cdots \\ g\gamma_1 , & g\gamma_2 , & g\gamma_3 & \cdots\cdots \\ g'\gamma_1 , & g'\gamma_2 , & g'\gamma_3 & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

che contiene una ed una sola volta tutte le sostituzioni di G, ponendo nella prima orizzontale tutte le sostituzioni (in numero infinito) di Γ, nella seconda quelle di Γ moltiplicate da una medesima parte (p. e. a sinistra) per una sostituzione g di G fuori di Γ, nella terza ancora le sostituzioni di Γ moltiplicate, sempre dalla medesima parte, per una sostituzione g' di G presa fuori delle due prime orizzontali e così proseguendo finchè esistano sempre nuove sostituzioni di G. Due casi potranno darsi: o il numero delle orizzontali è finito e questo numero prende allora il nome di *indice* del sottogruppo Γ in G; ovvero il numero delle orizzontali è infinito e in tal caso diciamo che Γ è sottogruppo d'indice infinito in G. Così p. e. se S è una sostituzione lineare aperiodica, nel gruppo (ciclico) G generato dalle potenze di S formano un sottogruppo Γ d'indice finito le potenze di S^p, essendo p un numero intero positivo; in tal caso, siccome l'esponente m di ogni potenza S^m di S si può porre sotto la forma

$$m = kp + r ,$$

dove r è uno dei numeri $0, 1, 2 \ldots p-1$ e k è un intero positivo o negativo, il quadro consterà di p orizzontali e l'indice di Γ in G sarà finito $=p$.

Fino ad ora abbiamo supposto di considerare gruppi contenenti soltanto sostituzioni di prima specie. Ma possiamo egualmente considerare gruppi G, contenenti sostituzioni di ambedue le specie. In tal caso si vede subito che: *le sostituzioni di prima specie di* G *costituiscono un sottogruppo* Γ *invariante in* G *e di indice finito* $=2$. Ciò risulta dall'osservare che, se g è una sostituzione fissa di seconda specie in G e g' un'altra tale sostituzione qualunque in G, la $g^{-1} g'$ è di prima specie ed è quindi una sostituzione γ di Γ, onde

$$g' = g\gamma,$$

ciò che dimostra essere $=2$ l'indice di Γ in G. Poichè inoltre, trasformando con una sostituzione di prima o seconda specie una di prima specie, la trasformata appartiene sempre alla prima specie, vediamo che Γ è invariante in G.

§. 16.

Gruppi ciclici e loro campo fondamentale.

Veniamo ora a studiare alcuni gruppi particolari di natura molto semplice, che ci daranno una facile illustrazione delle considerazioni generali esposte al §. 14 e ci serviranno inoltre a fissare l'importante nozione del *campo fondamentale* di un gruppo propriamente discontinuo.

Cominciamo dai gruppi *ciclici*, dai gruppi cioè che sono generati dalle potenze di un'unica sostituzione S. Siccome però escludiamo dalle nostre considerazioni i gruppi contenenti sostituzioni infinitesimali (poichè allora sappiamo già che il gruppo è dovunque impropriamente discontinuo), così supporremo che, se la sostituzione S è ellittica, essa abbia periodo finito.

Consideriamo allora i varii casi che possono presentarsi:

a) La sostituzione S è ellittica di periodo finito n; allora il gruppo generato dalle potenze di S è un gruppo finito e, riducendo S alla forma normale, potremo assumere per S l'espressione analitica

$$z' = \varepsilon z,$$

dove ε è una radice primitiva n^{ma} della unità. Sostituendo ad S una

sua potenza, potremo supporre

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

e la S rappresenterà nel piano complesso una rotazione d'amplitudine $\frac{2\pi}{n}$ attorno all'origine. Si consideri ora nel piano complesso il settore infinito limitato da due raggi che escono da O e formano fra loro l'angolo $\frac{2\pi}{n}$. Applicando a tutta l'area settoriale le sostituzioni del gruppo, veniamo evidentemente a dividere il piano in n tali settori congruenti, che ricoprono una ed una sola volta il piano complesso. Uno qualunque di questi settori gode della proprietà che un punto qualunque del piano è equivalente ad un punto dell'area settoriale, ed in generale ad uno solo. Soltanto quando questo punto cade sul contorno, esso ne ha un secondo equivalente sull'altro lato del contorno, ad eguale distanza dall'origine. Per queste proprietà si dice che il settore considerato è un *campo fondamentale* del gruppo, poichè in esso trovasi un punto, ed in generale uno solo, equivalente a qualsiasi punto del piano.

b) La S sia una sostituzione iperbolica, che potremo ridurre alla forma normale

$$z' = kz,$$

con k reale e positivo (§. 12). Essa ci darà nel piano complesso una omotetia col centro nell'origine, di costante k. Si tracci ora un circolo qualunque C di centro O e scelgasi p. e., per fissare le idee, il suo raggio $= 1$. I circoli trasformati di C per mezzo del gruppo delle potenze di S avranno tutti il centro in O ed i raggi

$$\ldots k^{-3}, k^{-2}, k^{-1}, 1, k, k^2, k^3 \ldots;$$

essi divideranno il piano in una serie di anelli circolari limitati da due cerchi consecutivi nella serie. Uno qualunque di questi anelli può assumersi come campo fondamentale del gruppo, poichè infatti un punto qualunque del piano può trasportarsi, applicandovi una conveniente potenza di S, in uno ed in sol punto dell'anello. Soltanto se questo punto cadrà sul contorno dell'anello, ne avremo un secondo equivalente sull'altro circolo del contorno.

c) La S sia lossodromica e, ridotta alla forma normale, abbia dunque la forma (§. 12)

$$z' = ke^{i\varphi}z.$$

Anche in questo caso potremo costruire una serie di anelli circolari come nel caso precedente ed in uno di essi avremo ancora un *campo fondamentale* del gruppo.

d) Supponiamo in fine che la S sia parabolica e riduciamola alla forma normale

$$z' = z + \beta.$$

Essa ci rappresenterà nel piano complesso una traslazione e se per due punti del piano, che nascono l'uno dall'altro per la traslazione, conduciamo due rette qualsiasi parallele fra loro, ma non nel senso della traslazione, limiteremo una striscia del piano, che sarà un campo fondamentale del nostro gruppo. Applicando infatti alla intera striscia la S e le sue potenze, otterremo una serie di striscie consecutive congruenti, che ricoprono una ed una sola volta il piano.

Colla dimostrazione dell'esistenza del campo fondamentale per ogni gruppo ciclico, privo di sostituzioni infinitesimali, è dimostrata in particolare la discontinuità propria di questi gruppi in tutto il piano. Per questi gruppi adunque, come pei gruppi a coefficienti reali secondo il teorema di Poincarè, la mancanza di sostituzioni infinitesimali è non solo necessaria ma anche sufficiente ad assicurare la discontinuità propria del gruppo. La stessa cosa vedremo accadere pei gruppi che andiamo ora a considerare.

§. 17.

Gruppi di sostituzioni paraboliche.

Ci proponiamo ora di studiare i gruppi che sono esclusivamente composti di sostituzioni paraboliche e fra questi di riconoscere quelli che sono privi di sostituzioni infinitesimali.

In primo luogo osserviamo che se un gruppo è composto di sole sostituzioni paraboliche, queste dovranno avere tutte il medesimo punto fisso. E infatti riduciamo una di queste, sia S, alla forma normale

$$\text{S)} \quad z' = z + \beta$$

e sia U un'altra sostituzione (unimodulare) del gruppo, coll'espressione analitica:

$$\text{U)} \quad z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1,$$

ove, essendo U parabolica, avremo

$$a + d = \pm 2 .$$

Indicando con n un intero qualunque, avremo nel gruppo anche la sostituzione US^n, la cui espressione analitica sarà

$$z' = \frac{(a+cn\beta)z + b + dn\beta}{cz + d}$$

e, per essere anche questa parabolica, dovremo avere, per qualunque n:

$$a + d + cn\beta = \pm 2 ,$$

onde $c = 0$; quindi U ha il medesimo punto fisso $z = \infty$ di S.

Ciò premesso, potremo considerare in luogo del nostro gruppo un suo trasformato, nel quale tutte le sostituzioni, avendo la forma

$$z' = z + \beta , \tag{11}$$

rappresenteranno traslazioni del piano complesso. Per abbreviare, chiameremo β l'*amplitudine* della sostituzione parabolica (11). È evidente che i gruppi ora considerati constano di sostituzioni due a due permutabili, sono cioè gruppi Abeliani.

Se scegliamo nel gruppo G, ad arbitrio, un certo numero n di sostituzioni

$$S_1 , S_2 , \ldots S_n ,$$

combinando fra loro queste sostituzioni e le loro potenze, si ottiene un sottogruppo Γ di G (che può anche coincidere con G), di cui tutte le sostituzioni sono comprese nella formola

$$\gamma = S_1^{m_1} S_2^{m_2} \ldots S_n^{m_n} ,$$

dove gli esponenti m percorrono tutti i valori interi positivi, negativi o nulli; indicheremo brevemente questo sottogruppo Γ colla notazione:

$$\Gamma = [S_1 , S_2 , \ldots S_n] .$$

Ora se è possibile determinare degli esponenti r interi, positivi o negativi, ma non tutti nulli, tali che sia

$$S_1^{r_1} S_2^{r_2} \ldots S_n^{r_n} = 1 , \tag{12}$$

diremo che le n sostituzioni $S_1, S_2 \ldots S_n$ sono fra loro *dipendenti* e se

nessuna relazione della forma (12) sussiste, le diremo invece indipendenti. Si osserverà che, rispetto alle amplitudini $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ di queste sostituzioni, la (12) si traduce nella relazione lineare omogenea a coefficienti interi:

$$(12^*) \qquad r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2 + \ldots + r_n \beta_n = 0 ,$$

e per ciò i numeri r si potranno supporre privi di un divisore comune.

Cominciamo dal dimostrare che, se

$$S_1 , S_2 , \ldots S_n$$

sono fra loro dipendenti, potremo generare il gruppo Γ con un numero minore di sostituzioni fondamentali. Per semplificare la dimostrazione, possiamo supporre che nella (12) gli esponenti r non nulli siano tutti positivi, bastando nel caso contrario sostituire ad una corrispondente S la sua inversa. Due almeno degli esponenti r saranno evidentemente non nulli, siano p. e.

$$r_1 , r_2 ,$$

e supponiamo, per fissare le idee,

$$r_1 \leq r_2 .$$

Ponendo

$$S'_1 = S_1 S_2^q ,$$

con q intero qualunque, potremo assumere come generatrici di Γ

$$S'_1 , S_2 , S_3 \ldots S_n ,$$

dopo di che la (12) diverrà:

$$S'^{r_1}_1 . S_2^{r_2 - q r_1} . S_3^{r_3} \ldots S_n^{r_n} = 1 .$$

Se prendiamo adunque q in guisa che sia

$$0 \leq r_2 - q r_1 < r_1 ,$$

avremo abbassato uno degli esponenti r, lasciando gli altri inalterati. Applicando ripetutamente il processo, verremo ad ottenere un sistema di n sostituzioni generatrici

$$s_1 , s_2 , \ldots s_n$$

per le quali la relazione (12) conterrà un solo esponente non nullo e allora la corrispondente sostituzione s sarà l'identità, onde potremo prendere per sostituzioni generatrici di Γ le rimanenti $n-1$, c. d. d.

Dimostriamo ora l'altro teorema: *Se le amplitudini* β_1, β_2 *di due sostituzioni* S_1, S_2 *del gruppo hanno un rapporto reale, o le due sostituzioni saranno fra loro dipendenti, o il gruppo conterrà sostituzioni infinitesimali.*

E invero, se il rapporto $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ è reale e commensurabile, poniamo

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{p}{q},$$

essendo p, q numeri interi primi fra loro; avremo $q\beta_1 = p\beta_2$, cioè

$$S_1^q = S_2^p,$$

che è appunto una relazione fra S_1, S_2.

Se poi $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ è un numero reale incommensurabile α, avremo $\beta_1 = \alpha\beta_2$ ed, essendo r, s numeri interi qualunque, il gruppo conterrà la sostituzione

$$S_1^r \, S_2^s$$

d'amplitudine $(r\alpha+s)\beta_2$. Ma, poichè α è incommensurabile, potremo prendere r, s in guisa che $r\alpha+s$, che non è mai nullo, sia piccolo quanto si vuole; onde avremo nel gruppo sostituzioni infinitesimali.

Ciò premesso, se consideriamo dapprima un gruppo Γ generato da una sola sostituzione S:

$$z' = z + \beta,$$

in esso, per quanto si è visto al §. precedente, avremo sempre un gruppo propriamente discontinuo.

Si abbia ora un gruppo $\Gamma = [S_1, S_2]$ generato da due sostituzioni indipendenti

$$S_1)\ z' = z + \omega_1 \quad , \quad S_2)\ z' = z + \omega_2 ,$$

e privo di sostituzioni infinitesimali. Le amplitudini ω_1, ω_2 delle due sostituzioni fondamentali saranno quindi in rapporto complesso. Preso un punto qualunque a del piano, consideriamo i quattro punti

$$a \ , \ a + \omega_1 \ , \ a + \omega_2 \ , \ a + \omega_1 + \omega_2 ,$$

che sono i vertici di un parallelogrammo.

Qualunque punto del piano complesso è equivalente, rispetto a Γ, ad un punto dell'area parallelogrammica e ad uno solo, eccetto pei punti del contorno, due a due equivalenti. Possiamo quindi assumere questo parallelogrammo come campo fondamentale del gruppo. Applicando a questo campo le infinite sostituzioni del gruppo, il piano ne risulta diviso in una rete di parallelogrammi congruenti, che ricopre una ed una sola volta tutto il piano.

Il nostro gruppo è ancora propriamente discontinuo.

Si osservi però che nella scelta del parallelogrammo fondamentale sussiste ancora molta arbitrarietà, non solo perchè uno dei vertici si può collocare dovunque nel piano, ma anche perchè, in luogo di S_1, S_2, potremmo egualmente assumere due altre sostituzioni *fondamentali*

$$s_1 = S_1^{\alpha}\, S_2^{\beta} \quad , \quad s_2 = S_1^{\gamma}\, S_2^{\delta}$$

del gruppo. Queste due nuove sostituzioni s_1, s_2 saranno fondamentali, cioè genereranno tutto il gruppo, solo quando il determinante

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma$$

dei numeri interi α, β, γ, δ sia $= \pm 1$ [1].

Coi due esempî ora trattati sono esauriti tutti i casi in cui un gruppo di traslazioni del piano è propriamente discontinuo. In ogni altro caso infatti il gruppo contiene, come ora dimostreremo, traslazioni infinitesimali. Supponiamo in effetto che un gruppo Γ possieda tre (o più) traslazioni indipendenti

$$S_1 \ , \ S_2 \ , \ S_3 \, ,$$

di amplitudini

$$\omega_1 \ , \ \omega_2 \ , \ \omega_3 \, .$$

---

[1] E invero, perchè s_1, s_2, siano fondamentali, occorre che si possano trovare quattro interi α', β', γ', δ', tali che sia inversamente

$$S_1 = s_1^{\alpha'}\, s_2^{\beta'} \quad , \quad S_2 = s_1^{\gamma'}\, s_2^{\delta'} \, ,$$

onde

$$\alpha\alpha' + \gamma\beta' = 1 \quad , \quad \alpha\gamma' + \gamma\delta' = 0$$
$$\beta\alpha' + \delta\beta' = 0 \quad , \quad \beta\gamma' + \delta\delta' = 1 \, ,$$

e però

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 1 \, .$$

Se per es. ω_1, ω_2 fossero in rapporto reale, questo rapporto sarebbe incommensurabile (poichè S_1, S_2 sono indipendenti per ipotesi) e Γ conterrebbe appunto sostituzioni infinitesimali. Supponiamo ora che $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ sia complesso e costruiamo il parallelogrammo fondamentale $[a, a+\omega_1, a+\omega_2, a+\omega_1+\omega_2]$ del sottogruppo

$$\Gamma' = [S_1, S_2],$$

indi, considerando un sistema di punti

$$z, \quad z+\omega_3, \quad z+2\omega_3, \ldots.$$

equivalenti rispetto a S_3 e alle sue potenze, troviamo nel parallelogrammo i loro punti equivalenti

$$z'_1, \quad z'_2, \quad z'_3 \ldots \tag{13}$$

rispetto a Γ'. Tutti questi punti saranno distinti, perchè altrimenti fra ω_1, ω_2, ω_3 sussisterebbe una relazione lineare omogenea a coefficienti interi, contro l'ipotesi. Il gruppo infinito di punti (13), addensandosi in un'area finita, avrà almeno un punto limite, nell'intorno del quale le differenze $z'_i - z'_k$ risulteranno di modulo piccolo quanto si vuole; e, poichè ciascuna di queste differenze rappresenta l'amplitudine di una traslazione di Γ, vediamo che Γ contiene traslazioni infinitesime, c. d. d.

Così vediamo che anche per i gruppi di sostituzioni paraboliche la mancanza di sostituzioni infinitesimali assicura la discontinuità propria del gruppo.

In fine osserviamo che il processo tenuto nel presente §. è pure applicabile allo studio dei gruppi discontinui di traslazioni nello spazio a tre dimensioni e ad un numero qualunque di dimensioni. In particolare tutti i gruppi di traslazioni dello spazio a n dimensioni, che contengono più di n traslazioni indipendenti, hanno traslazioni infinitesime. Ogni altro gruppo di traslazioni è propriamente discontinuo nel rispettivo spazio.

§. 18.

Gruppo modulare. — Circoli e rette di riflessione del gruppo ampliato.

Passiamo ora a studiare il gruppo di sostituzioni lineari unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{14}$$

con coefficienti interi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Questo gruppo è evidentemente infinito, discontinuo e privo di sostituzioni infinitesimali. Esso prende il nome di *gruppo modulare*. Noi ne stabiliremo direttamente la discontinuità propria (che risulta anche dal teorema di Poincarè), assegnando il campo fondamentale del gruppo. Ponendo

$$z = x + iy \quad , \quad z' = x' + iy' ,$$

e separando in $\frac{\alpha(x+iy)+\beta}{\gamma(x+iy)+\delta}$ il reale dall'immaginario, troviamo subito

$$y' = \frac{y}{(\gamma x+\delta)^2 + y^2} ,$$

il che dimostra che y, y' hanno sempre lo stesso segno. Il gruppo opera quindi separatamente sulle due parti in cui l'asse reale divide il piano e noi ci limiteremo a considerare il *semipiano positivo* $y > 0$.

Osserviamo subito che tutti i punti *razionali* dell'asse reale sono fra loro equivalenti rispetto al gruppo modulare Γ ed equivalenti p. e. a $z = 0$. Per $z = 0$ infatti la (14) dà $z' = \frac{\beta}{\delta}$ e i numeri β, δ possono essere due numeri interi *qualunque*, primi fra loro. Si vede quindi che nell'intorno di qualsiasi punto dell'asse reale il gruppo modulare Γ è impropriamente discontinuo. Al contrario, nell'intorno di ogni punto del semipiano positivo, esso è, come si vedrà, propriamente discontinuo.

Per lo studio del gruppo modulare Γ, come per quello di molti altri gruppi, è importantissimo procedere ad un *ampliamento* del gruppo, che si ottiene qui associando alle sostituzioni del gruppo la riflessione sull'asse immaginario

$$z' = -z_0 ,$$

che trasforma ancora il semipiano positivo in sè medesimo.

Il nuovo gruppo, che così risulta, contiene, oltre le sostituzioni di 1.ª specie (14), le altre di 2.ª specie

$$(14^*) \qquad z' = \frac{\alpha z_0 - \beta}{\gamma z_0 - \delta} \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 ;$$

lo diremo il *gruppo modulare ampliato* e lo indicheremo con Γ_0. Esso contiene il gruppo modulare Γ come sottogruppo invariante d'indice 2 (Cf. §. 15 alla fine).

Particolarmente importante per lo studio di Γ_0 è il determinare le riflessioni (§. 13) in esso contenute. Esse si otterranno, secondo la formola (9) pag. 41, sempre e solo quando $\delta = \alpha$ [1], cioè avranno la forma

$$z' = \frac{\alpha z_0 - \beta}{\gamma z_0 - \alpha} \quad , \quad \alpha^2 - \beta\gamma = 1$$

e saranno per ciò riflessioni proprie (con circolo reale). Distinguiamo per altro secondo che $\gamma = 0$, ovvero $\gamma \neq 0$. Se $\gamma = 0$, allora è $\alpha = \pm 1$ e si ha una retta di riflessione di equazione

$$2x = \beta ,$$

essendo β un intero qualunque. Abbiamo dunque nel gruppo infinite rette di riflessione

$$x = 0 \ , \ x = \pm\frac{1}{2} \ , \ x = \pm 1 \ , \ x = \pm\frac{3}{2} \ldots$$

tutte parallele all'asse immaginario e distanti ciascuna dalla successiva di $\frac{1}{2}$.

Quando poi $\gamma \neq 0$, abbiamo il circolo di riflessione

$$\gamma(x^2+y^2) - 2\alpha x + \beta = 0 ,$$

ovvero

$$\left(x - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + y^2 = \frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2} .$$

Vi sono dunque infiniti circoli di riflessione di raggio eguale all'inversa γ di un numero intero qualunque e coi centri in tutti quei punti razionali dell'asse reale $\frac{\alpha}{\gamma}$, pei quali il numeratore α soddisfa alla condizione

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{\gamma} ,$$

e così p. es. circoli di raggio $= 1$ col centro in tutti i punti interi dell'asse reale, circoli di raggio $\frac{1}{2}$ coi centri nei punti

$$\pm\frac{1}{2} \ , \ \pm\frac{3}{2} \ , \ \pm\frac{5}{2} \ldots$$

---

[1] Per fare il confronto colle formole del §. 13, bisogna dare alla (14*) il determinante $+1$ scrivendo:

$$z' = \frac{i\alpha z_0 - i\beta}{i\gamma z_0 - i\delta} .$$

circoli di raggio $\frac{1}{3}$ coi centri nei punti

$$\pm\frac{1}{2}\,,\ \pm\frac{2}{3}\,,\ \pm\frac{4}{3}\quad \text{ecc. ecc.}$$

Per il seguito delle nostre considerazioni è necessario premettere le due osservazioni seguenti:

1.ª *L'area indefinita racchiusa nel semipiano positivo da due rette* $x=a$, $x=b$ *parallele all'asse immaginario e da una retta* $y=k$ $(k>0)$ *parallela all'asse reale non è solcata che da un numero* **finito** *di rette e circoli di riflessione.* Per le rette è evidente, poichè si succedono coll'intervallo costante di $\frac{1}{2}$. Quanto ai circoli, potranno solcare l'area solo quelli che hanno un raggio $\frac{1}{\gamma}>k$, ciò che dà un numero finito di valori per γ; ma per ogni valore di γ i centri dei circoli si succedono sull'asse reale ad intervalli finiti e però solo un numero finito di questi circoli solcherà la striscia compresa fra le parallele $x=a$, $x=b$.

2.ª *Applicando alla totalità dei circoli e delle rette di riflessione un'operazione qualunque del gruppo* Γ_0, *i circoli e le rette si scambieranno fra loro.* Ciò risulta subito dall'osservare che, se U è una riflessione del gruppo sul circolo C, e T una sostituzione di Γ_0 che porti il circolo C nel circolo C_1, la trasformata $T^{-1}UT$ sarà una riflessione sul circolo C_1.

§. 19.

Il triangolo fondamentale del gruppo ampliato.

Consideriamo nel piano complesso le due rette successive di riflessione

$$x=0\ ,\quad x=-\frac{1}{2}$$

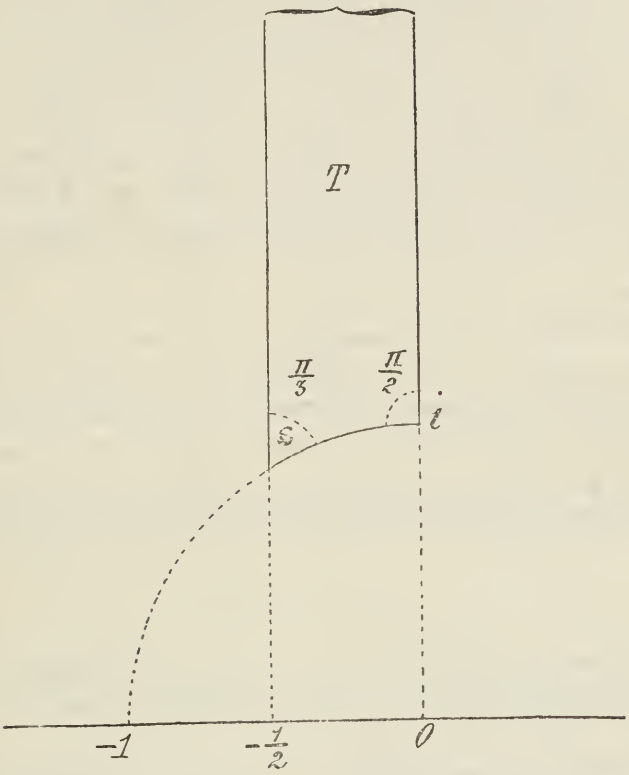
ed il circolo di riflessione

$$x^2+y^2=1\,.$$

La regione indefinita del semipiano positivo, compresa entro la striscia limitata da quelle due rette, all'esterno del circolo, si dirà *il trian-*

golo fondamentale T e in effetto, come ora dimostreremo, nel triangolo T abbiamo il campo fondamentale del gruppo ampliato Γ_0. I tre vertici

Fig. 1.ª



di questo triangolo sono nei punti

$$z = e^{\frac{\pi i}{2}} = i \ , \quad z = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \varepsilon \ , \quad z = \infty$$

e i rispettivi angoli a questi vertici hanno le ampiezze

$$\frac{\pi}{2} \ , \quad \frac{\pi}{3} \ , \quad 0 \, .$$

Osserviamo poi che *il nostro triangolo* T *non è attraversato da alcun altro circolo o retta di riflessione.*

Se applichiamo al triangolo T una sostituzione qualunque di Γ_0, avremo un nuovo triangolo T′ limitato da tre archi di circoli di riflessione (o rette), coi medesimi angoli di $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$, 0 e il triangolo T′, come T

da cui deriva, non sarà attraversato da alcun circolo di riflessione. Vogliamo ora dimostrare che: *tutti questi triangoli formano una rete, la quale ricopre una ed una sola volta tutto il semipiano positivo.* E infatti prendiamo dovunque nel semipiano positivo (l'asse reale escluso) un punto A e prendiamo anche un punto qualsiasi B nell'interno di T; indi descriviamo una linea continua L che vada nel semipiano positivo da B ad A senza mai toccare l'asse reale (p. es. il segmento rettilineo B A). La nostra linea L, mantenendosi i suoi punti sempre a distanza finita dall'asse reale, non potrà traversare che un numero finito di rette o circoli di riflessione (§. 16) e risulterà quindi divisa in un numero finito di tratti $l_1, l_2, .. l_v$, avendo luogo ogni volta fra un tratto e l'altro l'attraversamento di un circolo di riflessione.

Il primo tratto l_1 è nel triangolo T e nell'estremo fra l_1, l_2 la linea L traversa un lato di T, sicchè se consideriamo quel triangolo T_1 della rete che nasce da T per riflessione su quel lato, il secondo tratto l_2 resterà entro T_1. Poi la linea L traversa un lato di T_1 ed entra per il tratto l_3 in un terzo triangolo T_2 aderente a T_1 pel detto lato. Così continuando, è chiaro che costruiremo una serie successiva di v triangoli della rete

$$T\ ,\ T_1\ ,\ T_2 \ldots T_{v-1}\ ,$$

ciascuno aderente al precedente per un lato e nel triangolo T_{v-1} sarà il punto A. Dunque *la rete si estende in qualunque regione del semipiano positivo.*

In secondo luogo due triangoli T_r, T_s della rete non possono mai in parte sovrapporsi (avere una regione a comune); altrimenti p. e. T_r sarebbe attraversato da qualche circolo di riflessione (un lato di T_s).

Così è dimostrato quanto volevamo e possiamo ora facilmente vedere che: *Ogni punto del semipiano positivo è equivalente, rispetto al gruppo ampliato* Γ_0, *ad uno e ad un solo punto del triangolo* T, *il quale è adunque il triangolo fondamentale di* Γ_0.

E invero se A è un punto qualunque del semipiano positivo, esiste, come si è visto, un triangolo T′ della rete che contiene A, e la sostituzione di Γ_0 che porta T′ in T porterà A in un punto di T.

Osserviamo poi che la sostituzione di Γ_0, che porta T in T′, è unica e determinata perchè, se ve ne fossero due differenti S_1, S_2, la sostituzione (non identica) $S_1 S_2^{-1}$ trasformerebbe T in sè stesso. Ora ciò è impossibile; e in vero, il triangolo T avendo i tre angoli diseguali, non

esiste non solo in Γ_0, *ma nemmeno fuori di* Γ_0, alcuna sostituzione, nè di 1.ª nè di 2.ª specie, che trasformi T in sè stesso, essendo che ciascuno dei tre vertici dovrebbe rimanere fisso [1].

Risulta di qui che due punti P, Q del triangolo T non possono essere equivalenti. E infatti se P, Q sono ambedue interni a T, la sostituzione che cangia P in Q dovrebbe trasformare T in sè medesimo. Se P è sul contorno e Q nell'interno, quella sostituzione cangerebbe il lato su cui si trova P in un circolo di riflessione attraversante T. Se poi P e Q sono sul contorno, quella sostituzione dovrebbe cangiare T in un triangolo aderente e sarebbe quindi una riflessione sopra il lato contenente Q e lascierebbe fisso Q, nè potrebbe trasportarvi P.

§. 20.

La rete modulare e le riflessioni generatrici A, B, C.

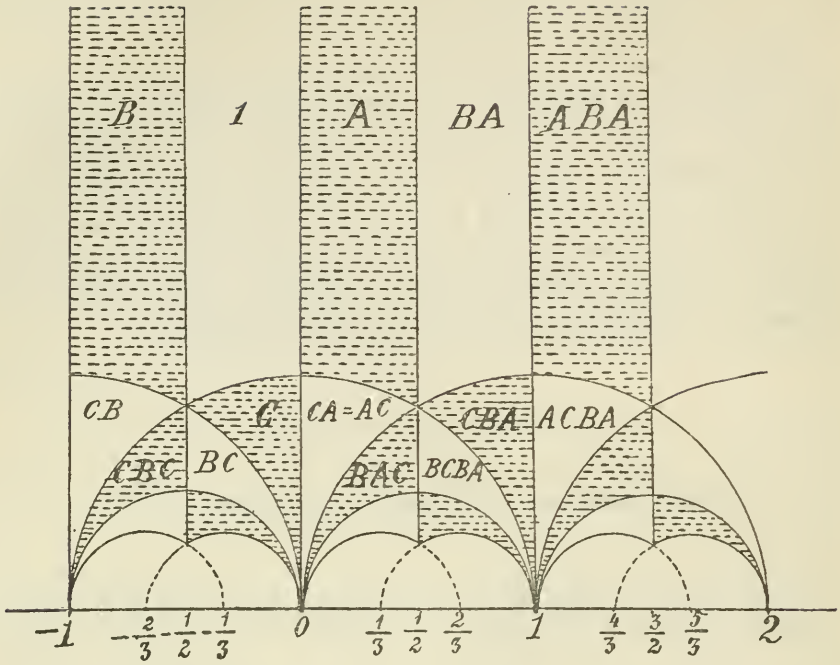
Tutta la rete dei triangoli T, che ricopre una ed una sola volta il semipiano positivo, si può generare riflettendo il triangolo fondamentale sui suoi tre lati, i nuovi triangoli ottenuti sui loro lati liberi e così via di seguito. Per figurare con chiarezza la rete, tratteggiamo tutti i triangoli della rete che nascono da T, nel modo descritto, con un numero dispari di riflessioni, lasciando gli altri non tratteggiati; otteniamo così la figura 2.ª che ci rappresenta la *rete modulare*. Ogni triangolo della rete sarà quindi tratteggiato o no, secondo che nasce dal fondamentale per una sostituzione di 2.ª o di 1.ª specie. Possiamo indicare senza ambiguità ogni triangolo della rete per mezzo della sostituzione V che lo fa derivare dal triangolo fondamentale, il quale sarà adunque indicato col simbolo 1. Indichiamo rispettivamente con

$$A\ ,\ B\ ,\ C$$

---

[1] Questa considerazione dimostra che: *Non vi ha alcun gruppo più ampio di* Γ_0, *che contenga* Γ_0 *come sottogruppo invariante.* Le sostituzioni U di un tale gruppo dovrebbero infatti trasformare le riflessioni di Γ_0 in nuove riflessioni di Γ_0, e però il triangolo T in un altro T' della rete. Se con γ indichiamo la sostituzione di Γ_0 che porta T in T', la $U\gamma^{-1}$ lascia fisso T e però $U\gamma^{-1} = 1$, cioè $U = \gamma$.

Fig. 2.ª



le tre riflessioni sui lati

$$x = 0 \ , \quad x = -\frac{1}{2} \ , \quad x^2 + y^2 = 1$$

del triangolo fondamentale T e cogli stessi simboli dovremo indicare i tre triangoli aderenti al fondamentale 1 pei rispettivi lati. Ora osserviamo che, se V è una sostituzione qualunque di Γ_0, applicandola p. es. ai due triangoli aderenti

$$1 \ , \quad A \ ,$$

otterremo due triangoli pure aderenti

$$V \ , \quad AV .$$

Così adunque al triangolo V saranno aderenti i tre triangoli

$$AV \ , \quad BV \ , \quad CV$$

e precisamente A V lungo il lato che sottende gli angoli di $\frac{\pi}{2}$, o ecc. E poichè si può passare dal triangolo fondamentale ad uno qualunque

della rete per una serie di triangoli aderenti, ne deduciamo: *L'intero gruppo modulare ampliato* Γ_0 *si genera colle tre riflessioni elementari* A, B, C. L'espressione analitica di queste tre riflessioni è data rispettivamente da

$$\text{A)} \quad z' = -z_0$$

$$\text{B)} \quad z' = -z_0 - 1$$

$$\text{C)} \quad z' = \frac{1}{z_0}\,.$$

I vertici della rete modulare si distinguono in tre specie, secondo che gli angoli corrispondenti sono 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$. In ciascuna specie tutti i vertici sono equivalenti e non solo rispetto al gruppo ampliato Γ_0, *ma anche rispetto al gruppo modulare* Γ, come si rileva dall'osservare che per ciascuno dei tre vertici di un triangolo della rete esiste una sostituzione di 2.ª specie che lo lascia fisso (una riflessione). I vertici della prima specie sono tutti equivalenti al vertice $z = \infty$ e sono i punti *razionali* dell'asse reale; quelli della seconda specie sono equivalenti al vertice $z = i$ e quelli della terza specie al vertice $z = \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Intorno a ciascun vertice della prima specie si distribuiscono infiniti triangoli della rete che diventano sempre più piccoli, avvicinandosi all'asse reale. Intorno a ciascun vertice equivalente a $z = i$ si riuniscono *quattro* triangoli della rete alternatamente tratteggiati o no, e similmente intorno ai vertici equivalenti a $z = \varepsilon$ *sei* triangoli.

§. 21.

Il Triangolo fondamentale del gruppo modulare e le sostituzioni generatrici S, T.

Per ottenere il campo fondamentale del gruppo modulare Γ basta che associamo due triangoli aderenti della rete modulare, p. e. il fondamentale 1 e il suo simmetrico A rispetto all'asse immaginario. Otteniamo così il triangolo, che indicheremo con T, limitato fra le due parallele

$$x = -\frac{1}{2}\,, \quad x = +\frac{1}{2}$$

all'esterno del circolo $x^2+y^2=1$, con angoli eguali a $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$; le ricerche precedenti ci fanno subito riconoscere che: *Ogni punto del semipiano è equivalente, rispetto a* Γ, *ad un punto di questo triangolo; due punti di esso triangolo non sono mai equivalenti, a meno che non si trovino sul contorno, simmetricamente disposti rispetto all'asse immaginario.*

E invero un punto P qualunque del semipiano positivo si può portare con una sostituzione V di Γ_0 nella metà a sinistra del detto triangolo. Se V è di 1.ª specie, lo scopo è raggiunto: altrimenti eseguendo dopo V la riflessione A, la sostituzione V A di Γ porterà P nella seconda metà del nostro triangolo T. In secondo luogo, se due punti P, Q di T sono equivalenti rispetto a Γ lo saranno, a più forte ragione, rispetto a Γ_0 e dovranno quindi trovarsi l'uno nella prima, l'altro nella seconda metà di T ed essere simmetrici rispetto all'asse immaginario. Ora, se V è la supposta sostituzione di 1.ª specie che porta P in Q, la V A di 2.ª specie lascierà fermo P, che dovrà dunque essere sul contorno rettilineo o circolare. Nel 1.° caso la V A dovrà coincidere colla riflessione B, nel secondo colla C e la sostituzione supposta sarà o la

$$S = B\,A\,,$$

o la

$$T = C\,A\,.$$

Effettivamente la sostituzione

$$S = B\,A = \begin{pmatrix} 1\,, & 1 \\ 0\,, & 1 \end{pmatrix}\,, \quad z' = z + 1$$

porta un punto della retta $x = -\frac{1}{2}$ nel simmetrico dell'altra $x = +\frac{1}{2}$ e la sostituzione

$$T = C\,A = \begin{pmatrix} 0\,, & 1 \\ -1\,, & 0 \end{pmatrix}\,, \quad z' = -\frac{1}{z}$$

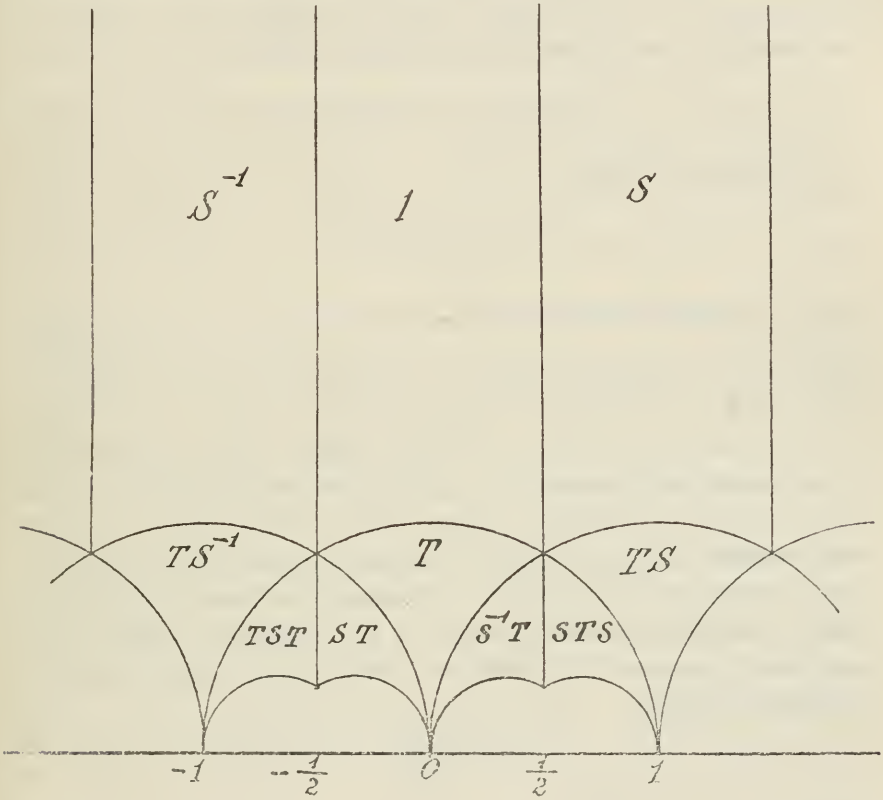
porta un punto del circolo $x^2+y^2=1$ nel simmetrico (rispetto all'asse immaginario). Dimostriamo ora che: *Le due sostituzioni*

$$S = \begin{pmatrix} 1\,, & 1 \\ 0\,, & 1 \end{pmatrix}\,, \quad T = \begin{pmatrix} 0\,, & 1 \\ -1\,, & 0 \end{pmatrix}$$

bastano già a generare l'intero gruppo modulare.

Cominciamo dall'osservare che se applichiamo al triangolo T tutte le sostituzioni di Γ otteniamo una rete di triangoli (con angoli di $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$), ciascuno dei quali non è che l'insieme di due triangoli aderenti della rete primitiva. Potremo indicare questi triangoli col simbolo della sosti-

Fig. 3.ª



tuzione stessa, che li fa derivare dal fondamentale T. Ma al triangolo T, che ora indichiamo con 1 (fig. 3.ª), sono aderenti i triangoli

$$S \ , \ S^{-1} \ , \ T$$

e però ogni altro triangolo V della nuova rete ha per triangoli aderenti

$$SV \ , \ S^{-1}V \ , \ TV .$$

Se ne conclude, come al §. 18, che combinando le sostituzioni S, T e le loro potenze si genera tutto il gruppo modulare.

§. 22.

Sostituzioni ellittiche del gruppo modulare.

Le sostituzioni $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ del gruppo modulare sono ellittiche quando l'invariante $j = \alpha + \delta$ non supera in valore assoluto il 2 e, poichè nel caso attuale j è un numero intero, dovremo avere

$$\alpha + \delta = 0 \quad , \quad \text{o} \quad \alpha + \delta = \pm 1 .$$

A causa della formola (§. 12)

$$j = 2 \cos \frac{\varphi}{2} ,$$

avremo nel primo caso $\cos \frac{\varphi}{2} = 0$ e nel secondo $\cos \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{1}{2}$, onde vediamo intanto che le sostituzioni ellittiche del nostro gruppo sono a periodo 2, o a periodo 3. Al medesimo risultato possiamo arrivare colle considerazioni geometriche seguenti, che ci fanno inoltre riconoscere quali sono le sostituzioni ellittiche *affini* [1]. Ogni sostituzione ellittica deve lasciar fisso un punto del semipiano positivo (fuori dell'asse reale), che deve essere dunque un vertice della rete modulare e però (§. 40) o equivalente al vertice $z = i$ o all'altro $z = \varepsilon$. Qualunque sostituzione ellittica del gruppo modulare sarà dunque affine ad una sostituzione (ellittica) che lasci fisso il punto $z = i$, o il punto $z = \varepsilon$. Ma le prime si determinano subito dalla relazione

$$i = \frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta} ,$$

da cui

$$\gamma = -\beta \quad , \quad \alpha = \delta ,$$

onde a causa di $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, cioè $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, otteniamo (escludendo l'identità) l'unica sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} 0 , & 1 \\ -1 , & 0 \end{pmatrix} .$$

---

[1] In generale chiamiamo affini due sostituzioni in un gruppo, quando l'una si ottiene dall'altra trasformando questa *con una sostituzione del gruppo stesso.*

Nel secondo caso troviamo le due sostituzioni

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix},$$

ossia

$$z' = -\frac{z+1}{z}, \quad z' = -\frac{1}{z+1},$$

delle quali la seconda è il quadrato della prima e che, nell'intorno del punto $z = \varepsilon$, producono una rotazione del piano di $\frac{2\pi}{3}$, la prima nel senso positivo, la seconda nel negativo. Dunque: *Le sostituzioni ellittiche del gruppo modulare sono a periodo 2, ovvero a periodo 3; le prime sono tutte affini alla sostituzione elementare* $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$, *quelle a periodo* 3 *si ripartiscono in due classi di sostituzioni, affini rispettivamente alle due* $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$.

§. 23.

Forme binarie quadratiche a determinante negativo.

Mediante la rappresentazione geometrica del gruppo modulare, stabilita nei §§. precedenti, si può dare un'elegante interpretazione a quel capitolo della teoria dei numeri che tratta delle forme binarie quadratiche, della loro riduzione, della risoluzione dell'equazione di Pell ecc., come si può vedere diffusamente esposto nel 1.° volume della *Theorie der elliptischen Modulfunctionen* di Klein-Fricke (3es Kap. pag. 243 s. s.).

Noi qui ci limiteremo al caso che ha maggiore interesse per la teoria delle funzioni ellittiche (moltiplicazione complessa), al caso cioè di una forma quadratica

$$(15) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2$$

a determinante $D = b^2 - ac$ negativo, i coefficienti a, b, c essendo supposti numeri interi. Manifestamente i cofficienti estremi a, c hanno lo stesso segno e li supporremo sempre positivi, bastando nel caso opposto cangiare di segno tutti i coefficienti. Ricordiamo che la forma (15) si dice *equivalente* alla forma:

$$(15^*) \qquad a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

quando la prima si traduce nella seconda mediante una sostituzione lineare sulle variabili

$$(16) \qquad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y' , \end{cases}$$

a coefficienti interi e a determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Le infinite forme equivalenti ad una data costituiscono ciò che si dice una *classe* di forme; esse hanno tutte egual determinante. Tutte le forme di eguale determinante si distribuiscono in altrettante classi ed uno dei principali risultati della teoria, che ci proponiamo qui di stabilire, consiste in questo che il numero delle classi, corrispondenti ad un dato determinante, è sempre un numero finito.

Si dicono radici della forma (15) le due radici della equazione

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0 ,$$

che nel caso nostro, essendo $D = -\Delta = b^2 - ac$ negativo, sono coniugate immaginarie ed hanno i valori

$$\omega_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{a} , \quad \omega_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{a} .$$

L'indice della prima radice ω_1 è situato nel semipiano positivo e si dirà l'*indice della forma*. È importante osservare che *una forma* (a, b, c) *a determinante negativo è pienamente determinata quando sia dato il suo determinante ed il suo indice.*

Ciò posto, consideriamo due forme (15), (15*) equivalenti e i loro rispettivi indici ω_1, ω'_1, che per le (16) e, per essere $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, saranno legati dalla relazione

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega'_1 + \beta}{\gamma\omega'_1 + \delta} ,$$

onde vediamo che due forme equivalenti hanno indici equivalenti rispetto al gruppo modulare. Viceversa, dall'osservazione fatta sopra, risulta che due forme di egual determinante saranno equivalenti se hanno indici equivalenti. Ora, con una sostituzione del gruppo modulare, possiamo trasportare l'indice di una forma nel triangolo fondamentale

$$(17) \qquad -\frac{1}{2} \leq x \leq +\frac{1}{2} \qquad x^2 + y^2 \geq 1 .$$

Se chiamiamo dunque *ridotta* una forma quando il suo indice giace nel triangolo fondamentale, abbiamo il teorema:

Ogni forma a determinante negativo è equivalente ad una forma ridotta.

A quali condizioni debbono soddisfare i coefficienti di una forma ridotta (a, b, c)? Poichè l'indice è dato da

$$\omega_1 = x + i\,y = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{a},$$

le diseguaglianze (17) si traducono nelle altre pei coefficienti

$$(17^*) \qquad 2\,|b| \leq a \leq c.$$

Queste sono appunto le condizioni cui deve soddisfare una forma ridotta secondo Gauss.

Dalle diseguaglianze (17*) segue subito che esiste soltanto un numero finito di forme ridotte di assegnato determinante, poichè dalle (17*) abbiamo

$$4\,b^2 \leq a\,c \quad , \quad 3\,b^2 \leq \Delta\,,$$

quindi $|b| \leq \sqrt{\frac{\Delta}{3}}$. Il coefficiente medio b, assegnato Δ, non può dunque avere che un numero finito di valori e per ciascuno di essi, a causa di $\Delta = a\,c - b^2$, i coefficienti estremi a, c debbono corrispondere ad una decomposizione del numero

$$\Delta + b^2 = a\,c$$

nel prodotto di due fattori. Poichè adunque ogni forma è equivalente ad una ridotta, e le forme ridotte di egual determinante sono in numero finito, risulta dimostrato il teorema fondamentale:

Le forme di egual determinante negativo si distribuiscono in un numero finito di classi.

Per risolvere il problema fondamentale della teoria dell'equivalenza, che consiste nel riconoscere se due forme di egual determinante appartengono o no alla medesima classe, resta a vedere se due forme ridotte possono essere equivalenti. Poichè i loro indici appartengono al triangolo fondamentale, ciò avverrà soltanto quando si trovino sul contorno, simmetricamente disposti rispetto all'asse immaginario. Se appartengono

al contorno rettilineo, le due forme ridotte equivalenti presenteranno i coefficienti

$$\left(a\ ,\ \frac{1}{2}\,a\ ,\ c\right) \qquad \left(a\ ,\ -\frac{1}{2}\,a\ ,\ c\right)$$

e, se appartengono al contorno circolare, saranno

$$(a\ ,\ b\ ,\ a) \qquad (a\ ,\ -b\ ,\ a)\ ^{(1)}.$$

§. 24.

L' affinità circolare trasportata nello spazio e le formole di Poincarè.

Il metodo dell'ampliamento per riflessione, che abbiamo adoperato per lo studio del gruppo modulare, riesce per molte altre classi di gruppi propriamente discontinui nel piano complesso. Ma vi sono, come già abbiamo detto al §. 14, dei gruppi che, senza contenere sostituzioni infinitesimali, sono in tutto il piano impropriamente discontinui.

Nonostante possiamo estendere anche a questi gruppi la nozione di *campo fondamentale*, passando con un ingegnoso artifizio dovuto a Poincarè (*Acta Mathematica*, T. 3), dalla rappresentazione geometrica nel piano ad una rappresentazione dello spazio. Per intendere come si effettua questo passaggio, ricordiamo che la sostituzione lineare

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

cangia i circoli in circoli e di più un fascio od una rete di circoli egualmente in un fascio od una rete. Ora se consideriamo una rete di circoli, essa è determinata da tre dei suoi circoli e consta di tutti i circoli normali ad un cerchio fisso, che ha per centro il centro radicale dei tre circoli ed ha per quadrato del raggio la potenza di questo centro rispetto a ciascun circolo della rete. Il cerchio fisso è quindi reale od immaginario, secondo che questa potenza è positiva o negativa. Nel secondo caso, che è quello ora importante per noi, possiamo anche dire che la rete consta dei circoli che tagliano in punti diametralmente opposti un cerchio reale fisso. Ora noi osserviamo che tutte le sfere descritte sopra i circoli di una tale rete come circoli massimi passano per due punti fissi reali simmetrici rispetto al piano delle rete, che sono i due estremi

(1) Cf. DIRICHLET-DEDEKIND. *Zahlentheorie*, §. 65.

di quel diametro della sfera, avente per cerchio massimo il cerchio fisso, che è perpendicolare nel centro al piano della figura [1].

Ciò premesso, consideriamo l'intero spazio, o meglio il semispazio $\zeta > 0$, associando ai due assi ortogonali $O\xi$, $O\eta$ nel piano z un terzo asse $O\zeta$ ortogonale ad ambedue. Prendiamo un punto qualunque P in questo semispazio (di ordinata $\zeta > 0$); le sfere che passano per P ed hanno il centro sul piano $\zeta = 0$ tagliano questo piano in una rete di circoli della specie ora considerata. Questa è cangiata dalla sostituzione lineare $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ in una rete omologa che definisce nel semispazio un punto P′ pel quale vengono a passare tutte le sfere descritte sui circoli della nuova rete come circoli massimi. Così rispetto alla detta sostituzione lineare *ogni punto* $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ *del semispazio ne individua un altro* $P' \equiv (\xi', \eta', \zeta')$ *e noi estendiamo, con Poincarè, la trasformazione a tutto il semispazio facendo corrispondere al punto* P *il punto* P′.

Quali saranno le formole di trasformazione? Per trovarle basta tradurre analiticamente la definizione geometrica della trasformazione. Sia (§. 10):

$$A z' z'_0 + B z' + B_0 z'_0 + C = 0 \tag{18}$$

---

[1] Tutte le proprietà qui accennate possono dimostrarsi elementarmente, o dedursi analiticamente così. Prendiamo per origine delle coordinate il centro radicale dei circoli della rete; questi avranno l'equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2 a_1 x + 2 b_1 y + c = 0 , \\ x^2 + y^2 + 2 a_2 x + 2 b_2 y + c = 0 , \\ x^2 + y^2 + 2 a_3 x + 2 b_3 y + c = 0 , \end{cases}$$

e taglieranno ortogonalmente il cerchio

$$x^2 + y^2 = c ,$$

che è però immaginario se $c < 0$. In tal caso si consideri invece il circolo

$$x^2 + y^2 + c = 0 ,$$

che i tre circoli fondamentali (e tutti quelli della rete) taglieranno in punti diametralmente opposti.

In fine la sfera che ha per circolo massimo p. e. il primo di quei tre circoli ha per equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 a_1 x + 2 b_1 y + c = 0$$

e taglia l'asse z nei due punti $z = \pm \sqrt{-c}$.

l'equazione di un circolo della seconda rete, dove A, B, C sono parametri arbitrarii (i due estremi reali). Ponendo

$$\rho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 ,$$

sarà

$$\text{(18*)} \qquad A\rho'^2 + B z' + B_0 z'_0 + C = 0$$

l'equazione della sfera corrispondente.

Il circolo (18) si muta, per la sostituzione lineare

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} ,$$

nell'altro

$$(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0) z z_0 + (A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0) z +$$
$$(A\alpha_0\beta + B_0\alpha_0\delta + B\beta\gamma_0 + C\gamma_0\delta) z_0 + A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0 = 0 :$$

la sfera che lo ha per circolo massimo ha quindi per equazione:

$$A(\alpha\alpha_0\rho^2 + \alpha\beta_0 z + \alpha_0\beta z_0 + \beta\beta_0) + B(\alpha\gamma_0\rho^2 + \alpha\delta_0 z + \beta\gamma_0 z_0 + \beta\delta_0) +$$
$$B_0(\alpha_0\gamma\rho^2 + \alpha_0\delta z_0 + \beta_0\gamma z + \beta_0\delta) + C(\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0) = 0$$

e deve contenere il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$. Paragonando quest'ultima equazione colla (18*), ne deduciamo per le formole richieste:

$$\text{(19)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho'^2 &= \frac{\alpha\alpha_0\rho^2 + \alpha\beta_0 z + \alpha_0\beta z_0 + \beta\beta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0} \\ z' &= \frac{\alpha\gamma_0\rho^2 + \alpha\delta_0 z + \beta\gamma_0 z_0 + \beta\delta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0} \\ z'_0 &= \frac{\alpha_0\gamma\rho^2 + \alpha_0\delta z_0 + \beta_0\gamma z + \beta_0\delta}{\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0} . \end{aligned} \right.$$

Se calcoliamo da queste $\zeta'^2 = \rho'^2 - z' z'_0$, supponendo come al solito $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, troviamo

$$\text{(19*)} \qquad \zeta' = \frac{\zeta}{\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0} .$$

Questa trasformazione dello spazio conserva gli angoli e cangia le sfere in sfere e di più il piano $\xi\eta$ in sè stesso, quindi i circoli normali

a questo piano in altrettali circoli [1]. Se consideriamo la totalità delle sostituzioni lineari, esse formano un gruppo *continuo*, al quale, colle formole (19), (19*) facciamo corrispondere un gruppo *isomorfo* di trasformazioni conformi dello spazio.

Osserviamo, che la sostituzione

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

se non è parabolica, avrà sul piano $\xi\eta$ due punti distinti fissi A, B ed il circolo condotto per A, B normalmente al piano si cangerà in sè medesimo. In particolare quando la sostituzione è ellittica, tutti i punti del circolo rimarranno fissi [2].

È manifesto che le nostre deduzioni restano invariate se, in luogo di una sostituzione di 1.ª specie, ne consideriamo una di 2.ª

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta};$$

soltanto dovremo nelle formole di Poincarè scambiare z con z_0. In particolare, se consideriamo una riflessione e sul circolo di riflessione come circolo massimo descriviamo una sfera, la trasformazione corrispondente dello spazio sarà un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto a questa sfera. Noi la diremo una riflessione su questa sfera, che si chiamerà perciò *sfera di riflessione.*

---

[1] Si può dimostrare facilmente la cosa, osservando che ciò ha luogo per le trasformazioni corrispondenti alle sostituzioni lineari elementari

$$z' = z + a \quad , \quad z' = kz \quad , \quad z' = \frac{1}{z},$$

colle quali ogni altra può comporsi.

[2] Ciò si vede nel modo più semplice riducendo la sostituzione (ellittica) alla forma normale

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z,$$

con $\alpha\delta = 1$, $|\alpha| = |\delta|$, dopo di che le formole di Poincarè danno

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z \qquad \zeta' = \zeta$$

e rappresentano semplicemente una rotazione dello spazio attorno all'asse $O\zeta$.

Consideriamo ora un gruppo discontinuo di sostituzioni lineari ed il gruppo corrispondente di trasformazioni conformi dello spazio. Possiamo trasportare nello spazio la nozione di punti equivalenti rispetto al gruppo e di *campo fondamentale,* che sarà ora un campo a tre dimensioni. Diremo dunque che un gruppo discontinuo di sostituzioni lineari è propriamente discontinuo nello spazio se tale è il gruppo corrispondente di trasformazioni dello spazio. È chiaro che un gruppo con sostituzioni infinitesimali è sempre impropriamente discontinuo anche nello spazio; ma nel caso opposto abbiamo l'importante teorema di Poincarè che anche qui ci limitiamo a citare: *Ogni gruppo discontinuo di sostituzioni lineari, privo di sostituzioni infinitesimali, è sempre propriamente discontinuo nello spazio.*

§. 25.

Il gruppo delle sostituzioni unimodulari a coefficienti interi complessi.

Come applicazione del metodo di Poincarè, esposto nel §. precedente, tratteremo il gruppo delle sostituzioni unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \, ,$$

i cui coefficienti sono numeri *interi complessi* di Gauss, cioè della forma

$$a + b\,i \, ,$$

essendo a, b interi reali. Questo gruppo è impropriamente discontinuo in tutto il piano, come risulta subito dall'osservare che rispetto al gruppo attuale sono equivalenti al punto $z = 0$ e fra loro tutti i punti $z = \frac{a + b\,i}{c + d\,i}$ e questi formano un gruppo di punti ovunque condensato nel piano [1].

---

[1] Questa proposizione, che risulta dalle proprietà elementari degli interi complessi di Gauss, può dimostrarsi anche così. Prendasi per δ uno degli *infiniti* numeri primi reali p della forma $4n + 3$ e per β_1, β_2 due numeri qualunque (reali) non simultaneamente divisibili per p. Possiamo sempre trovare due interi complessi

$$\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2 \, , \quad \gamma = \gamma_1 + i\,\gamma_2 \, ,$$

tali che sia

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (\alpha_1 + i\,\alpha_2)\,p - (\beta_1 + i\,\beta_2)\,(\gamma_1 + i\,\gamma_2) = 1 \, .$$

Ma se passiamo dal piano allo spazio, il gruppo sarà propriamente discontinuo e noi ci proponiamo di determinarne il campo (poliedro) fondamentale.

In luogo però di considerare solo le sostituzioni con $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, qui ammettiamo che il determinante possa essere una qualunque delle quattro unità del campo complesso

$$1 \ , \ -1 \ , \ i \ , \ -i$$

e poichè, moltiplicando i quattro coefficienti per i, il determinante cambia segno, possiamo limitarci a considerare le sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{20}$$

con coefficienti interi complessi e determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \ , \ 0 = i.$$

Questo gruppo, che indicheremo con G, contiene il precedente come sottogruppo invariante d'indice 2.

Per lo studio del nostro gruppo G è importante un ampliamento per riflessione, che si ottiene associando alle sostituzioni (20) di 1.ª specie le altre di 2.ª specie

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \ , \ i. \tag{20*}$$

Basta per ciò determinare due interi reali γ_1, γ_2, che soddisfino le congruenze

$$\left.\begin{array}{l} \beta_2\gamma_2 - \beta_1\gamma_1 \equiv 1 \\ \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{p},$$

ciò che è sempre possibile, il determinante del sistema $\begin{vmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \beta_1^2 + \beta_2^2$ non essendo divisibile per p. Dunque tutti i punti razionali di coordinate $\frac{\beta_1}{p}$, $\frac{\beta_2}{p}$ sono equivalenti e, poichè p può essere grande quanto si vuole, ne risulta il teorema.

Osservazione. — Che vi siano infiniti numeri primi della forma $4n+3$ risulta da un teorema generale di Dirichlet; ma si può dimostrare elementarmente, seguendo un procedimento di Euclide, così: Consideriamo i numeri primi della forma $4n+3$ fino ad uno qualunque di essi p, e siano

$$3 \ , \ 7 \ , \ 11 \ , \ldots p.$$

Il numero $N = 3^2 \, . \, 7^2 \, . \, 11^2 \ldots . \, p^2 + 2$ è $\equiv 3 \pmod 4$ ed ammette quindi qualche fattore primo della forma $4n+3$, che è al di là di quelli considerati.

Le (20), (20*) insieme formano un gruppo G_0, in cui G è invariante d'indice 2.

Per determinare il campo fondamentale del gruppo ampliato G_0, seguiremo un metodo perfettamente analogo a quello tenuto pel gruppo modulare e comincieremo dal trovare le riflessioni (proprie) contenute in G_0. Queste ci saranno date dalla formola (9) pag. 41, quando si sia reso $=1$ il determinante della sostituzione. Fra le sostituzioni di 2.ª specie (20*) a determinante $=1$ le riflessioni saranno quindi date dalla formola

$$z' = \frac{(\alpha_1 + i\,\alpha_2)\,z_0 + i\,\beta_1}{i\,\gamma_1\,z_0 + (\alpha_1 - i\,\alpha_2)}\,, \tag{21}$$

i numeri interi α_1, α_2, β_1, γ_1 soddisfacendo l'equazione

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1\,\gamma_1 = 1\,. \tag{22}$$

Le sostituzioni (20*) a determinante i si riducono a determinante 1 moltiplicando i quattro coefficienti per $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ e, se applichiamo ancora la citata formola (9), troviamo le nuove riflessioni

$$z' = \frac{(a_1 + i\,a_2)\,z_0 + (1-i)\,b_1}{(1-i)\,c_1\,z_0 + (a_2 + i\,a_1)}\,, \tag{21*}$$

i numeri interi reali a_1, a_2, b_1, c_1 essendo assoggettati alla condizione

$$a_1^2 + a_2^2 + 2\,b_1\,c_1 = 1\,. \tag{22*}$$

Fra le riflessioni (21), (21*) ve ne hanno di quelle che avvengono sopra piani e sono quelle che corrispondono rispettivamente a $\gamma_1 = 0$, $c_1 = 0$. Otteniamo così i piani di riflessione:

$$2\,\xi = b\,,\quad 2\,\eta = b\,,\quad \xi - \eta = b\,,\quad \xi + \eta = b\,, \tag{A}$$

essendo b un intero reale qualunque.

Per γ_1 o c_1 differenti da zero, abbiamo poi le due specie di sfere di riflessione:

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\xi - \frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\gamma_1^2} \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \equiv 1 \pmod{\gamma_1} \end{array}\right. \tag{B}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\xi - \frac{a_1 - a_2}{2\,c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1 + a_2}{2\,c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2\,c_1^2} \\ a_1^2 + a_2^2 \equiv 1 \pmod{2\,c_1}\,. \end{array}\right. \tag{B*}$$

Le formole (A), (B), (B*) danno tutte le sfere di riflessione di G_0.

Come al §. 18, così ora si vede che se si considera nel semispazio positivo la regione compresa fra quattro piani paralleli ai piani coordinati $\xi\zeta$, $\eta\zeta$:

$$\xi = A \ , \quad \xi = B \ , \quad \eta = C \ , \quad \eta = D \ ,$$

al di sopra del piano

$$\zeta = k \qquad (k > 0) \ ,$$

questa non è solcata che da un numero finito di sfere e piani di riflessione. In secondo luogo ogni sostituzione di G_0, applicata alle sfere di riflessione, le scambierà fra loro.

Ciò premesso, possiamo facilmente determinare un poliedro fondamentale pel gruppo G_0. Si considerino invero i tre piani di riflessione

$$\xi = \frac{1}{2} \ , \quad \eta = 0 \ , \quad \xi - \eta = 0 \ ;$$

questi limitano nel semispazio positivo un prisma triangolare (isoscele) aperto, che non è più attraversato da alcun piano di riflessione. Consideriamo poi la sfera di riflessione del tipo (B)

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \ ,$$

che taglia tutte tre le facce del prisma.

La regione del prisma esterna a questa sfera è una piramide con un vertice all'infinito e coi tre vertici al finito

$$V_1 \equiv (0, 0, 1) \ , \quad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2} \ , \ 0 \ , \ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ , \quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) .$$

Dimostreremo che questa è una *piramide fondamentale* di G_0. Per ciò basta osservare: 1.° che nessuna sfera di riflessione attraversa la piramide; 2.° che nessuna sostituzione di G_0 trasforma la piramide in sè stessa. La prima cosa risulta da ciò che nessuna sfera di riflessione può contenere nel suo interno un vertice V_1, o V_2, o V_3. E invero il raggio di una tale sfera dovrebbe essere $> \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi $= 1$; ma le sfere di raggio $= 1$ hanno i centri nei punti interi del piano $z = a_1 + i a_2$ e non attraversano il poliedro. In secondo luogo una sostituzione di G_0, che cangiasse la piramide in sè stessa, dovrebbe lasciar fisso il vertice $\zeta = \infty$

quindi anche gli altri tre, di cui lascierebbe fissa l'ordinata. Dopo queste osservazioni, il ragionamento procederà come pel gruppo modulare e si vedrà che, applicando alla piramide tutte le sostituzioui di G_0, si riempirà il semispazio positivo con altrettante piramidi equivalenti. Ne risulta: *Ogni punto del semispazio positivo è equivalente rispetto a* G_0 *ad uno e ad un solo punto della piramide fondamentale.*

Per avere il poliedro fondamentale del gruppo G, basterà p. e. associare alla piramide la sua simmetrica rispetto al piano $\xi - \eta = 0$. I punti di questo poliedro sono caratterizzati dalle disuguaglianze

$$(23) \qquad \begin{cases} 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \ , \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2} \ . \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq 1 \ . \end{cases}$$

Osservazione. — Il metodo che qui abbiamo tenuto per lo studio del gruppo G potrebbe egualmente applicarsi ai gruppi di sostituzioni lineari unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \ ,$$

nelle quali i numeri α, β, γ, δ percorrono gli interi della forma

$$a + ib\sqrt{D} \ ,$$

dove D indica un numero intero positivo ed a, b interi ordinarii [1].

§. 26.

Decomposizione di un numero nella somma di quattro quadrati.

I risultati ottenuti nel §. precedente consentono importanti applicazioni aritmetiche alla teoria delle forme quadratiche, per le quali rimandiamo al 1.° volume delle *Automorphe Functionen* del Fricke. Qui ci limiteremo a dedurne il teorema: *Ogni numero intero è la somma di quattro quadrati (interi).*

Se m è un numero intero qualunque, possiamo sempre trovare (e in diversi modi) due numeri interi r, s tali che r^2+s^2+1 sia divisibile per m,

---

[1] Cf. le memorie dell'autore nei volumi 38, 40 dei *Mathematische Annalen*.

cioè:

$$r^2 + s^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}\ ^{(1)}.$$

Consideriamo ora il punto

$$\left(\frac{r}{m}, \frac{s}{m}, \frac{1}{m}\right)$$

dello spazio e troviamo, rispetto al gruppo del §. precedente, il suo equivalente nella piramide fondamentale. Applicando le formole di Poincarè (19), (19*) col fare

$$z = \frac{r+is}{m}, \quad \rho^2 = \frac{r^2+s^2+1}{m^2},$$

vediamo subito che le coordinate del punto equivalente saranno della forma

$$\frac{r'}{m'}, \frac{s'}{m'}, \frac{1}{m'}.$$

Ma dalle diseguaglianze (23) deduciamo che si avrà

$$r' = 0, \quad s' = 0, \quad m' = 1;$$

cioè il punto $\left(\frac{r}{m}, \frac{s}{m}, \frac{1}{m}\right)$ sarà equivalente al vertice (0, 0, 1) della pi-

---

(1) Nel caso di m numero primo, si dimostra subito l'asserzione osservando che, se r percorre un sistema completo di resti (mod m), non può il numero $-(r^2+1)$ essere sempre non residuo (mod m), altrimenti per tutti i valori di r sarebbe

$$\left[-(r^2+1)\right]^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1 \pmod{m}$$

e la congruenza, che è di grado $m-1$, avrebbe m radici, ciò che è assurdo. Dal caso di un modulo primo si risale al caso di un modulo composto in modo noto.

E del resto basta dimostrare il teorema del testo per un numero primo ricordando che, per l'identità (d' Eulero)

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p+iq & r+is \\ -r+is & p-iq \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a+ib)(p+iq)+(c+id)(r+is), & (a+ib)(-r+is)+(c+id)(p-iq) \\ (a-ib)(r+is)+(-c+id)(p+iq), & (a-ib)(p-iq)+(c-id)(r-is) \end{vmatrix},$$

un prodotto di due somme di quattro quadrati è ancora la somma di quattro quadrati.

ramide fondamentale. Sia ora $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ la sostituzione che porta (0 ,0, 1) in $\left(\frac{r}{m}, \frac{s}{m}, \frac{1}{m}\right)$ La formola (19*), pag. 70, ci dà subito

$$m = \gamma\gamma_0 + \delta\delta_0 ,$$

cioè

$$m = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 ,$$

il che dimostra il teorema enunciato.

Capitolo III.

Trasformazioni di integrali doppî in integrali semplici. — Funzioni armoniche e loro proprietà fondamentali. — Problema di Dirichlet e sua risoluzione nel caso del campo circolare.

§. 27.

Integrali curvilinei. — Integrali doppî.

Riprendendo ora lo studio generale delle funzioni di variabile complessa, dobbiamo innanzi tutto far conoscere alcune formole fondamentali di trasformazioni di integrali doppî, estesi ad aree piane, in integrali semplici estesi al contorno dell'area, che ci serviranno a dimostrare le più importanti proprietà delle soluzioni dell'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ,$$

e più tardi a stabilire la nozione e le proprietà degli *integrali di funzione di variabile complessa*, il cui studio è essenziale per tutta la teoria.

Cominciamo dal ricordare alcune nozioni di calcolo integrale. Supponiamo di avere nel piano xy un'area A connessa [1], racchiusa da uno o più contorni e siano $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ due funzioni dei punti dell'area, per le quali supponiamo verificate le condizioni seguenti: *tanto la f che la φ siano finite e continue in tutta l'area e inoltre la φ ammetta derivate parziali prime $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ pure finite e continue.* Tracciamo nell'area un arco

[1] Un'area si dice connessa (o d'un solo pezzo) quando, presi due punti qualunque a, b dell'area, si può andare da a, b per linee appartenenti interamente all'area.

di curva ordinaria qualunque mn, che percorriamo da m ad n. *Che cosa intenderemo per*

$$\int_{\text{arc } mn} f\, d\varphi\,?$$

Lungo l'arco mn le coordinate x, y di un punto variabile sono funzioni di una sola variabile, per es. dell'arco s della curva, che contiamo per semplicità dall'estremo m, ed esistono le derivate $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ finite e continue. La f e la φ sono pure, lungo mn, funzioni finite e continue di s e inoltre, per le ipotesi fatte, esiste ed è finita e continua la derivata $\frac{d\varphi}{ds}$. Ciò posto, se con S indichiamo la lunghezza dell'arco totale da m ad n, intenderemo che $\int_{\text{arc } mn} f\, d\varphi$ significa l'integrale definito ordinario

$$\int_{\text{arc } mn} f\, d\varphi = \int_0^S f\, \frac{d\varphi}{ds}\, ds\,.$$

È chiaro che, se invertiamo il senso d'integrazione, l'integrale cangia segno, cioè

$$\int_{\text{arc } mn} = -\int_{\text{arc } nm}\,.$$

Ma possiamo anche dare una definizione diretta di $\int_{\text{arc } mn} f\, d\varphi$, come limite di una somma, che è un'estensione di quella degli ordinari integrali definiti. Dividiamo per ciò l'arco mn in intervalli parziali di lunghezze

$$\delta_1\,,\quad \delta_2 \ldots\ldots \delta_r\,,$$

il cui numero r faremo poi crescere all'infinito, mentre ciascuno di essi dovrà tendere a zero, e formiamo la somma

$$\sum f_i\, \Delta\varphi_i\,,$$

dove f_i è uno qualunque dei valori che f assume nell'intervallo δ_i e $\Delta\varphi_i$ l'accrescimento che subisce φ nel passare dal primo al secondo estremo di δ_i. Se facciamo impiccolire indefinitamente, con una legge qualsiasi, i singoli intervalli δ_i, ingrandendo il loro numero all'infinito, la detta somma converge verso un limite determinato, indipendente dalla legge

di divisione in intervalli e dai valori intermedii f_i scelti per la f, e questo limite coinciderà appunto coll'integrale sopra definito. La coincidenza delle due definizioni si riconosce facilmente osservando che, per una formola fondamentale di calcolo differenziale, si ha $\Delta \varphi_i = \delta_i \varphi'_i$, indicando φ'_i un *conveniente* valore intermedio della derivata $\frac{d\varphi}{ds}$ nell'intervallo δ_i, ed è quindi

$$\sum f_i \, \Delta \varphi_i = \sum \delta_i f_i \varphi'_i .$$

Ma, se indichiamo con $\overline{f}_i$ il valore di f nello stesso punto di δ_i in cui è preso il valore φ'_i, si ha

$$\lim \sum \delta_i \overline{f}_i \varphi'_i = \int_0^S f \frac{d\varphi}{ds} ds$$

e d'altra parte la differenza

$$\sum \delta_i f_i \varphi'_i - \sum \delta_i \overline{f}_i \varphi'_i = \sum \delta_i (f_i - \overline{f}_i) \varphi'_i$$

tende, come subito si vede, a zero, onde segue

$$\lim \sum \delta_i f_i \varphi'_i = \int_0^S f \frac{d\varphi}{ds} ds .$$

In particolare intendiamo il significato di integrale curvilineo $\int f dx$; ma, a scanso di equivoci, conviene bene osservare che mentre nell'integrale definito ordinario il dx è sempre positivo, qui invece sarà dx positivo o negativo secondo che $\frac{dx}{ds}$ è positivo o negativo, cioè secondo che la curva d'integrazione, nel suo verso positivo, si allontana o si avvicina nel punto considerato all'asse delle y.

Supponiamo ora che sia $F(x, y)$ una funzione finita in tutta l'area A e dividiamo l'area A in un certo numero di aree parziali

$$\sigma_1 \ , \ \sigma_2 \ldots \sigma_n ,$$

il cui numero facciamo poi crescere all'infinito, impiccolendo indefinitamente in ogni senso ciascuna area parziale (in modo cioè che preso un numero ε piccolo a piacere, da un certo punto in poi ciascuna area parziale σ_i possa essere contenuta in un cerchio di raggio ε), e costruiamo la somma

$$\sum F_i \sigma_i ,$$

indicando con F_i uno qualunque dei valori che la F ha nell'area σ_i, od anche un valore semplicemente compreso fra il limite superiore e l'inferiore di F in σ_i. Se questa somma ha un limite, indipendente dalla legge di divisione in aree parziali e dai valori F_i scelti, questo limite si dice l'*integrale d'area*

$$\int F \, d\sigma .$$

È noto che, analogamente come per gli integrali definiti semplici, perchè si verifichino tutte le condizioni ora enunciate, basta che la somma

$$\sum D_i \, \sigma_i ,$$

dove D_i sta a significare l'oscillazione della funzione F nell'area σ_i, *per una particolare legge di divisione in aree parziali, abbia per limite zero.* Allora la funzione F si dice *integrabile superficialmente* nell'area. Tutte le funzioni continue nell'area sono certo anche integrabili.

Il modo più usuale di divisione in aree parziali è quello che adopera rettangoli coi lati paralleli agli assi coordinati, conducendo all'asse delle y e delle x parallele distanti l'una dalla successiva di Δx, Δy, dove Δx, Δy possono essere costanti od anche variabili, ma debbono tendere poi *simultaneamente* a zero. Allora la somma $\sum F_i \, \sigma_i$ diventa la somma doppia

$$\sum \sum F \, \Delta x \, \Delta y ,$$

che s'intende estesa non solo a tutti i rettangoli appartenenti interamente all'area, ma anche a quelli che solo in parte vi appartengono, essendochè, per l'alterazione così prodotta nella somma, non cangia, come si dimostra, il limite. L'integrale d'area si suole scrivere per ciò anche come integrale doppio

$$\int\int F(x, y) \, dx \, dy ;$$

e quando la funzione $F(x, y)$ sia integrabile linearmente sopra ogni parallela all'asse delle x (o delle y), l'integrale stesso si potrà riguardare come risultato di due integrazioni successive e scrivere

$$(1) \qquad \int\int F(x, y) \, dx \, dy = \int dy \left(\int F(x, y) \, dx \right).$$

Quanto ai limiti delle due successive integrazioni semplici rispetto ad x ed y, è da osservarsi che, eseguendo la integrazione rispetto ad x,

la y resta fissa, cioè ci muoviamo lungo una parallela all'asse delle x, e l'integrale $\int F(x, y)\, dx$ dovrà decomporsi in tante parti (integrali definiti ordinarii) in quante parti la detta parallela risulta decomposta dai contorni dell'area.

Il risultato di questa integrazione, che è una certa funzione di y, deve poi integrarsi rispetto ad y fra i limiti estremi delle ordinate dell'area.

§. 28.

Formola di Gauss.

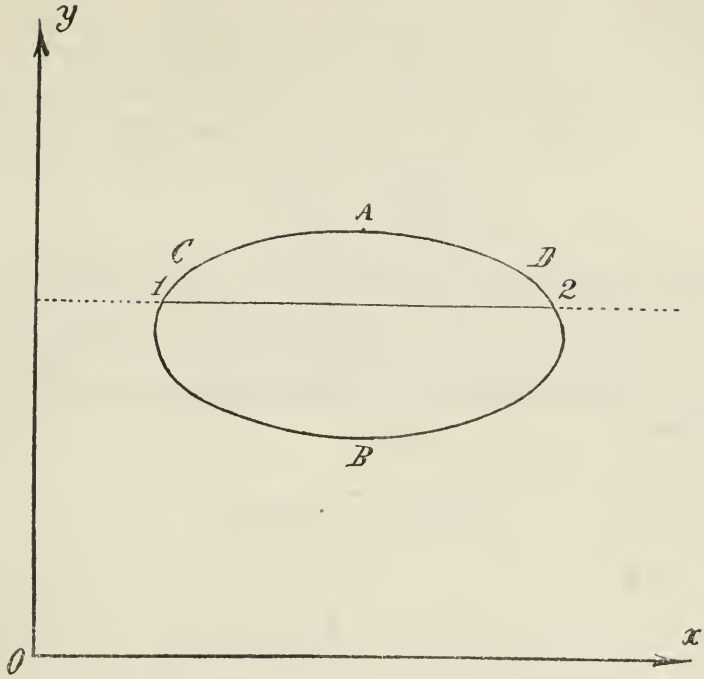
Nell'area piana connessa A, limitata da una o più curve chiuse, sia data la funzione $X(x, y)$ per la quale ammettiamo che siano soddisfatte le condizioni seguenti: la X sia in tutta l'area A, il contorno incluso, finita, continua e ad un sol valore e ammetta una derivata parziale rispetto ad x: $\frac{\partial X}{\partial x}$ finita ed atta all'integrazione superficiale e lineare nel senso dell'asse delle x. Ammettiamo poi che le curve contorno dell'area siano curve ordinarie, dotate in ogni punto di una tangente, che varia con continuità al variare del punto di contatto, o tutto al più ammettano un numero finito di punti eccezionali, ove, pure esistendo una tangente a destra ed una a sinistra, queste non coincidano fra loro (punti angolari-vertici). Prendiamo allora a trasformare l'integrale doppio

$$\int\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy\,,$$

ésteso all'area A, in un integrale semplice, esteso al contorno. Per semplificare la dimostrazione, supponiamo dapprima che il contorno di A sia formato da un'unica curva chiusa tale che tutte le parallele all'asse delle x, solcanti l'area A, incontrino il contorno in due soli punti, uno d'entrata, che indicheremo con 1, e l'altro d'uscita 2 (fig. 4.ª). Per la citata formola (1), abbiamo

$$\int_A\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy = \int dy \left(\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\right)$$

Fig. 4.ª



e l'integrale semplice $\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx$ è esteso al tratto di retta parallela all'asse y

$$Y = y\,,$$

compreso fra i due punti 1, 2, sicchè

$$\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx = X_2 - X_1\,,$$

indicando X_1, X_2 i valori di X rispettivamente nei punti 1, 2 del contorno. Avremo dunque

$$(2) \qquad \int_A \int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy = \int (X_2 - X_1)\, dy = \int X_2\, dy - \int X_1\, dy\,.$$

I due integrali del secondo membro vanno estesi fra i valori estremi $y = b$, $y = a$ delle ordinate del campo corrispondenti ai due punti B, A del contorno, nei quali la tangente è parallela all'asse delle x. Questi due punti dividono il contorno in due archi (ACB, ADB nella figura), il primo

dei quali contiene tutti i punti d'ingresso nell'area, l'altro i punti di egresso. Ora, se indichiamo con ds l'elemento (positivo) d'arco del contorno corrispondente all'incremento *positivo* dy dell'ordinata y, e con ξ denotiamo l'angolo che la normale al contorno, rivolta verso l'interno dell'area, forma colla direzione positiva dell'asse delle x, abbiamo

$$dy = \pm \cos \xi \, ds ,$$

dovendosi adottare il segno superiore ove ξ è acuto, l'inferiore ove ξ è ottuso. Ora ξ è acuto nei punti 1 d'ingresso, ottuso nei punti 2 d'egresso; possiamo quindi considerare i due integrali del secondo membro della (2) come integrali curvilinei estesi rispettivamente agli archi ADB, BCA ed abbiamo

$$\int X_1 \, dy = \int_{BCA} X \cos \xi \, ds$$

$$\int X_2 \, dy = - \int_{ADB} X \cos \xi \, ds ;$$

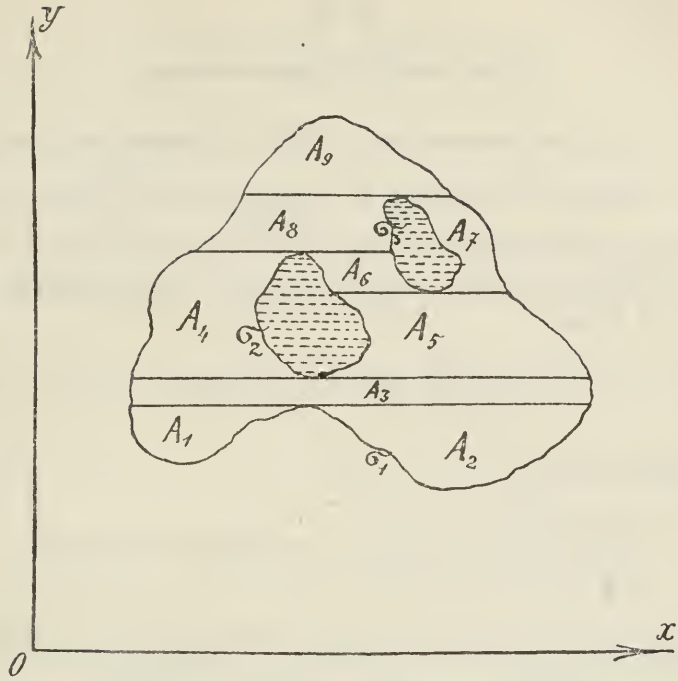
onde la (2) diventa

$$\text{(I)} \qquad \int_A \int \frac{\partial X}{\partial x} \, dx \, dy = - \int_s X \cos \xi \, ds ,$$

l'integrale del secondo membro essendo esteso al contorno completo dell'area. È bene osservare che in questa formola è affatto indifferente il senso secondo cui si percorre il contorno.

Dimostrata così la *formola fondamentale di Gauss* (I), per un'area che soddisfi alle condizioni restrittive imposte, facilmente la dimostriamo per un'area qualunque, il cui contorno offra inoltre eventualmente punti angolari. Sia dapprima un'area qualunque A, racchiusa da una o più curve σ_1, σ_2, $\sigma_3 \ldots$; potremo decomporre l'area A, coll'aggiunta di nuovi tratti di contorno, in tante aree parziali (come le aree da A_1 ad A_9 della fig. 5.ª) tali che, per ciascuna di esse, ogni parallela all'asse delle x che la solca abbia un solo punto d'entrata ed un solo punto di uscita. Per ciascuna di queste aree varrà adunque la formola (I). Pensiamo scritte tutte queste

Fig. 5.ª



formole e sommiamole, con che otteniamo nel primo membro l'integrale doppio

$$\int_A\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy\,,$$

esteso a tutta l'area A. Nel secondo membro ogni integrale $\int X \cos\xi\, ds$, esteso ad un tratto di contorno aggiunto, figura due volte con segno opposto, perchè ogni tale tratto separa due aree contigue, per le quali le normali nello stesso punto del contorno hanno verso opposto; d'altronde il contorno primitivo risulta diviso in tratti, ciascuno dei quali figura una ed una sola volta, onde otteniamo la formola (I) di Gauss, estesa ad un'area qualunque.

In ciò che precede abbiamo fatto astrazione dagli eventuali punti angolari, che può offrire il contorno. La presenza di un numero finito di tali punti non modifica però affatto i risultati, come risulta dalle proprietà elementari della integrazione, potendosi eseguire la decomposizione del campo in striscie in guisa che da ogni punto angolare parta una retta del contorno di una striscia.

§. 29.

Altre formole di trasformazione.

Sia $Y(x, y)$ una funzione di x, y finita e continua nell'area A, incluso il contorno, che ammetta la derivata parziale $\frac{\partial Y}{\partial y}$ finita ed atta all'integrazione. Indicando con η l'angolo che la normale positiva al contorno fa colla direzione positiva dell'asse y, avremo manifestamente, per la formola di Gauss;

$$\text{(I*)} \qquad \int_A\int \frac{\partial Y}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_s Y \cos\eta\, ds\,,$$

e sommando con (I):

$$\text{(II)} \qquad \int_A\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int_s (X\cos\xi + Y\cos\eta)\, ds\,.$$

In queste formole (I), (I*), (II), il senso secondo cui si percorre il contorno è, come già si è detto, del tutto indifferente.

Andiamo ora a fissare, con opportune convenzioni, il senso positivo del contorno, e potremo dare a queste formole fondamentali un diverso aspetto. Fissiamo per ciò che in ogni punto del contorno si riguardi come direzione positiva della tangente quella che giace, rispetto alla direzione positiva della normale (già fissata come volgente nell'interno dell'area), come la direzione positiva dell'asse delle x rispetto a quella dell'asse delle y. Nel modo ordinario d'orientazione degli assi, avremo dunque che per un osservatore collocato sul piano e che guardi, da un punto del contorno, verso la direzione positiva della tangente, l'area interna resterà alla sinistra. Riguarderemo allora come senso positivo del contorno quello concordante colla direzione positiva della tangente; il senso positivo di percorso sul contorno sarà per ciò quello che lascia l'area interna alla sinistra. Ne risulta che se l'area ha più contorni, uno esterno, gli altri interni, l'esterno sarà percorso nel senso positivo delle rotazioni, gli interni nel senso opposto.

Da queste convenzioni segue che, se indichiamo con

$$\frac{dx}{ds}\,,\ \frac{dy}{ds}$$

le derivate di x, y prese nel senso positivo della tangente al contorno [1] e con

$$\frac{dx}{dp}, \quad \frac{dy}{dp}$$

quelle prese nel senso della normale interna, avremo

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{dy}{dp} \\[2ex] \dfrac{dx}{dp} = -\dfrac{dy}{ds} \end{cases}.$$

E invero, indicando con t la direzione positiva della tangente, abbiamo

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\widehat{xt}), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\widehat{yt}) = \operatorname{sen}(\widehat{xt})$$

$$\frac{dx}{dp} = \cos(\widehat{xp}) = -\operatorname{sen}(\widehat{xt}), \quad \frac{dy}{dp} = \cos(\widehat{yp}) = \cos(\widehat{xt}).$$

---

[1] Ricordiamo che, se U è una funzione di x, y, finita e continua colle sue derivate parziali $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$, per derivata di U in un punto M e nella direzione segnata da una retta uscente da M, s'intende il limite del rapporto

$$\frac{U_{M'} - U_M}{\overline{MM'}},$$

che si ottiene spostando M in M' sulla retta e nel verso fissato e dividendo l'incremento subito dalla funzione U, nel passaggio da M a M', per la lunghezza MM' del tratto percorso, limite preso per il convergere di M' verso M. Se indichiamo con r la detta direzione, e con

$$\widehat{xr}, \quad \widehat{yr}$$

gli angoli (misurati nel verso positivo delle rotazioni) delle direzioni positive Ox, Oy colla r, per le derivate di x, y nella direzione di r, che indichiamo con $\frac{dx}{dr}, \frac{dy}{dr}$, abbiamo

$$\frac{dx}{dr} = \cos(\widehat{xr}), \quad \frac{dy}{dr} = \cos(\widehat{yr}).$$

Per la derivata della funzione U, nella direzione r, abbiamo poi

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dr}.$$

Ciò posto, potremo scrivere la (II) anche così:

$$\text{(II*)} \qquad \int_A\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy=-\int_s\left(X\,\frac{dx}{dp}+Y\,\frac{dy}{dp}\right)ds$$

ovvero per le (3):

$$\text{(III)} \qquad \int_A\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_s(X\,dy-Y\,dx)\,,$$

l'integrale curvilineo del secondo membro dovendo essere calcolato col percorrere il contorno nel verso positivo.

Supponiamo ora che per le funzioni X, Y, oltre all'esser soddisfatte le condizioni precedenti, sia soddisfatta in tutta l'area anche l'altra

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0\,,$$

la quale, come si sa, esprime che il binomio

$$X\,dy-Y\,dx$$

è un differenziale esatto. La formola (III), essendo nullo il primo membro, ci dà il teorema: *Se in un'area connessa* A *l'espressione*

$$X\,dy-Y\,dx$$

è un differenziale esatto, le funzioni X, Y *essendo finite e continue in tutta l'area (incluso il contorno) e possedendo derivate parziali* $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ *finite* (incluso il contorno) *ed atte all'integrazione, l'integrale del differenziale esatto* $\int_s(X\,dy-Y\,dx)$, *esteso a tutto il contorno nel verso positivo* [1], *è identicamente nullo.*

§. 30.

Ordine di connessione delle aree piane.

Per maggiore chiarezza delle considerazioni seguenti è utile che diamo alcune nozioni sulla *connessione* delle aree, limitandoci al caso semplice

---

[1] Se l'area ha un solo contorno, il senso del percorso può essere naturalmente qualunque.

delle aree piane. In un'area piana connessa consideriamo una linea L, che non intersechi sè stessa (priva di nodi), e che vada da un punto A del contorno ad un altro punto B del contorno stesso, rimanendo in tutto il suo corso nell'interno dell'area, salvo che agli estremi A, B, ed immaginiamo eseguito nel piano un *taglio* lungo questa linea L; diremo che si è eseguito nell'area un *taglio semplice*. Nella nuova area che si ottiene, la quale potrà essere connessa o no, figureranno come nuove parti del contorno i due lembi del taglio L.

Diremo *semplicemente connessa* un'area piana quando qualunque taglio semplice, in essa eseguito, toglie la connessione dell'area. Se invece possono eseguirsi dei tagli senza rompere la connessione dell'area, diremo che l'area possiede una connessione multipla e l'*ordine* della connessione si valuterà per mezzo delle considerazioni seguenti.

È chiaro che in qualunque area piana con un contorno unico non si può eseguire alcun taglio senza rompere la connessione, e perciò una tale area è semplicemente connessa.

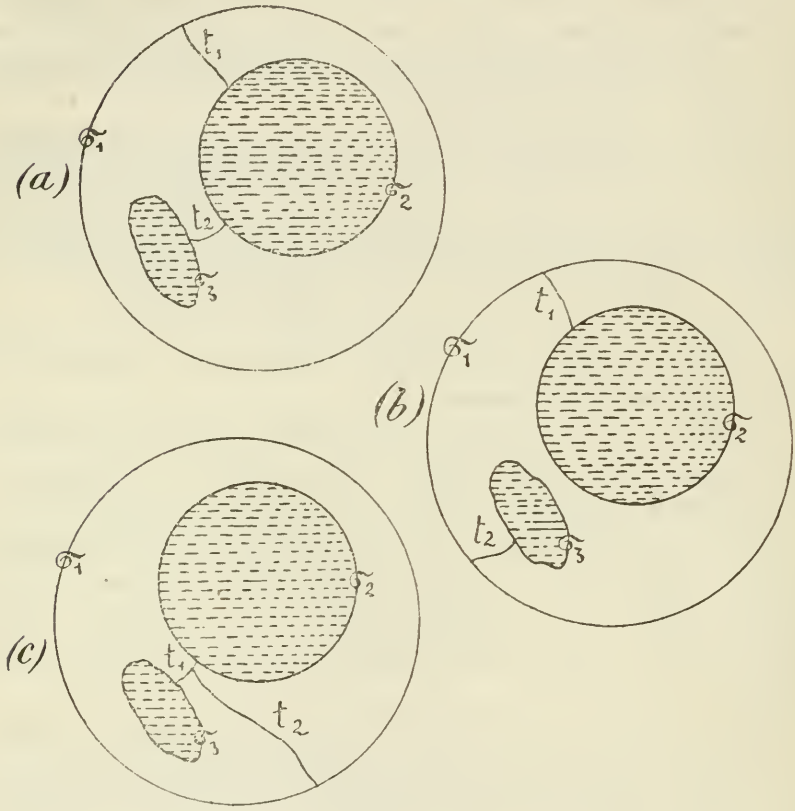
L'inversa è pur vera, giacchè se del contorno fanno parte due diverse curve chiuse a, b, un taglio eseguito da un punto di a ad un punto di b non toglie la connessione. E invero i due lembi del taglio t si congiungono colle curve chiuse a, b in un unico nuovo contorno, seguendo il quale si può andare da un punto dell'un lembo di t al punto opposto sull'altro lembo. Per ciò, eseguito il taglio t, non viene tolta la connessione fra le due regioni dell'area aderenti ai lembi di t; vediamo adunque che:

Ogni area piana a contorno unico è semplicemente connessa e viceversa; ed inoltre: *in un'area pluriconnessa ogni taglio che abbia gli estremi su due contorni diversi non toglie la connessione e fa diminuire di uno il numero dei contorni.*

Ciò premesso, abbiasi un'area piana connessa, il cui contorno sia formato da n curve chiuse distinte $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$. Se eseguiamo nell'area un taglio, p. e. da σ_1 a σ_2, l'area nuova è ancora connessa ed ha $n-1$ contorni. In questa nuova area eseguiamo un secondo taglio fra due punti di contorni diversi e così di seguito. Dopo $n-1$ tagli, la superficie che si ottiene avrà un solo contorno e sarà quindi semplicemente connessa. Dunque: *Un'area piana connessa con n contorni si può ridurre con $n-1$ tagli, che non ne rompano la connessione, semplicemente connessa.* Una tale area si dice per ciò n volte connessa o *di ordine n di connessione*, valutando come 1 l'ordine di connessione per le aree semplicemente connesse.

È chiaro che agli $n-1$ tagli, che rendono l'area semplicemente connessa, si potranno dare disposizioni diverse. Così, per l'area triplamente

Fig. 6.ª



connessa della figura, si potrà dare ai tagli t_1, t_2 la disposizione *a)*, o la *b)*, o la *c)*.

Osserviamo poi che, descrivendo in un'area semplicemente connessa una curva chiusa σ priva di nodi, questa forma da sè stessa il contorno completo di un'area parziale (semplicemente connessa). Invece per le aree pluriconnesse, se descriviamo una curva chiusa σ avvolgente uno o più contorni interni, la curva σ non limita più, da sè sola, una regione dell'area.

§. 31.

Integrali di differenziali esatti.

Premesse queste brevi nozioni, ritorniamo al teorema alla fine del §. 29. Se l'area A, in cui è dato il differenziale esatto

$$X\,dy - Y\,dx\,,$$

è semplicemente connessa, e descriviamo una curva σ chiusa *che dapprima non intersechi sè stessa*, la σ formerà il contorno completo di un'area parziale A′ e si avrà perciò: $\int_\sigma (X\,dy - Y\,dx) = 0$.

È facile vedere che il medesimo risultato vale anche se la curva chiusa σ interseca, quante volte si vuole, sè stessa. E infatti seguiamo la curva chiusa σ che parte da un punto M e vi ritorna, comunque intrecciandosi, e sia K il primo punto ove interseca sè stessa; arrivati da M in K verremo a descrivere, muovendoci sopra σ, a partire da K, una parte chiusa σ_1 di σ che non si interseca, e sarà dunque di per sè:

$$\int_{\sigma_1} (X\,dy - Y\,dx) = 0\,.$$

Possiamo dunque sopprimere questa parte e procedere sulla rimanente nel medesimo modo. Si ha quindi il teorema: *Nell'interno di un'area semplicemente connessa se si eseguisce lungo una curva chiusa σ, comunque intrecciata, l'integrale*

$$\int_\sigma (X\,dy - Y\,dx)$$

di un differenziale esatto (pel quale si suppongono soddisfatte le condizioni della fine del §. 29), il risultato sarà sempre identicamente nullo.

Consideriamo ora invece una linea aperta acb, che nell'area semplicemente connessa A vada da un punto a ad un punto b, comunque intrecciandosi; facilmente vediamo che l'integrale

$$\int_{acb} (X\,dy - Y\,dx)$$

del nostro differenziale esatto dipende unicamente dai due punti estremi

a, b del cammino d'integrazione. Consideriamo infatti un altro cammino d'integrazione $ac'b$, che riunisca i medesimi estremi e sia comunque foggiato. Percorrendo prima acb poi il cammino $bc'a$, rovesciato di $ac'b$, abbiamo una curva chiusa σ e perciò

$$\int_{acb} (X\,dy - Y\,dx) + \int_{bc'a} (X\,dy - Y\,dx) = 0\,,$$

cioè:

$$\int_{acb} (X\,dy - Y\,dx) = \int_{ac'b} (X\,dy - Y\,dx)\,,$$

il che appunto si voleva provare. Poichè adunque l'integrale di $X\,dy - Y\,dx$, esteso ad un cammino che vada da a in b, dipende solo dagli estremi, potremo indicarlo senza ambiguità con

$$\int_a^b (X\,dy - Y\,dx)\,,$$

ovvero anche con

$$\int_{(x_1,\,y_1)}^{(x_2,\,y_2)} (X\,dy - Y\,dx)\,,$$

ponendo in evidenza le coordinate x_1, y_1; x_2, y_2 dei due estremi a, b.

Pensiamo ora fisso il primo estremo (x_1, y_1) e mobile il secondo, le cui coordinate indicheremo con x, y. L'integrale

$$\psi(x, y) = \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (X\,dy - Y\,dx)$$

sarà una funzione di x, y ad un sol valore, finita e continua in tutta l'area, come subito si vede. Inoltre ammetterà le derivate parziali prime $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ pure finite e continue e date da

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -Y\,, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = X\,,$$

sicchè il differenziale totale $d\psi$ sarà appunto $d\psi = X\,dy - Y\,dx$.

E invero abbiamo

$$\psi(x+\Delta x, y) - \psi(x, y) = \int_{x,y}^{x+\Delta x, y} (X\, dy - Y\, dx)$$

e possiamo seguire, per andare da x, y a $x+\Delta x, y$, il cammino parallelo all'asse x, almeno quando Δx sia già sufficientemente piccolo. Avremo allora $dy = 0$ e

$$\psi(x+\Delta x, y) - \psi(x, y) = -\int_{x}^{x+\Delta x} Y(x, y)\, dx\,,$$

onde, indicando con $\overline{Y}$ un valore di Y intermedio nel tratto, sarà

$$\frac{\psi(x+\Delta x, y) - \psi(x, y)}{\Delta x} = -\overline{Y}$$

e, passando al limite per $\Delta x = 0$, otterremo, a causa della continuità di Y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -Y(x, y)$$

e similmente

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = X(x, y)\,.$$

Se l'area in cui si considera il differenziale esatto è più volte connessa, i risultati precedenti subiscono una modificazione, che è facile riconoscere. Nell'area n volte connessa eseguiamo per ciò $n-1$ tagli t_1, $t_2, \ldots$ t_{n-1} sì da renderla un'area A′ semplicemente connessa e, per fissare le idee, supponiamo che i tagli t non si intersechino fra loro, ma p. e. riuniscano il contorno esterno σ_1 ai rispettivi contorni interni $\sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_n$. Nell'area tagliata A′ l'integrale

$$\psi(x, y) = \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} (X\, dy - Y\, dx)$$

è una funzione ad un solo valore. Se confrontiamo i valori di ψ in due punti opposti m, m' sui due lembi di un medesimo taglio t, valori che indichiamo con

$$\psi_m\,, \quad \psi_{m'}\,,$$

vediamo che la differenza

$$\psi_m - \psi_{m'}$$

è costante lungo tutto il taglio. E invero, se n, n' sono due altri punti di fronte sui lembi di t, si ha

$$\psi_m - \psi_n = \int_n^m (X\,dy - Y\,dx),$$

$$\psi_{m'} - \psi_{n'} = \int_{n'}^{m'} (X\,dy - Y\,dx)\,;$$

questi due integrali $\int_n^m$, $\int_{n'}^{m'}$ possono calcolarsi lungo i lembi del taglio ed è perciò

$$\int_n^m = \int_{n'}^{m'},$$

cioè

$$\psi_m - \psi_n = \psi_{m'} - \psi_{n'},$$

ossia

$$\psi_m - \psi_{m'} = \psi_n - \psi_{n'} \quad \text{c. d. d.}$$

Questa differenza costante che passa tra i valori di ψ ai due lembi di t dicesi la *costante* o il *modulo di periodicità* relativo al taglio t. Esso è eguale all'integrale $\int (X\,dy - Y\,dx)$, esteso ad una curva chiusa che in A' vada da un punto di t all'opposto traversando una sola volta t [1]. Corrispondentemente agli $n-1$ tagli, avremo $n-1$ moduli di periodicità

$$\omega_1\,,\ \omega_2\,,\ \ldots\ \omega_{n-1}\,.$$

Vediamo ora quello che accade considerando l'area primitiva A e lasciandovi muovere liberamente il cammino d'integrazione. Ogni qualvolta il cammino attraversa un taglio, p. e. da m ad m', il suo valore, confrontato con quello che avrebbe in m' se per andare da m in m' non si fossero attraversati tagli, cresce o diminuisce del corrispondente modulo di periodicità ω, secondo il senso dell'attraversamento. Se ne conclude che, se in un punto (x, y) si ottiene il valore ψ per l'integrale, seguendo un certo cammino, variando comunque il cammino si otterranno valori tutti della forma

$$\psi' = \psi + r_1\,\omega_1 + r_2\,\omega_2 + \ldots + r_{n-1}\,\omega_{n-1}\,,$$

---

[1] Se un taglio t viene attraversato da tagli successivi, ne risulterà diviso in tante parti, a ciascuna delle quali apparterrà un proprio modulo di periodicità.

dove le r sono numeri interi positivi o negativi. Aggiungiamo che, variando convenientemente il cammino, si possono fare acquistare ai numeri r_i valori affatto arbitrarii.

In generale adunque, in un'area più volte connessa, l'integrale di un differenziale esatto ha infiniti valori, tutti differenti fra loro per multipli interi di periodi $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$. Se questi periodi sono fra loro indipendenti, nel senso del §. 15, e sono in numero > 1, l'integrale avrà in ogni punto infiniti valori vicini fra loro quanto si vuole. Naturalmente però può accadere che, nonostante la connessione multipla, l'integrale $\psi(x, y)$ sia ancora una funzione ad un sol valore; ciò accadrà quando i moduli di periodicità siano tutti nulli.

Osserviamo in fine, che cangiando il sistema di tagli, cangeranno anche i moduli di periodicità, che diventeranno

$$\omega'_1, \ \omega'_2, \ldots \omega'_{n-1};$$

ma questi dovranno essere combinazioni lineari a coefficienti interi di

$$\omega_1, \ \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$$

ed inversamente, onde segue che il determinante della corrispondente sostituzione lineare sarà l'unità.

§. 32.

Nuove formole di trasformazione — Formola di Green.

Indichiamo con U, V due funzioni finite e continue nell'area A (incluso il contorno) che soddisfino inoltre alle condizioni seguenti, sempre beninteso il contorno incluso: 1.° U possegga derivate parziali del primo ordine, finite ed atte all'integrazione in A, 2.° la V possegga derivate parziali del primo ordine finite e continue e inoltre derivate parziali del secondo ordine finite ed atte all'integrazione. Se poniamo allora

$$X = U \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = U \frac{\partial V}{\partial y},$$

saranno soddisfatte le condizioni del §. 27, sotto le quali vale la formola (II*)

$$\int_A\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int_S \left(X \frac{dx}{dp} + Y \frac{dy}{dp}\right) ds.$$

Questa, per le sostituzioni precedenti, diventa

$$\text{(IV)} \quad \int_A\int U\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right\} dx\,dy+\int_A\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= -\int_s U\frac{\partial V}{\partial p}\,ds\,,$$

che, adottando i simboli

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,,$$

$$\nabla(U, V) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\,,$$

si scriverà anche

$$\text{(IV*)} \quad \int_A\int U\,\Delta_2 V\,dx\,dy+\int_A\int \nabla(U, V)\,dx\,dy = -\int_s U\frac{\partial V}{\partial p}\,ds\,.$$

Ponendo in questa, come è lecito, $U = 1$, otteniamo la formola notevole

$$\text{(V)} \qquad \int_A\int \Delta_2 V\,dx\,dy = -\int_s \frac{\partial V}{\partial p}\,ds\,,$$

onde risulta in particolare il teorema: *Se la funzione* $V(x, y)$ *è nell'area* A, *incluso il contorno, finita e continua insieme alle derivate parziali prime, e possiede derivate seconde finite ed atte all'integrazione che soddisfano all'equazione* $\Delta_2 V = 0$, *sarà nullo l'integrale esteso al contorno dell'area della derivata della* V *rispetto alla normale al contorno.*

Si aggiunga che, se l'area è semplicemente connessa, e σ una curva chiusa qualunque nell'area, sarà sempre

$$\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial p}\,d\sigma = 0\,.$$

Viceversa si vede subito dalla (V) che se, per una funzione V, l'integrale precedente esteso a qualunque curva chiusa σ è nullo, la V soddisferà in tutta l'area all'equazione

$$\Delta_2 V = 0\,,$$

supposto naturalmente che la V sia finita e continua nell'area colle de-

rivate parziali prime e possegga non solo derivate seconde finite ed atte all'integrazione, ma anche tali che almeno la somma $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ sia continua.

Supposto nuovamente che V soddisfi a tutte le condizioni del teorema precedente, facciamo nella (IV*) $U = V$, con che le condizioni imposte ad U saranno a più forte ragione soddisfatte, e otterremo la formola importante:

$$\text{(VI)} \qquad \int_A \int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = - \int_s V \frac{\partial V}{\partial p}\, ds\,.$$

Questa formola, giova ripeterlo, vale per ogni soluzione dell'equazione

$$\Delta_2 V = 0\,,$$

che nell'area A, incluso il contorno, sia finita e continua insieme alle derivate prime e possegga derivate seconde finite ed atte all'integrazione.

In fine deduciamo dalla (IV*) una nuova formola, detta *formola di Green*, scambiando in essa U, V e sottraendo le due formole, il che dà:

$$\text{(VII)} \qquad \int_A \int (U\,\Delta_2 V - V\,\Delta_2 U)\, dx\, dy = \int_s \left(V \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial V}{\partial p} \right) ds\,.$$

Per la validità di questa formola occorre naturalmente che anche per U si verifichino le condizioni già enunciate per V, fino alle derivate seconde. In particolare se U, V, oltre al soddisfare queste condizioni, saranno soluzioni dell'equazione $\Delta_2 = 0$, avremo

$$\text{(VIII)} \qquad \int_s \left(V \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial V}{\partial p} \right) ds = 0\,.$$

§. 33.

Funzioni armoniche con derivate regolari al contorno.

Applicheremo le formole precedenti alla ricerca delle proprietà fondamentali delle soluzioni dell'equazione

$$\Delta_2 U = 0\,;$$

ma, per brevità di linguaggio, introdurremo le seguenti denominazioni.

Se in un'area A la funzione U è ad un sol valore, finita e continua, incluso il contorno, e *nell'interno dell'area* possiede derivate prime, finite e continue, e derivate seconde finite ed atte all'integrazione, legate dalla relazione

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

diremo che la U è una funzione *armonica* nell'area. Quando le condizioni per le derivate sono soddisfatte non solo all'interno ma anche sul contorno, diremo che la U possiede derivate regolari anche al contorno. Le formole (VI), (VIII) del §. precedente saranno appunto applicabili nel caso di funzioni U, V armoniche nell'area, con derivate regolari al contorno.

Supponiamo che una funzione armonica V in un'area A, con derivate regolari al contorno, sia nulla su tutto il contorno dell'area. Applicando la (VI), coll'osservare che l'integrale del secondo membro è nullo, ne deduciamo

$$\int_A\int \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = 0,$$

onde segue che sarà in tutta l'area

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

e però V costante in tutta l'area. Ma, essendo V nulla al contorno, avremo a causa della continuità:

$$V = 0$$

in tutta l'area. Segue di qui l'importante teorema: *Due funzioni* V_1, V_2 *armoniche in un'area, con derivate regolari sul contorno, che coincidono sul contorno coincidono anche nell'interno.* E invero la differenza $V_1 - V_2$ è una funzione armonica nulla al contorno, e però nulla anche nell'interno.

Fra breve estenderemo questo teorema, togliendo la condizione delle derivate regolari al contorno.

Il risultato precedente può enunciarsi sotto altra forma dicendo: *I valori di una funzione armonica in un'area, con derivate regolari al contorno, sono pienamente determinati nell'interno, quando siano fissati i valori della funzione al contorno.*

Nasce quindi il problema di esprimere, per una tale funzione armonica, i valori nell'interno per mezzo dei valori sul contorno. Per preparare le formole a tale oggetto, premettiamo le osservazioni seguenti. Sia $M' \equiv (x', y')$ un punto fisso del piano e $M \equiv (x, y)$ un punto variabile; indichiamo con r la distanza, contata positivamente, del punto variabile dal punto fisso:

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}\,.$$

Se poniamo

$$V = \log r\,,$$

intendendo il logaritmo preso nel senso aritmetico, in qualunque area piana, che non contenga il punto M', sarà $V = \log r$ una funzione armonica con derivate regolari al contorno, come si verifica immediatamente [1].

Ciò premesso, consideriamo una funzione armonica U in un'area A, con derivate regolari al contorno, e proponiamoci di calcolarne il valore U' in un punto $M' \equiv (x'\, y')$ interno all'area. Fatto centro in M' descriviamo, internamente all'area, un cerchio di raggio ρ, che faremo poi impiccolire indefinitamente e il cui contorno indichiamo con σ. Se togliamo dall'area A questo disco circolare, otteniamo un'area A', il cui contorno si compone del contorno primitivo s e della periferia σ del cerchio. In questa area A' le due funzioni

$$U\ ,\quad V = \log r$$

sono armoniche ed hanno derivate regolari al contorno. Potremo quindi applicare la formola (VIII) di Green ed avremo

$$\int_s \left(\log r\, \frac{\partial U}{\partial p} - U\, \frac{\partial \log r}{\partial p}\right) ds + \int_\sigma \left(\log r\, \frac{\partial U}{\partial p} - U\, \frac{\partial \log r}{\partial p}\right) d\sigma = 0\,.$$

Ma nell'ultimo integrale il primo termine è identicamente nullo, perchè durante l'integrazione $\log r$ è costante $= \log \rho$ e, per una proprietà delle funzioni armoniche osservata al §. 32:

$$\int_\sigma \frac{\partial U}{\partial p}\, d\sigma = 0 \text{ [2]}\ ;$$

---

[1] Posto $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$ la funzione V è la parte reale di $\log(z - z')$.

[2] Propriamente qui la derivata $\frac{\partial U}{\partial p}$ è presa secondo la normale esterna a σ, ma non differisce che per il segno dalla derivata secondo la normale interna.

resta quindi

$$\int_s \left(\log r \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial \log r}{\partial p} \right) ds = \int_\sigma U \frac{\partial \log r}{\partial p} d\sigma .$$

Nel secondo membro la derivata $\frac{\partial \log r}{\partial p}$ è presa nel senso crescente dei raggi vettori, rispetto al punto fisso M′, e il suo valore sul contorno σ è dato da

$$\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} \right)_\sigma = \frac{1}{\rho} .$$

D'altronde, indicando con θ l'anomalia di un punto variabile sopra σ, abbiamo

$$d\sigma = \rho \, d\theta$$

e quindi la formola precedente può scriversi

$$\int_s \left(\log r \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial \log r}{\partial p} \right) ds = \int_0^{2\pi} U_\sigma \, d\theta , \tag{4}$$

intendendo che U_σ denotino i valori di U sulla periferia σ. La formola (4) vale comunque piccolo si prenda il raggio ρ del cerchio; ma notiamo che il primo membro è evidentemente indipendente da ρ, e tale dovrà quindi essere anche il secondo membro. Per calcolarne il valore osserviamo che, essendo U′ il valore di U nel centro, possiamo scrivere

$$\int_0^{2\pi} U_\sigma \, d\theta = 2\pi U' + \int_0^{2\pi} (U_\sigma - U') \, d\theta . \tag{5}$$

Facendo impiccolire il raggio ρ del cerchio, possiamo rendere, a causa della continuità di U in M′, piccolo quanto si vuole il valore assoluto di $U_\sigma - U'$ su tutta la periferia σ e però anche quello dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} (U_\sigma - U') \, d\theta .$$

Se ne conclude che questo integrale, essendo indipendente per la (4) da ρ, è necessariamente nullo, onde risulta

$$\int_0^{2\pi} U_\sigma \, d\theta = 2\pi U' . \tag{6}$$

UNIVERSITY OF TORONTO

Dopo di ciò la formola (4) diventa:

$$\text{(IX)} \qquad U' = U(x', y') = \frac{1}{2\pi} \int_s \left(\log r \, \frac{\partial U}{\partial p} - U \, \frac{\partial \log r}{\partial p} \right) ds .$$

§. 34.

Funzione di Green.

La (IX) ci dà i valori di U nell'interno, espressi per i valori che prendono sul contorno la funzione U *e la sua derivata normale* $\frac{\partial U}{\partial p}$. Come si vede, lo scopo che ci eravamo proposti non è del tutto raggiunto, ma restano ancora da eliminare, se è possibile, dalla (IX) i valori al contorno di $\frac{\partial U}{\partial p}$. Ciò si potrà fare, come ora ci proponiamo di mostrare, quando si sappia risolvere il problema che ci occupa in un certo caso particolare. Si indichi con φ una funzione armonica in tutta l'area, con derivate regolari al contorno; si avrà per la (VIII):

$$\int_s \left(\varphi \, \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) ds = 0$$

e la (IX) potrà scriversi anche:

$$U' = \frac{1}{2\pi} \int_s \left\{ (\varphi + \log r) \, \frac{\partial U}{\partial p} - U \, \frac{\partial (\log r + \varphi)}{\partial p} \right\} ds .$$

Se la funzione armonica φ è dunque tale che si abbia su tutto il contorno dell'area

$$(\varphi + \log r)_s = 0 ,$$

resterà

$$\text{(X)} \qquad U' = -\frac{1}{2\pi} \int_s U \, \frac{\partial (\log r + \varphi)}{\partial p} \, ds ,$$

formola che risolve il problema proposto. Una tale funzione φ, se esiste, è unica pei teoremi sopra dimostrati; essa dicesi la *funzione di Green* relativa al punto M'. Le condizioni che la determinano sono: *1.° di essere una funzione armonica nell'area, con derivate regolari al contorno*

2.° di assumere sul contorno i valori $-\log r$, *essendo* r *la distanza di un punto mobile sul contorno da un punto fisso* M′ *nell'interno.*

Quando per tutti i punti dell'area A esista e si sappia determinare la funzione di Green, la formola (X) serve a calcolare i valori nell'interno di ogni funzione U armonica, con derivate regolari al contorno, per mezzo dei valori U_s al contorno.

Un caso semplice, in cui riesce subito la determinazione della funzione di Green, è quello di un'area circolare. Se il punto M′ è nel centro, la funzione di Green si riduce alla costante $-\log R$ (R raggio). Quando M′ non è nel centro si consideri il suo coniugato armonico M″, che è esterno al cerchio, e si indichi con r' la distanza di un punto mobile da M″. Il rapporto

$$\frac{r}{r'}$$

è una costante k lungo la periferia del cerchio e la funzione di Green sarà data da

$$\varphi = -\log r' - \log k.$$

In vero essa è armonica con derivate regolari anche sul contorno, giacchè il punto M″ da cui sono contate le distanze r' è esterno; di più sulla circonferenza si riduce a $-\log r$.

§. 35.

Massimi e minimi delle funzioni armoniche.

Togliendo ora le condizioni relative alle derivate al contorno, supporremo soltanto che la funzione U sia armonica nell'area A che si considera e cominceremo dal dimostrare il teorema: *In ogni disco circolare, tutto interno all'area, il valore che la funzione armonica* U *ha nel centro è la media dei valori che la funzione stessa assume sul contorno del disco.*

In un tale disco la funzione armonica U ha derivate regolari sul contorno e possiamo applicare la formola (IX), situando il punto M′ nel centro. Ma sul contorno del disco $\log r$ è costante, onde, come già sopra si è osservato, il primo integrale nel secondo membro della (IX) è nullo; e poichè inoltre

$$\left(\frac{\partial \log r}{\partial p}\right) = -\frac{1}{R},$$

essendo R il raggio del cerchio, otteniamo

$$U' = \frac{1}{2\pi R}\int_s U_s\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_s\, d\theta\,,$$

il che dimostra il teorema [1].

La funzione U essendo continua in tutta l'area A, incluso il contorno, avrà ivi un massimo M ed un minimo m e vi sarà almeno un punto nell'interno, o sul contorno, nel quale assumerà effettivamente il valore massimo M ed uno almeno nel quale assumerà il valore minimo m. Ora dimostriamo che: *Il massimo ed il minimo di una funzione armonica, non costante, non possono mai aver luogo nell'interno dell'area e sono quindi presi dalla funzione sul contorno dell'area.*

---

[1] Si può osservare che la notevole proprietà espressa da questo teorema è *caratteristica* delle funzioni armoniche e propriamente sussiste la proposizione seguente: *Se una funzione* $U(x, y)$ *è finita e continua, insieme alle derivate parziali prime in un'area* A, *dove ammette derivate seconde finite ed atte alla integrazione e continue almeno nella somma* $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, *e di più gode della proprietà di assumere nel centro di ogni disco circolare* C, *tutto interno all'area, la media dei valori che ha sul contorno del disco, si avrà necessariamente in tutta l'area* $\Delta_2 U = 0$.

Si consideri infatti un tale disco circolare C di raggio R, il cui contorno indichiamo con σ e sia U' il valore della funzione nel centro; avremo per ipotesi:

$$U' = \frac{1}{2\pi R}\int_\sigma U_\sigma\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_\sigma\, d\theta\,.$$

Descriviamo un circolo C_1, di contorno σ_1, concentrico ed interno a C, il cui raggio indichiamo con $R-h$, essendo h una quantità positiva piccola ad arbitrio; avremo ancora

$$U' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_{\sigma_1}\, d\theta\,,$$

onde

$$\int_0^{2\pi} (U_\sigma - U_{\sigma_1})\, d\theta = 0\,.$$

Dividendo per h e passando al limite per $h=0$, coll'osservare che la U possiede derivate prime continue, ne deduciamo $\int_\sigma \frac{\partial U}{\partial p}\, d\sigma = 0$, dopo di che, dalla formola (5), §. 32, discende subito la verità della proposizione enunciata.

Suppongasi al contrario che in un punto P *interno* al campo la U assuma il valore massimo M (od il minimo m). Descriviamo col centro in P un disco circolare tutto interno all'area. Il valore M (ovvero m) che ha luogo nel centro è, pel teorema sopra dimostrato, la media dei valori sulla periferia e poichè tutti questi valori sono $\leqq$ M (ovvero $\geqq m$), se ne conclude che dovrà sempre verificarsi il segno d'uguaglianza [1], cioè su tutta la periferia, e però anche nell'interno del disco, la funzione U sarà costante ed eguale al valore massimo M (o al minimo m). Ma allora è facile vedere che in qualunque punto Q interno all'area la U sarà sempre eguale a M (o ad m). E infatti congiungiamo P con Q, mediante una linea L *tutta interna* all'area, e prendiamo un cerchio di raggio r così piccolo che ovunque si ponga il centro del disco sulla linea L, il disco rimanga tutto interno all'area [2].

Potremo descrivere un numero finito di questi dischi, di cui il primo e l'ultimo abbiano i centri rispettivamente in P, Q e ciascuno abbia il centro entro al precedente. Applicando successivamente il risultato ora ottenuto, vediamo che nel primo disco la U è sempre eguale a M e quindi, avendo il valore M nel centro del secondo disco, serba in tutto il secondo disco il medesimo valore M, medesimamente pel terzo, quarto ecc. onde avrà il valore M anche nel punto finale Q, c. d. d.

Dal teorema fondamentale così dimostrato risulta: *Se con* M, m *si indicano il massimo ed il minimo valore che una funzione armonica assume sul contorno dell'area, questi saranno pure il massimo ed il minimo della funzione in tutta l'area, ed anzi ogni valore nell'interno sarà compreso fra* M *e* m, *gli estremi esclusi.*

---

[1] La formola

$$U' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_s \, d\theta ,$$

applicata al nostro disco, può scriversi infatti

$$\int_0^{2\pi} (M - U_s) \, d\theta = 0$$

e poichè la differenza $M - U_s$ è sempre positiva o nulla, se ne conclude che dovrà sempre esser nulla.

[2] Basta prendere r più piccolo della minima distanza dei punti di L dal contorno dell'area.

§. 36.

Problema di Dirichlet.

Le proprietà ora dimostrate per le funzioni armoniche conducono ad estendere i teoremi d'unicità del §. 33, togliendo le condizioni per le derivate al contorno. E infatti supponiamo che una funzione U armonica in un'area sia costante sul contorno; allora il massimo ed il minimo al contorno coincidono in quest'unico valore e però la funzione assumerà in tutto l'interno dell'area il medesimo valore costante.

Ne risulta quindi il teorema: *Due funzioni armoniche in un'area, che coincidono sul contorno, coincidono anche nell'interno dell'area.*

In altre parole: i valori che una funzione armonica ha sul contorno di un'area determinano univocamente i valori della funzione nell'interno. Di qui nasce la questione se tali valori al contorno possano darsi arbitrariamente. Enunciamo sotto forma più precisa la questione, che costituisce il così detto *problema di Dirichlet*, così:

Sul contorno di un'area piana connessa sono assegnati valori arbitrarii, costituenti per ciascuna curva del contorno una catena finita e continua di valori. Si domanda di costruire una funzione armonica nell'area che sul contorno assuma i valori assegnati.

Riemann dimostrò che il problema di Dirichlet ammette sempre una soluzione [1] e questo risultato pose a fondamento della sua *Teoria delle funzioni Abeliane* [2].

Ma la dimostrazione data da Riemann, che parte da considerazioni di minimo di integrali doppî, manca di rigore, come Weierstrass osservò, in un punto fondamentale. Soltanto una lunga serie di ricerche posteriori, dovute principalmente a Neumann ed a Schwarz, ha posto fuori di dubbio che, almeno sotto certe limitazioni rispetto alla natura del campo, si possono effettivamente dare ad arbitrio i valori di una funzione armonica sul contorno dell'area e così l'intera teoria, edificata da Riemann, ha acquistato solide fondamenta.

Noi non possiamo qui addentrarci nello studio del problema generale di Dirichlet e solo ci limiteremo a risolverlo nel caso di un campo circolare, caso che riesce relativamente facile. Potremmo servirci a tale

---

[1] Che la soluzione, se esiste, debba essere unica si è già sopra dimostrato.

[2] Riemann's Werke. *Theorie der Abel'schen Functionen*, §. 3.

scopo della funzione di Green, di cui al §. precedente abbiamo già dimostrata l'esistenza e trovata l'espressione per l'area circolare; ma preferiamo esporre un altro metodo, dovuto a Neumann, i cui principii hanno il vantaggio di applicarsi a casi molto più estesi.

§. 37.

Formole di Gauss relative all'integrale $\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\, ds$.

Supponiamo dapprima un'area qualunque A ed, indicando con r la distanza di un punto mobile da un punto M' *fisso nell'interno,* proponiamoci di calcolare il valore dell'integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\, ds\,,$$

esteso al contorno dell'area. Basta per ciò fare nella formola (IX) §. 38, che vale per ogni funzione armonica U con derivate regolari al contorno,

$$U = 1\,.$$

Ne deduciamo la formola di Gauss

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = 1\,. \tag{7}$$

Supponiamo ora invece che il punto M', da cui si contano le distanze r, sia *esterno* all'area. Allora $\log\left(\frac{1}{r}\right)$ è una funzione armonica nell'area, con derivate regolari al contorno, e si ha per ciò

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = 0\,. \tag{8}$$

Prima di procedere alla deduzione di una terza formola importante per il seguito, osserviamo un significato geometrico semplice della funzione $\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial p}$ al contorno. Per ciò dalla formola

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

deduciamo

$$r\frac{\partial r}{\partial p} = (x - x')\frac{\partial x}{\partial p} + (y - y')\frac{\partial y}{\partial p},$$

indi

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \frac{1}{r}\left\{\frac{x' - x}{r}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{y' - y}{r}\frac{\partial y}{\partial p}\right\}.$$

La quantità fra parentesi è il coseno dell'angolo che la direzione M M′, nel verso dal punto mobile al punto fisso, fa colla direzione della normale interna; indicando quest'angolo con $\widehat{rp}$, abbiamo dunque:

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \frac{\cos(\widehat{rp})}{r}. \tag{9}$$

Se pel punto M del contorno e tangenzialmente a questo si conduce il circolo che passa per M′ e se ne indica con R il raggio, si avrà

$$\frac{\cos(\widehat{rp})}{r} = \pm\frac{1}{2R},$$

secondo che l'angolo $\widehat{rp}$ è acuto od ottuso.

Ciò premesso, domandiamo quale valore avrà il solito integrale $\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds$ quando il punto M_0, da cui si contano le distanze che ora indicheremo con r_0, si trovi sul contorno. In primo luogo si osservi che la formola (9) ci dà

$$\frac{\partial \log\frac{1}{r_0}}{\partial p} = \frac{\cos(\widehat{r_0 p})}{r_0},$$

e la funzione da integrarsi lungo il contorno è ancora dappertutto finita e continua salvo ai punti angolari del contorno, dove avrà discontinuità di prima specie e salvo inoltre *eventualmente* al punto M_0, ove potrà presentarsi qualche singolarità, se in M_0 la curva non ha circolo osculatore.

In ogni caso il nostro integrale $\int_s \frac{\partial \log\frac{1}{r_0}}{\partial p} ds$ potrà essere calcolato come limite dell'integrale esteso a tutto il contorno, asportato un pic-

colo intorno di M_0. Supponiamo, per maggiore generalità, che il punto M_0 sia un punto angolare del contorno e le tangenti a destra e sinistra formino l'angolo $\alpha\pi$, sicchè sarà $\alpha = 1$ se M_0 è un punto ordinario. Fatto centro in M_0, con un raggio piccolissimo ρ, descriviamo un cerchio σ e togliamo dall'area A la parte interna al cerchio; avremo così un'area A′ limitata dalla parte s' di contorno s esterna al cerchio e da un piccolo arco σ di questo cerchio. Ora, poichè M_0 è esterno all'area A′, si avrà per la (8):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{s'} \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}\, d\sigma = 0.$$

Ma il secondo integrale, come già altra volta abbiamo visto, può scriversi

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} d\theta,$$

e all'impiccolire indefinito di ρ converge verso $-\frac{1}{2\pi}\alpha\pi = -\frac{\alpha}{2}$, quindi avremo

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int_{s'} \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}\, ds = \frac{\alpha}{2},$$

ossia

$$\frac{1}{2\pi}\int_{s} \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}\, ds = \frac{\alpha}{2}. \tag{10}$$

È questa la terza formola che volevamo stabilire. Si osserverà che se M_0 è un punto ordinario, cioè $\alpha = 1$, l'integrale ha il valore $\frac{1}{2}$, che è la media dei valori relativi al caso di un punto M′ interno ed al caso di M′ esterno.

§. 38.

Studio dell'integrale $\frac{1}{\pi}\int_s \mathrm{U}\,\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds$.

Il metodo che ora passiamo ad esporre per la risoluzione del problema di Dirichlet nel caso del cerchio si fonda sullo studio di quella parte dell'integrale esteso al contorno, nel secondo membro della formola (IX), pag. 101 che contiene i valori prescritti della funzione al contorno. Le formole che stabiliremo nel presente §. valgono non solo nel caso del cerchio, ma anche per qualunque area semplicemente connessa, il cui contorno volga costantemente la sua concavità verso l'interno (contorno di Neumann) e servono appunto di fondamento alla risoluzione del problema di Dirichlet per ogni tale area.

Supponiamo data sul contorno del cerchio una successione U di valori, che assoggettiamo alla sola condizione di formare una catena *finita e continua*, e indicando con r le distanze dei punti del contorno da un punto $\mathrm{M}' \equiv (x'\,y')$ interno dell'area, studiamo il modo di comportarsi della funzione

$$\psi\,(x',y') = \frac{1}{\pi}\int_s \mathrm{U}\,\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds\,.$$

Intanto, se consideriamo un'area A′ tutta interna al cerchio ed in questa facciamo muovere il punto M′, la funzione sotto il segno integrale $\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}$ è una funzione di x', y' sempre finita e continua che ammette, rispetto ad x', y', le derivate parziali di ordine tanto elevato quanto si vuole e soddisfa all'equazione

$$\Delta'_2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = 0\,.$$

Per le note proprietà degli integrali definiti, e delle regole di derivazione sotto il segno, abbiamo dunque: *In qualunque area* A′ *tutta interna al cerchio la funzione* $\psi\,(x',y')$ *è finita e continua, colle sue derivate parziali di tutti gli ordini, e soddisfa all'equazione*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2} = 0\,.$$

Vogliamo ora esaminare (ed è questo il punto essenziale della ricerca) quello che accade della funzione armonica $\psi(x', y')$, quando il punto $M' \equiv (x', y')$, dall'interno del cerchio, si accosta indefinitamente ad un punto M_0 della periferia. Perciò, indicando con U_0 il valore di U in M_0, e sottraendo da $\psi(x', y')$ la costante $2\,U_0$, osserviamo che per la formola (7) di Gauss (pag. 106) si ha

$$\psi(x', y') - 2\,U_0 = \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0)\,\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds,$$

e prendiamo a studiare il modo di comportarsi dell'integrale del secondo membro quando il punto M' si accosta indefinitamente verso M_0. Se con r_0 denotiamo le distanze dei punti dell'area dal punto M_0 fisso sulla periferia, la funzione

$$(U - U_0)\,\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}$$

sarà finita e continua su tutto il contorno, anche in M_0 (§. 37) e potremo considerare l'integrale definito

$$\frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0)\,\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}\,ds.$$

Sarà questo, come ora dimostreremo, il valor limite verso cui convergerà l'integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0)\,\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds,$$

quando M' si muoverà verso M_0; si avrà cioè, come scriveremo:

$$(11)\quad \lim \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0)\,\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds = \frac{1}{\pi}\int_s (U - U_0)\,\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial s}\,ds.$$

Dimostreremo anzi di più che questa convergenza ha luogo *superficialmente in egual grado*, che cioè, preso un numero positivo ε piccolo a piacere, si può fare un intorno superficiale di M_0 così piccolo che,

muovendosi M′ comunque in quest'intorno, la differenza dei due integrali:

$$\frac{1}{\pi}\int_s (U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds - \frac{1}{\pi}\int_s (U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds$$

si serbi sempre, in valore assoluto, minore di ε.

Per questo cominciamo dal ricordare che, per la formola (9) del §. precedente, pag. 107, la quantità

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \frac{\cos(\widehat{rp})}{r}$$

è sempre positiva, perchè nel caso del cerchio, e più in generale di un contorno qualunque di Neumann, l'angolo $\widehat{rp}$ è sempre acuto e lo stesso vale manifestamente dell'altra $\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}$.

Ora cominciamo dal prendere sulla periferia un intorno s' di M_0 tanto piccolo che, essendo ε_1 una quantità positiva prefissata, piccola quanto si vuole, si abbia in tutto s'

$$|U-U_0| < \varepsilon_1,$$

ciò che è sempre possibile, a causa della supposta continuità dei valori U al contorno. Indicando poi con s'' tutta la parte rimanente della periferia, decomponiamo i nostri due integrali così:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_s (U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds = \frac{1}{\pi}\int_{s'} (U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds + \\ &\qquad + \frac{1}{\pi}\int_{s''} (U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds \\ &\frac{1}{\pi}\int_s (U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds = \frac{1}{\pi}\int_{s'} (U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds + \\ &\qquad + \frac{1}{\pi}\int_{s''} (U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds. \end{aligned}\right.$$

Pei due primi integrali dei secondi membri, essendo come si è detto $\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}$, $\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}$ sempre positivi, si ha:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{s'}(U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds\right| < \frac{\varepsilon_1}{\pi}\cdot\int_{s'}\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds < \frac{\varepsilon_1}{\pi}\cdot\int_{s}\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds$$

e per la formola (7) di Gauss

$$\left|\frac{1}{\pi}\cdot\int_{s'}(U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds\right| < 2\varepsilon_1 .$$

Similmente si troverà per la (10)

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{s'}(U-U_0)\frac{d \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{dp}\,ds\right| < \varepsilon_1 .$$

Dalle (12) deduciamo quindi per sottrazione

$$(13)\quad \left|\frac{1}{\pi}\int_{s}(U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds - \frac{1}{\pi}\cdot\int_{s}(U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}\,ds\right| < 3\varepsilon_1 +$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\int_{s''}(U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\,ds - \frac{1}{\pi}\cdot\int_{s''}(U-U_0)\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p}\,ds\right| ,$$

la quale formola vale ancora dovunque sia M′ nell'interno.

Ma ora facciamo un piccolo intorno superficiale di M_0 in guisa che la parte del suo contorno appartenente alla periferia del cerchio sia *tutta interna* a s'. Allora, muovendosi M′ in quest'intorno, le sue distanze dai punti dell'arco s'' d'integrazione si mantengono sempre superiori a una quantità fissa e, se impiccoliamo sufficientemente quest'intorno, la differenza

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} - \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} = \frac{\cos\,(\widehat{rp})}{r} - \frac{\cos\,(\widehat{r_0p})}{r_0}$$

potrà rendersi *lungo tutto l'arco* s'' piccola quanto si vuole. Ne segue che,

serbandosi $U - U_0$ sempre finita, anche la differenza di integrali nel secondo membro della (13) può rendersi inferiore alla quantità che più ci piace, p. es. ad ε_1. Il secondo membro della (13) sarà allora inferiore a $4\,\varepsilon_1$, e posto $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}$, avremo, come si voleva

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_s (U - U_0) \frac{\partial \log \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds - \frac{1}{\pi} \int_s (U - U_0) \frac{\partial \log \left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds \right| < \varepsilon .$$

§. 39.

Risoluzione del problema di Dirichlet pel campo circolare.

Applichiamo al caso del cerchio la formola (11), che abbiamo dimostrata nel caso generale di un contorno di Neumann. Essa può scriversi anche così:

$$\lim \frac{1}{\pi} \int_s U \frac{\partial \log \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds = U_0 + \frac{1}{\pi} \int_s U \frac{\partial \log \left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds ;$$

ma nel caso attuale, se indichiamo con R il raggio del cerchio, abbiamo

$$\frac{\partial \log \left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} = \frac{\cos(\widehat{r_0 p})}{r_0} = \frac{1}{2R} ,$$

indi

$$\frac{1}{\pi} \int_s U \frac{\partial \log \left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial p} ds = \frac{1}{2\pi R} \int_s U\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U\, d\theta ,$$

per cui risulta

$$\lim \left\{ \frac{1}{\pi} \int_s U \frac{\partial \log \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U\, d\theta \right\} = U_0 .$$

La funzione

$$(14) \qquad u(x', y') = \frac{1}{\pi} \int_s U \frac{\partial \log \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U\, d\theta$$

è quindi armonica nell'area circolare ed, avvicinandosi al contorno, tende ai valori prefissati.

La formola (14) *risolve adunque, per un campo circolare, il problema di Dirichlet.*

Possiamo dare a questa formola un altro aspetto, introducendo coordinate polari. Siano (ρ', θ') le coordinate polari di M′ e (ρ, θ) quelle di un punto M mobile nell'area. Avremo

$$r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta'),$$

quindi

$$-r\frac{\partial r}{\partial p} = \rho - \rho' \cos(\theta - \theta'),$$

onde

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \frac{\rho - \rho' \cos(\theta - \theta')}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')},$$

e sostituendo nella (14) il valore di questa derivata al contorno, avremo:

$$u(\rho', \theta') = \frac{1}{\pi}\int_S \mathrm{U}\frac{\mathrm{R} - \rho' \cos(\theta - \theta')}{\mathrm{R}^2 + \rho'^2 - 2\mathrm{R}\rho' \cos(\theta - \theta')}\, ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{U}\, d\theta,$$

che possiamo scrivere anche

$$(14^*) \qquad u(\rho', \theta') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{U}\frac{\mathrm{R}^2 - \rho'^2}{\mathrm{R}^2 + \rho'^2 - 2\mathrm{R}\rho' \cos(\theta - \theta')}\, d\theta.$$

In tutto quello che si è detto fin qui si è supposto che i valori U, assegnati al contorno, formino una catena finita e continua. Ma possiamo ora facilmente spingere più in là la ricerca e considerare il caso in cui i valori U dati al contorno, pur mantenendosi sempre inferiori ad una quantità fissa, presentano discontinuità di prima o seconda specie in un numero finito di punti, ovvero anche in un gruppo infinito di punti, purchè sia *di prima specie* [1]. Domandiamo allora se si può costruire nell'area circolare una funzione u, *i cui valori si serbino tutti inferiori a un numero fisso*, che sia armonica in ogni area interna al cerchio ed, avvicinandosi al contorno verso i punti di continuità della catena U, tenda con continuità verso questi valori, mentre nessuna condizione imponiamo

---

[1] Dini. *Fondamenti,* pag. 17.

per l'avvicinarsi dall'interno verso i punti di discontinuità. In tali condizioni dimostriamo anzi tutto che, se la funzione u esiste, essa è unica [1] ed è ancora data dalla formola (14), o (14*). Descriviamo infatti un cerchio s_1 concentrico, con raggio $R_1 < R$, ma vicino ad R quanto si vuole sì da includere il punto (ρ', θ'). Indicando con U_{s_1} i valori di u sul contorno s_1, potremo applicare al cerchio minore la formola (14*) ed avremo

$$u(\rho', \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_{s_1} U_{s_1} \frac{R_1^2 - \rho'^2}{R_1^2 + \rho'^2 - 2 R_1 \rho' \cos(\theta - \theta')} d\theta .$$

Questa formola vale comunque R_1 sia vicino ad R, e il valore dell'integrale del secondo membro è indipendente da R_1. Ma, nelle ipotesi ammesse, si vedrà subito che, prendendo R_1 sufficientemente vicino ad R, la differenza fra questo integrale e l'integrale limite

$$\frac{1}{2\pi} \int_s U \frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 + \rho'^2 - 2 R \rho' \cos(\theta - \theta')} d\theta$$

è piccola quanto si vuole, onde essa è assolutamente nulla e sussiste ancora la (14*).

Con ciò è dimostrato che, se la funzione cercata u esiste, essa è unica ed è data dalla (14*). Ma ora, se rammentiamo le considerazioni del §. 38, vediamo che effettivamente questa funzione $u(\rho', \theta')$, che è armonica in ogni area interna al cerchio, avvicinandosi ai punti del contorno ove la U è continua, si comporta ancora in modo continuo.

Quanto al modo di comportarsi della u avvicinandosi ad un punto M_0 di discontinuità al contorno, nulla possiamo dire in generale, quando la discontinuità della U in M_0 sia di seconda specie. Ma se il punto M_0 è un punto di discontinuità di prima specie, sicchè esista un limite dei valori a destra di M_0, sia U_0^+, ed un limite a sinistra U_0^-, possiamo determinare colle considerazioni seguenti, dovute a Schwarz, come si comporterà la funzione nelle vicinanze di M_0. Essendo M un punto qualunque del cerchio, indichiamo per ciò con θ l'angolo che la direzione po-

---

[1] Per l'unicità della funzione è essenziale l'ipotesi fatta che i valori dati sul contorno e i valori nell'interno si serbino tutti inferiori ad un numero fisso, come lo dimostra il seguente esempio. Prendasi la parte reale $u = \frac{2x}{x^2+y^2} - 1$ della funzione di variabile complessa $\frac{1}{z} - 1$. Nell'interno del cerchio $x^2 + y^2 = 2x$ la u è armonica e si annulla sul contorno.

sitiva della tangente in M_0 fa colla direzione $M_0 M$ e con Θ i valori di θ al contorno. La funzione θ è dentro al cerchio una funzione ad un sol valore, finita e continua insieme alle sue derivate parziali, in là quanto si vuole, e soddisfa al

$$\Delta_2 \theta = 0 \text{ [1]}.$$

I valori Θ al contorno formano una funzione dovunque continua, salvo in M_0 dove hanno, precisamente come U, una discontinuità di prima specie, tale che

$$\Theta_0^+ = 0 \quad , \quad \Theta_0^- = \pi .$$

Se alla catena U di valori al contorno sostituiamo l'altra

$$V = U + \frac{U_0^+ - U_0^-}{\pi} \Theta ,$$

questa avrà le medesime discontinuità di U eccetto in M_0, dove sarà ristabilita la continuità, se intendiamo che pel valore di V in M_0 si prenda il limite comune U_0^+ dei valori a destra e a sinistra. Con questi valori V costruiamo, colla formula (14*), la corrispondente funzione armonica v che coinciderà necessariamente, pel teorema d'unicità, con

$$v = u + \frac{U_0^+ - U_0^-}{\pi} \theta .$$

La v, avvicinandosi dall'interno a M_0, si comporterà in modo continuo, convergendo equabilmente verso U_0^+ e però la u si comporterà come

$$U_0^+ - \frac{U_0^+ - U_0^-}{\pi} \Theta .$$

Se muoviamo dunque verso M_0 lungo una retta inclinata dell'angolo Θ_0 sulla tangente (positiva), avremo

$$\lim u = U_0^+ + \frac{U_0^- - U_0^+}{\pi} \Theta_0 ,$$

la quale formola ci fa conoscere appunto quello che si domandava. In particolare, se andiamo verso M_0 lungo il raggio del cerchio, avremo $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ed u convergerà verso la media

$$\frac{U_0^+ + U_0^-}{2}$$

dei valori limiti a destra e a sinistra.

---

[1] Invero θ è il coefficiente dell'immaginario nella funzione $\log (z - z_0)$.

Capitolo IV.

Integrali di funzioni di variabile complessa. — Teorema fondamentale di Cauchy e sue conseguenze. — Sviluppi in serie di Taylor. — Sviluppo di Laurent. — Concetto di funzione analitica secondo Weierstrass. — Serie di funzioni analitiche.

§. 40.

Integrali definiti di funzione di variabile complessa.

In un'area A connessa sia data una funzione w della variabile complessa z finita, continua e monodroma. Consideriamo un arco acb di curva nell'interno di A e dividiamolo, secondo una legge arbitraria, in tratti

$$\delta_1 , \delta_2 \ldots . \delta_n ;$$

formiamo la somma

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} w_r \, \Delta_r z ,$$

dove con w_r indichiamo uno qualunque dei valori di w nel tratto δ_r e con $\Delta_r z$ l'incremento della variabile z nel passaggio dal primo al secondo estremo del tratto. Facciamo ora crescere all'infinito il numero dei tratti, mentre ciascuno di essi impiccolisce oltre ogni limite. Facilmente dimostriamo che la somma (1) convergerà verso un limite determinato e finito, indipendente dalla legge di divisione e dai valori intermedii scelti w_r. Scindendo il reale dall'immaginario, poniamo

$$w_r = u_r + i \, v_r \ , \quad \Delta_r z = \Delta_r x + i \, \Delta_r y$$

ed avremo

$$\sum w_r \, \Delta_r z = \sum (u_r \, \Delta_r x - v_r \, \Delta_r y) + i \sum (v_r \, \Delta_r x + u_r \, \Delta_r y) .$$

Ora si ha (§. 27):

$$\lim \sum (u_r \, \Delta_r x - v_r \, \Delta_r y) = \int_{acb} (u \, dx - v \, dy)$$

$$\lim \sum (v_r \, \Delta_r x + u_r \, \Delta_r y) = \int_{acb} (v \, dx + u \, dy) ,$$

quindi

$$\lim \sum w_r \Delta_r z = \int_{acb} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{acb} (v\,dx + u\,dy)\,.$$

Questo limite si chiama l'integrale di w, esteso all'arco acb, e si scrive:

$$(2) \qquad \int_{acb} w\,dz = \int_{acb} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{acb} (v\,dx + u\,dy)\,.$$

Dalla definizione stessa di integrale definito possiamo subito ottenere un teorema semplice, ma molto utile, dovuto a Darboux, che assegna un limite superiore pel modulo dell'integrale e si enuncia: *Il modulo dell'integrale* $\int_{acb} w\,dz$ *non può superare il prodotto del massimo modulo della funzione durante il corso d'integrazione, per la lunghezza dell'arco* acb. Indicando con M questo massimo modulo, e con L il perimetro dell'arco d'integrazione, avremo cioè:

$$(3) \qquad \left| \int_{acb} w\,dz \right| \leq \mathrm{ML}\,.$$

E infatti

$$\int_{acb} w\,dz = \lim \sum w\,\Delta z\,;$$

ora

$$\left| \sum w\,\Delta z \right| \leq \mathrm{M} \sum \left| \Delta z \right| \leq \mathrm{M} \sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

e il limite della somma $\sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ è appunto L, onde segue la (3). Qualche volta si dà alla (3) anche un'altra forma. Indicando con $\overline{w}$ il valore di w in un punto di massimo modulo, si ha

$$\overline{w} = \mathrm{M}\,e^{i\omega}\,,$$

e d'altra parte

$$\int_{acb} w\,dz = \left| \int_{acb} w\,dz \right| e^{i\Omega}\,,$$

onde avremo

$$(3^*) \qquad \int_{acb} w\,dz = \lambda\,\mathrm{L}\,\overline{w}\,,$$

dove λ è un fattore di modulo ≤ 1 e $\overline{w}$ è un valore intermedio di w sull'arco d'integrazione acb.

§. 41.

Teorema di Cauchy. — Integrali indefiniti.

Le due espressioni

$$u\,dx - v\,dy \quad , \quad v\,dx + u\,dy,$$

che figurano nel secondo membro della (2), a causa delle condizioni di monogeneità

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \; , \; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ,$$

sono differenziali esatti. Se dunque supponiamo che w sia finita, continua e monodroma nell'area A e le derivate $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ si serbino finite anche sul contorno, sarà applicabile il teorema alla fine del §. 27, cioè gli integrali

$$\int_s (u\,dx - v\,dy) \; , \; \int_s (v\,dx + u\,dy) \; ,$$

estesi al contorno completo dell'area, saranno identicamente nulli. Ne risulta, per la (2), il teorema fondamentale di Cauchy: *Se nell'area* A, *incluso il contorno, la w è funzione finita, continua e monodroma della variabile complessa z, e la derivata $w'(z)$ si serba finita anche al contorno, l'integrale*

$$\int_s w\,dz,$$

esteso al contorno completo dell'area, è identicamente nullo.

La condizione relativa alla derivata al contorno si può anche togliere nei casi ordinarii, quando l'area A possa riguardarsi come limite di una area interna variabile A′, il cui contorno s' converga uniformemente verso il contorno s in guisa che ogni punto di s' si accosti indefinitamente ad un punto determinato di s. E infatti allora, per ogni configurazione di s', si avrà

$$\int_{s'} w(z)\,dz = 0$$

e l'integrale $\int_s w\,dz$, essendo il limite verso cui converge $\int_{s'} w\,dz$, sarà pure nullo.

Senza ripetere per gli integrali di funzioni di variabile complessa le deduzioni del §. 31, relative agli integrali curvilinei di differenziali esatti reali, basterà enunciare i corrispondenti teoremi:

1.° *Indicando con* σ *una curva chiusa qualunque tracciata nell' interno di un' area* A, *supposta semplicemente connessa, nella quale la funzione* $w(z)$ *è finita, continua e monodroma, si avrà*

$$\int_\sigma w\,dz = 0\ ^{(1)}.$$

2.° *Nell'area semplicemente connessa* A *l'integrale* $\int w\,dz$, *esteso da un punto* a *ad un punto* b *lungo un cammino qualunque nell' interno dell'area, dipende solo dagli estremi* a, b *e nulla affatto dal cammino percorso.*

Questo integrale si può quindi indicare opportunamente con

$$\int_a^b w\,dz.$$

Supponiamo ora fisso l'estremo inferiore e mobile l'estremo superiore, che indicheremo con z, e consideriamo l'integrale

$$W = \int_a^z w\,dz.$$

È facile vedere che W sarà, come w stessa, una funzione finita, continua e monodroma della variabile complessa z e sarà inoltre $\frac{dW}{dz} = w$. Si ha invero:

$$W = \int_a^z w\,dz = \int_a^{(x,y)} (u\,dx - v\,dy) + i\int_a^{(x,y)} (v\,dx + u\,dy)$$

e basta applicare i risultati del §. 31, osservando che ne risulta

$$\frac{\partial W}{\partial x} = u + iv = w\ ,\quad \frac{\partial W}{\partial y} = -v + iu = i\,\frac{\partial W}{\partial x}\ .$$

Se l'area A ha una connessione d'ordine n, l'integrale indefinito $\int w\,dz$, esteso da un punto fisso ad un punto mobile z, sarà ancora una funzione

---

(1) Qui le condizioni al contorno sono manifestamente superflue.

W finita e continua della variabile complessa z, ma invece di essere monodroma sarà ora, in generale, polidroma. La sua polidromia consisterà in ciò che se in un punto z, per un dato cammino, acquista il valore W, variando ad arbitrio il cammino, acquisterà tutti i valori della forma

$$W + r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2 + \ldots + r_{n-1} \omega_{n-1} ,$$

dove $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{n-1}$ sono $n-1$ quantità complesse (moduli di periodicità) fisse, mentre $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$ prendono tutti i valori interi positivi e negativi.

§. 42.

Formola di Cauchy.

Dal teorema di Cauchy si può facilmente dedurre una formola, pure dovuta a Cauchy, che ha un'importanza fondamentale. Essa serve a calcolare i valori nell'interno dell'area di una funzione finita, continua e monodroma, per mezzo dei valori che la funzione ha al contorno. Che i valori al contorno determinino pienamente i valori nell'interno sappiamo già; ed anzi sappiamo di più che basta dare i valori al contorno della parte reale u perchè questa venga individuata nell'area, e siccome della parte immaginaria v si conosce allora il differenziale totale, basterà fissare inoltre in un punto il valore di v perchè la w risulti individuata [1].

Per trovare la formola di Cauchy, prendiamo un punto z' *interno* dell'area e, fatto centro in z', descriviamo un piccolo cerchio tutto interno all'area e indichiamo con σ il contorno di questo cerchio. Se togliamo dall'area A il disco circolare, otteniamo un'area A′ il cui contorno si compone del contorno primitivo s e del contorno σ del cerchio. In quest'area A′ la funzione

$$\frac{w(z)}{z-z'}$$

è finita, continua e monodroma e il teorema fondamentale di Cauchy dà quindi:

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'} + \int_\sigma \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = 0 .$$

---

[1] Si osservi che, se l'area è più volte connessa, non si potranno nemmeno dare ad arbitrio i valori della parte reale al contorno, perchè la parte immaginaria risulterà (in generale) non ad un sol valore, ma ad infiniti valori.

Qui il contorno σ, come contorno interno, è percorso nel verso negativo; se lo intendiamo percorso nel senso diretto, avremo dunque

$$\int_S \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = \int_\sigma \frac{w(z)\,dz}{z-z'}. \tag{4}$$

L'integrale del secondo membro ha un valore che è facile calcolare, sia direttamente, sia ricorrendo alla proprietà già dimostrata (Cap. III §. 35) per le funzioni armoniche, di assumere cioè nel centro di un cerchio la media dei valori al contorno. Servendoci di questo teorema, osserviamo che indicando con ρ il raggio del cerchio, con θ l'anomalia di un punto z variabile sulla circonferenza, avremo sopra σ:

$$z-z' = \rho\, e^{i\theta},$$

indi

$$dz = i\rho\, e^{i\theta}\, d\theta, \quad \frac{dz}{z-z'} = i\, d\theta,$$

e però

$$\int_\sigma \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = i\int_0^{2\pi} (u+iv)\, d\theta.$$

Ma indicando con $w(z') = u' + iv'$ il valore di w in z' si ha, pel citato teorema:

$$\int_0^{2\pi} u\, d\theta = 2\pi u', \quad \int_0^{2\pi} v\, d\theta = 2\pi v',$$

onde

$$\int_\sigma \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = 2\pi i\, w(z').$$

La (4) ci dà adunque

$$w(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{w(z)\,dz}{z-z'}, \tag{I}$$

che è la *formola di Cauchy* [1].

---

[1] Questa formola si potrebbe anche dedurre dalla (IX) §. 33 applicandola alla parte reale u ed al coefficiente v dell'immaginario. (Cf. PICARD. *Traité d'Analyse*, T. II, pag. 109).

Si osservi che la (I) rimane valida (per contorni ordinarii), anche togliendo al contorno le condizioni relative alla derivata $w'(z)$. (Cf. §. 41).

Dalla formola (I) di Cauchy così stabilita deduciamo subito importanti conseguenze. Immaginiamo di far muovere z' in un'area A′ tutta interna all'area A, ma del resto qualunque. Mentre z nel secondo membro della (I) percorre il contorno s, la $z-z'$ rimane col modulo discosto da zero più di una quantità fissa e perciò la funzione sotto il segno

$$\frac{w(z)}{z-z'}$$

rimane sempre finita. Essa è funzione finita e continua dei parametri x', y', coordinate di z', e possiede, rispetto a questi parametri, derivate sempre finite e continue, in là quanto si vuole, e soddisfacenti alla condizione di monogeneità

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Per le regole di derivazione sotto il segno integrale, se ne conclude quindi che, nell'area A′, esistono le derivate rispetto a z' di $w(z')$ in là quanto si vuole e soddisfacenti alla condizione di monogeneità; in generale avremo

$$\text{(II)} \qquad w^{(n)}(z') = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{(z-z')^{n+1}}.$$

Abbiamo dunque il teorema: *Se una funzione w di variabile complessa è finita, continua e monodroma in un' area* A, *nell'interno dell'area essa ammetterà non solo la derivata prima finita, continua e monodroma (ciò che è conseguenza della definizione), ma anche le derivate successive di tutti gli ordini, che saranno entro l'area* A *tutte funzioni finite, continue e monodrome della variabile complessa z.*

§. 43.

Sviluppi in serie di potenze.

Dalla formola (I) Cauchy ha dedotto una conseguenza notevolissima, applicandola al caso di un campo circolare. Sia $z=\gamma$ il centro del circolo; siccome, mentre z percorre il contorno del circolo, si ha

$$|z'-\gamma| < |z-\gamma|,$$

cioè

$$\left|\frac{z'-\gamma}{z-\gamma}\right| < 1 ,$$

potremo sviluppare

$$\frac{1}{z-z'} = \frac{1}{z-\gamma}\,\frac{1}{1-\dfrac{z'-\gamma}{z-\gamma}}$$

in serie di potenze della variabile

$$\zeta = \frac{z'-\gamma}{z-\gamma} ,$$

secondo la progressione geometrica

$$\frac{1}{1-\zeta} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \zeta^n .$$

Avremo quindi

$$\frac{1}{z-z'} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(z'-\gamma)^n}{(z-\gamma)^{n+1}}$$

e questa serie, per ogni punto z' interno al circolo, muovendosi z sulla circonferenza, sarà convergente in egual grado.

Sostituendo nella formola di Cauchy

$$w(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{w(z)\,dz}{z-z'}$$

il valore superiore di $\dfrac{1}{z-z'}$, potremo eseguire l'integrazione termine a termine e scrivere

$$w(z') = \sum_{n=0}^{n=\infty} (z'-\gamma)^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{w(z)\,dz}{(z-\gamma)^{n+1}} .$$

Poniamo

(5) $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{w(z)\,dz}{(z-\gamma)^{n+1}}$$

ed avremo

$$w(z') = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z'-\gamma)^n .$$

Si osservi che, per la formola (II), il valore (5) del coefficiente a_n è dato da

$$a_n = \frac{w^{(n)}(\gamma)}{\pi(n)},$$

e ponendo z in luogo di z', potremo dire che, in ogni punto z interno al circolo, si avrà

$$w(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{w^{(n)}(\gamma)}{\pi(n)} (z-\gamma)^n .$$

Questa non è altro, come si vede, che la serie di Taylor, estesa ai valori complessi della variabile. E poichè attualmente figurano soltanto i valori della funzione e delle derivate nel centro del circolo, è chiaro che per la validità della formola basterà che la funzione $w(z)$ sia finita, continua e monodroma in ogni area *interna* al circolo, senza porre alcuna condizione al contorno. E infatti, se z è interno al circolo, basterà descrivere un circolo concentrico interno di raggio $> |z|$ ed applicare le nostre considerazioni a questo circolo. Se ricordiamo poi i risultati ottenuti al Cap. I riguardo alle serie di potenze, potremo enunciare l'importante teorema: *Affinchè una funzione $w(z)$ di variabile complessa sia sviluppabile in serie di potenze di $z-\gamma$, è necessario e sufficiente che nell'interno di un circolo di centro γ essa sia finita, continua e monodroma, insieme alla derivata $w'(z)$.*

Osserviamo poi, ciò che ancora non risulta dalle ricerche precedenti, che lo sviluppo è unico e coincide quindi necessariamente collo sviluppo di Taylor.

E infatti se due serie ordinate per le potenze di $z-\gamma$ rappresentano la medesima funzione, la loro differenza, che è pure una serie di potenze

$$c_0 + c_1(z-\gamma) + c_2(z-\gamma)^2 + \dots ,$$

sarebbe identicamente nulla per ogni valore di z nell'area considerata. Ora poniamo che il primo coefficiente non nullo della serie sia c_n, sicchè la serie si scriva

$$(z-\gamma)^n \left\{ c_n + c_{n+1}(z-\gamma) + \dots \right\} .$$

Il primo fattore $(z-\gamma)^n$ si annulla solo in γ, quindi la serie fra parentesi

$$c_n + c_{n+1}(z-\gamma) + \dots$$

dovrà annullarsi, salvo al più in γ, in ogni altro punto dell'area e però,

a causa della continuità, anche in γ. Ne risulterebbe dunque, contro l'ipotesi, $c_n = 0$. Tutti i coefficienti c sono dunque nulli e quindi le due serie coincidono assolutamente.

I risultati precedenti pongono in piena luce le condizioni di sviluppabilità di una funzione in serie di potenze (serie di Taylor) di $z-\gamma$. Lo sviluppo resta valido finchè nel cerchio descritto col centro γ la funzione resta finita, continua e monodroma colla derivata, ed il *vero cerchio di convergenza* per la serie è il massimo che si possa descrivere soddisfacendo a queste condizioni. Così p. e. se prendiamo le funzioni

$$\log(1+z) \quad , \quad (1+z)^m ,$$

dove m non sia un intero positivo, queste sono finite, continue e monodrome colle derivate entro il cerchio di centro $z=0$ e di raggio $=1$, ma nel punto $z=-1$ hanno un punto singolare, talchè il raggio del cerchio di convergenza delle corrispondenti serie (logaritmica e binomiale)

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\ldots$$

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \ldots\ldots$$

è precisamente l'unità.

Così la funzione $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$ è finita, continua e monodroma colla derivata in ogni area che non contenga alcuno dei punti singolari

$$\ldots -3\pi , -2\pi , -\pi , 0 , \pi , 2\pi , 3\pi , \ldots ,$$

e se γ è un punto qualunque del piano distinto dai punti singolari, potremo sviluppare $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$ in serie di potenze di $z-\gamma$ e il raggio di convergenza della serie sarà la minima distanza di γ dai punti singolari.

S'intende altresì come limitandosi a considerare le condizioni di sviluppabilità in serie di Taylor per le funzioni $f(x)$ di variabile reale, queste non possano apparire che incompletamente. E invero, per le proprietà delle serie di potenze (§. 3), una tale funzione è necessariamente estendibile al piano complesso e dalla distribuzione delle singolarità, *non soltanto sull'asse reale*, ma in tutto il piano complesso dipendono, come si è visto, le condizioni di sviluppabilità. Così p. e. la funzione

$$\frac{1}{\cosh x}$$

è sempre finita e continua *sull'asse reale*, insieme con tutte le sue derivate, in là quanto si vuole. Ma sviluppandola ad esempio per le potenze di x, il raggio del cerchio di convergenza è soltanto $\frac{\pi}{2}$. Ciò dipende da che, estendendola ai valori complessi, la funzione $\frac{1}{\cosh z}$ ha i punti singolari

$$z = (2n+1)\frac{\pi i}{2} \qquad (n \text{ intero})$$

sull'asse immaginario, e di questi il più prossimo a $z=0$ è $\frac{\pi i}{2}$.

§. 44.

Sviluppo di Laurent.

Passiamo ora ad applicare un metodo analogo per sviluppi in serie, anzichè ad un campo circolare, ad un *anello circolare*, cioè allo spazio compreso fra due circonferenze concentriche C, C'. Supponiamo che in questo spazio (il contorno incluso) la funzione $w(z)$ sia finita, continua e monodroma colla derivata $w'(z)$. Se z' è un punto interno all'anello e con s indichiamo il contorno del cerchio esterno C, con s' quello dell'interno C', e li intendiamo tutte due percorsi nel senso positivo delle rotazioni, avremo per la formola di Cauchy:

$$w(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'} - \frac{1}{2\pi i}\int_{s'} \frac{w(z)\,dz}{z-z'}.$$

Il primo integrale si potrà ancora sviluppare, come al §. precedente, per potenze di $z'-\gamma$, indicando γ il centro dell'anello, e si avrà

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z'-\gamma)^n,$$

avendo posto

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{(z-\gamma)^{n+1}}. \tag{6}$$

Quanto al secondo integrale si osservi che, mentre z percorre C', si ha

$$|z-\gamma| < |z'-\gamma| \ , \ \left|\frac{z-\gamma}{z'-\gamma}\right| < 1$$

e perciò potremo sviluppare

$$-\frac{1}{z-z'} = \frac{1}{z'-z} = \frac{1}{z'-\gamma} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-\gamma}{z'-\gamma}}$$

per potenze intere e positive di $\dfrac{z-\gamma}{z'-\gamma}$ colla formola

$$-\frac{1}{z-z'} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(z-\gamma)^{n-1}}{(z'-\gamma)^n}$$

e, a causa della convergenza in egual grado di questa serie, avremo

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{S'} \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{(z'-\gamma)^n},$$

posto

$$(7) \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{S'} w(z)\,(z-\gamma)^{n-1}\,dz\,.$$

La funzione $w(z')$ risulterà dunque, per l'interno dell'anello, sviluppata nella serie

$$w(z') = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z'-\gamma)^n + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{(z'-\gamma)^n},$$

che procede insieme per le potenze ascendenti e discendenti di $z'-\gamma$. Osserviamo poi che i coefficienti (6), (7) risultano calcolati con integrali definiti estesi rispettivamente alle circonferenze C, C'; ma siccome le funzioni sotto il segno in tutto l'anello sono finite, continue e monodrome, potremo estendere anche gli integrali stessi ad una curva chiusa σ qualunque, p. e. ad una circonferenza concentrica che giri una sola volta attorno all'anello, sicchè avremo:

$$(8) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma} \frac{w(z)\,dz}{(z-\gamma)^{n+1}} \ , \ b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma} w(z)\,(z-\gamma)^{n-1}\,dz\,.$$

Dopo ciò si vedrà subito che le condizioni al contorno dell'anello si possono senz'altro togliere e si ha quindi il teorema di Laurent:

Se nell'interno di un anello circolare la funzione $w(z)$ è finita, continua e monodroma colla derivata, si potrà sviluppare, in tutto l'interno dell'anello, nella serie

$$w(z) = \sum_0^\infty a_n (z-\gamma)^n + \sum_1^\infty \frac{b_n}{(z-\gamma)^n},$$

procedente per le potenze intere ascendenti e discendenti di $z-\gamma$, e i valori dei coefficienti a_n, b_n saranno dati dalle (8).

Si osservi che se anche nell'interno di C′ la $w(z)$ si mantiene finita, continua e monodroma, pel teorema fondamentale di Cauchy sono allora nulli tutti i coefficienti b_n, e si ritorna allo sviluppo di Taylor.

§. 45.

Funzioni analitiche.

Arriviamo ora all'importante nozione di *funzione analitica* secondo Weierstrass. Questo concetto è fondato sulle proprietà delle serie di potenze, la cui importanza fondamentale nella teoria delle funzioni di variabile complessa risulta già dai teoremi di Cauchy, esposti nel §. 43. In virtù di questi teoremi infatti qualunque funzione di variabile complessa, sia ad uno, sia a più valori, è sempre sviluppabile, in campi sufficientemente piccoli, in serie di potenze.

Per designare una serie di Taylor, che proceda per le potenze di $z-\gamma$, ci serviremo con Weierstrass del simbolo

$$\mathrm{P}(z-\gamma),$$

ed innanzi tutto stabiliremo la nozione di *prolungamento analitico*. Se consideriamo una serie di potenze

$$\mathrm{P}(z-a),$$

il raggio del cui cerchio C di convergenza non sia nullo, essa definisce entro C una funzione $w(z)$ di z finita, continua e monodroma. Prendiamo entro C un punto b, diverso dal centro a, e descriviamo col centro in b un cerchio C′ che rimanga entro C; il massimo raggio che potremo dare a C′ sarà evidentemente la minima distanza di b dalla periferia di C e sarà quindi dato da $\mathrm{R}-|a-b|$, avendo indicato con R il raggio di

C. Entro il cerchio C′ la nostra funzione $w(z)$ è certamente finita, continua e monodroma, quindi (§. 43) sviluppabile in serie di potenze

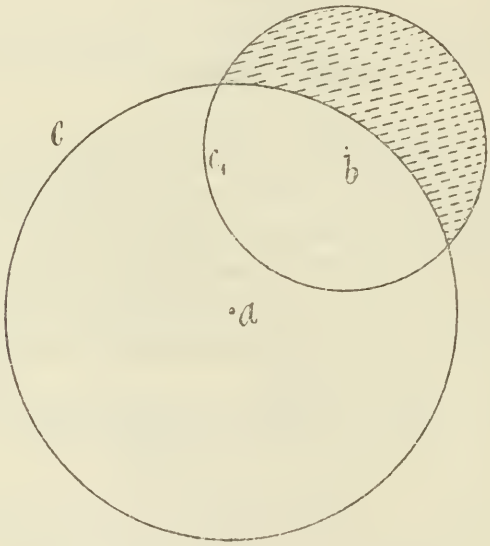
$$P_1(z-b)$$

del binomio $z-b$, e nell'area C′ abbiamo per la funzione $w(z)$ le due diverse rappresentazioni analitiche

$$w(z) = P(z-a) \ , \quad w(z) = P_1(z-b) .$$

Ora il cerchio di convergenza della seconda serie è *almeno* C′, ma può darsi benissimo che sia più ampio. Indichiamolo in tal caso con C_1, e la serie $P_1(z-b)$, che nell'area comune a C, C_1 rappresenta la funzione

Fig. 7.ª



$w(z)$, conserva un significato anche fuori del cerchio primitivo C, nell'area tratteggiata della figura 7.ª. Diremo allora, con Weierstrass, che la serie

$$P_1(z-b)$$

dà un *prolungamento analitico* della serie $P(z-a)$, od anche che la nostra funzione $w(z)$, primitivamente definita entro il cerchio C dalla serie $P(z-a)$, è stata analiticamente prolungata nella parte ombreggiata della figura. Più in generale, se costruiamo una successione di serie di potenze

$$P(z-a) \ , \quad P_1(z-a_1) \ , \quad P_2(z-a_2) \ldots P_n(z-a_n) \ ,$$

ciascuna delle quali sia dedotta dalla precedente nel modo come abbiamo dedotto $P_1(z-b)$ da $P(z-a)$, diremo ancora che l'ultima serie $P_n(z-a_n)$ è dedotta per prolungamento analitico dalla primitiva $P(z-a)$. Ma, per giustificare e precisare queste definizioni, conviene innanzi tutto dimostrare il teorema: *Se una serie* $P(z-a_n)$ *nasce per prolungamento analitico dall'altra* $P(z-a)$, *viceversa questa può ottenersi per prolungamento analitico da* $P(z-a_n)$.

Basterà evidentemente dimostrare la cosa per due serie consecutive nella successione supposta

$$P(z-a)\ ,\ P(z-a_1)\ ,\ P(z-a_2)\ ,\ ..\ P(z-a_n)\ ,$$

p. e. per $P(z-a)$, $P(z-a_1)$, facendo vedere come $P(z-a)$ nasce per prolungamento analitico da $P(z-a_1)$. Se il cerchio A_1 di convergenza di $P(z-a_1)$ contiene nel suo interno il centro a del cerchio A di convergenza di $P(z-a)$, ciò è evidente. In caso opposto si osservi che la funzione $w(z)$, nell'area formata dalla riunione dei due cerchi A, A_1, è finita, continua e monodroma e per ciò, preso un punto qualunque d interno nell'area, la $w(z)$ è sviluppabile in serie di potenze $P(z-d)$ e il cerchio di convergenza ha *almeno* un raggio eguale alla minima distanza di d dal contorno. Ora è chiaro geometricamente che possiamo prendere, p. e. sulla congiungente dei centri a, a_1, una serie finita di punti d_1, $d_2 \ldots d_n$ tali che i cerchi corrispondenti

$$C_1\ ,\ C_2 \ldots C_n$$

abbiano ciascuno il centro interno al cerchio seguente, a sia interno a C_1 e d_n ad A_1; allora la successione di serie

$$P(z-a_1)\ ,\ P(z-d_n)\ ,\ P(z-d_{n-1})\ ..\ P(z-d_1)\ ,\ P(z-a)$$

condurrà, per prolungamento analitico, da $P(z-a_1)$ a $P(z-a)$, come si voleva.

Dal teorema dimostrato risulta subito il corollario: *Se due serie nascono per prolungamento analitico da una medesima terza serie, l'una si ottiene pure direttamente per prolungamento analitico dall'altra.* Consideriamo *l'insieme* di tutte le serie di potenze, che possono dedursi da una serie iniziale $P(z-a)$ per prolungamento analitico; questo insieme, per quanto si è visto sopra, è così costituito, che partendo da una qualunque delle serie dell'insieme si ottengono, per prolungamento analitico, tutte

le altre. *La totalità di queste serie costituisce, secondo la definizione di Weierstrass, una funzione analitica, di cui ogni serie della totalità dicesi un elemento.*

Una funzione analitica è individuata e riconoscibile da uno qualunque dei suoi elementi.

§. 46.

Campo di esistenza di una funzione analitica.

Nelle considerazioni precedenti, relative al prolungamento analitico di una serie di potenze $P(z-a)$, abbiamo supposto che il prolungamento possa in realtà effettuarsi. Ma può darsi invece (ed un esempio ce lo proverà subito) che per *qualunque* punto b, preso nell'interno del cerchio di convergenza C di $P(z-a)$, il cerchio di convergenza della serie dedotta $P(z-b)$ non si estenda mai al di là del primitivo, nel qual caso sarà ad esso tangente internamente. Allora la circonferenza C è il limite naturale d'esistenza per la funzione analitica, che viene ad essere rappresentata interamente dall'unico elemento $P(z-a)$. Si dice anche in tal caso che lo spazio esterno a C′ è uno spazio *lacunare* per la funzione analitica, uno spazio cioè in cui la funzione non esiste. Per accertarsi della verità di quanto sopra si è asserito, basta p. e. ricorrere ai risultati ottenuti nella risoluzione del problema di Dirichlet per un cerchio C (§. 39). Distribuiamo sul contorno una catena finita e continua U di valori, ma che sia priva di derivata in tutti i punti, ovvero anche soltanto in un gruppo di punti dovunque condensato [1], e costruiamo la corrispondente funzione armonica u nel cerchio C. La u individua, a meno di una costante additiva, la coniugata v che, nell'area semplicemente connessa C, è ad un sol valore. La funzione di variabile complessa $w = u + iv$ è finita, continua e monodroma nell'interno di C e sviluppabile quindi in una serie di potenze, che ha il cerchio C per cerchio di convergenza, ma non ammette alcun prolungamento analitico.

Un esempio anche più semplice di quelli ora considerati ci è fornito dalla funzione (§. 7)

$$F(z) = z + z^m + z^{m^2} + \ldots + z^{m^n} + \ldots,$$

---

[1] Dini. *Fondamenti,* pag. 135 e 163.

dove m è un intero ≥ 2. La serie del secondo membro ha per cerchio di convergenza quello di raggio $=1$, ma non è prolungabile analiticamente al di là. Si consideri infatti un valore di z di modulo $\rho < 1$ e di argomento $\theta = \frac{2k\pi i}{m^r}$ (k, r interi qualunque); a cominciare dal termine z^{m^r} la serie diventa

$$\rho^{m^r} + \rho^{m^r+1} + \rho^{m^r+2} + \dots$$

e, al convergere di ρ verso 1, cresce all'infinito [1]. La $F(z)$ avvicinandosi dall'interno, lungo il raggio, verso tutti i punti di anomalia $\theta = \frac{2k\pi i}{m^r}$, punti che formano un insieme condensato su tutta la circonferenza, cresce dunque all'infinito, ciò che rende evidente l'impossibilità del prolungamento analitico.

Constatato cogli esempî precedenti che una funzione analitica può ammettere nel piano degli spazî lacunari, s' intenderà meglio ciò che ora vogliamo esporre in generale sul *campo d'esistenza* di una funzione analitica. Sia dunque dato un elemento $P(z-a)$, che definisce la nostra funzione analitica. Dobbiamo allora distinguere i punti del piano, rispetto alla funzione analitica, in due classi; diremo della prima classe un punto del piano quando esista qualche elemento della funzione, cioè una serie dedotta per prolungamento analitico da $P(z-a)$, il cui cerchio di convergenza contenga *nel suo interno* il punto. La totalità di questi punti costituisce un *continuo*, un campo a due dimensioni connesso, poichè è chiaro che, se A, B sono due tali punti, esisterà una serie di cerchi concatenati, che saranno cerchi di convergenza di elementi della funzione analitica, il primo dei quali conterrà A, l'ultimo B e potremo tracciare da A a B una linea continua, tutta costituita da punti della prima classe. Il campo così definito è il *campo d'esistenza* della nostra funzione analitica. Fra i punti dell'altra classe distingueremo i punti al limite del campo dai punti *esterni* al campo. Un punto sarà esterno al campo quando

---

[1] Se M è una quantità positiva, grande quanto si vuole, e q una quantità fissa compresa fra 0 e 1, possiamo prendere un numero intero n tanto grande che sia $nq > M$ e prendere poi $\rho < 1$ così prossimo a 1, che sia

$$\rho^{m^r+n-1} > q\,.$$

Allora nella serie del testo la somma dei primi n termini è già maggiore di $nq > M$.

un intorno sufficientemente piccolo del punto non è solcato da alcun cerchio di convergenza di elementi della funzione; apparterrà invece al limite del campo quando, per quanto piccolo intorno si prenda del punto, esisteranno sempre dei cerchi di convergenza che attraversano l'intorno (senza contenere nell'interno il punto).

Ogni punto al limite del campo si dirà un *punto singolare* della funzione; in un tale punto, stando alla definizione di Weierstrass, la funzione non ha propriamente valore alcuno. Questi punti al limite del campo possono essere in numero finito o infinito ed anche riempire tutta una linea (contorno) del campo. In generale costituiscono un *insieme*, un *gruppo* di punti, al quale si riconosce subito la proprietà seguente: *I punti dell'insieme derivato appartengono all'insieme stesso* [1]. E infatti un tale punto non può essere nè interno, nè esterno al campo; non interno perchè allora un intorno sufficientemente piccolo del punto non conterrebbe che punti interni e nessun punto al limite, non esterno perchè qualsiasi intorno del punto è solcato da cerchi di convergenza.

Indichiamo con L l'insieme dei punti singolari, con L′ l'insieme derivato. Come si è detto, L′ è tutto contenuto in L; ma può darsi che non lo esaurisca interamente ed allora ogni punto P di L, non appartenente a L′, è un *punto singolare isolato*, cioè in un intorno sufficientemente piccolo di P non esiste altro punto singolare che P stesso.

Una funzione analitica, considerata in tutto il suo campo d'esistenza, può essere *monodroma* (uniforme) o *polidroma* (multiforme). Si dice monodroma quando in ogni punto del campo si trova sempre per la funzione il medesimo valore, in qualunque modo vi si arrivi per prolungamento analitico dall'elemento iniziale $P(z-a)$, polidroma nel caso contrario. In altre parole, se la funzione è monodroma, due elementi qualunque di essa $P(z-b)$, $P(z-c)$, ove abbiano un campo di convergenza comune, ivi coincidono; nel caso della polidromia invece vi sono elementi $P(z-b)$, $P(z-c)$, che nel campo comune di convergenza non danno per la funzione i medesimi valori.

Se invece di considerare tutto il campo d'esistenza di una funzione analitica, si considera un'area parziale A, tutta contenuta nel campo d'esistenza, può darsi che partendo da un elemento $P(z-a)$ della fun-

---

[1] Secondo Cantor, dicesi insieme derivato l'insieme di tutti i punti *limiti* dell'insieme primitivo, di quei punti cioè nell'intorno dei quali si addensano infiniti punti del gruppo primitivo.

zione contenuto in A e prolungando analiticamente la funzione, senza uscire dall'area A, si ottenga una funzione *monodroma nell'area* A, quantunque la funzione analitica completa sia polidroma.

Viceversa, se in un'area A abbiamo una funzione finita, continua e monodroma di variabile complessa z (nel senso di Cauchy-Riemann), questa è una porzione di una funzione analitica, che può esistere anche fuori dell'area ed essere monodroma, o polidroma.

§. 47.

Serie di funzioni analitiche.

In un'area connessa A del piano complesso si abbia una serie

$$\sum_1^\infty u_n(z),$$

i cui singoli termini siano funzioni finite, continue e monodrome della variabile complessa z nell'interno dell'area. Dimostriamo l'importante teorema:

Se la serie $\sum_1^\infty u_n(z)$ *è convergente in egual grado in ogni area tutta interna alla primitiva, la somma di questa serie sarà una funzione* $w(z)$ *della variabile complessa pure finita, continua e monodroma e le successive derivate di* w, *di ordine comunque elevato, si otterranno derivando termine a termine la serie.*

Questo teorema estende, come si vede, ad ogni serie convergente in egual grado, i cui termini siano funzioni finite, continue e monodrome di variabile complessa, le proprietà, dimostrate nel Cap. I, per le serie di potenze.

Per dimostrarlo, prendiamo internamente ad A un'area A′, prossima del resto ad A quanto si vuole, e indichiamo con z' un punto mobile in A′. Prendiamo poi una terza area B contenente A′ e contenuta in A, il cui contorno, che indicheremo con s, si mantenga discosto sia dal contorno di A, sia da quello di A′. Indichiamo con $w_{z'}$, la somma della serie in z':

$$w_{z'} = \sum_1^\infty u_n(z').$$

Essendo il punto z' interno a B, avremo per la formola di Cauchy

$$u_n(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{u_n(z)}{z-z'}\,dz,$$

indi

$$(9) \qquad w_{z'} = \frac{1}{2\pi i} \sum_1^\infty \int_S \frac{u_n(z)}{z-z'} dz .$$

Ma la serie $\sum_1^\infty u_n(z)$ converge in egual grado sul contorno s di B, ed altrettanto accade quindi della serie

$$\sum_1^\infty \frac{u_n(z)}{z-z'} ,$$

giacchè, percorrendo z il contorno di B e z' muovendosi in A', il modulo di $z-z'$ non scende mai al di sotto di un certo limite.

Nella (9) possiamo dunque eseguire l'integrazione termine a termine e, poichè

$$\sum_1^\infty u_n(z) = w_z ,$$

avremo

$$(10) \qquad w_{z'} = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{w_z\, dz}{z-z'} ;$$

troviamo cioè che $w_{z'}$ è data dalla formola stessa di Cauchy. Di qui, per il modo come z' figura sotto il segno integrale, deduciamo subito che muovendosi z' in A', la $w_{z'}$ è effettivamente funzione finita, continua e monodroma della variabile complessa z', come è enunciato nella prima parte del teorema. Scriviamo quindi la (10) così:

$$(10^*) \qquad w(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{w(z)\, dz}{z-z'} .$$

Per dimostrare la seconda parte basta ricordare che, secondo la formola (II) §. 42, abbiamo

$$w^{(r)}(z') = \frac{1.2.3..r}{2\pi i} \int_S \frac{w(z)\, dz}{(z-z')^{r+1}} ,$$

ed anche

$$u_n^{(r)}(z') = \frac{1.2.3..r}{2\pi i} \int_S \frac{u_n(z)\, dz}{(z-z')^{r+1}} ,$$

quindi

$$(11) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(r)}(z') = \frac{1.2.3..r}{2\pi i} \sum_1^\infty \int_S \frac{u_n(z)\,dz}{(z-z')^{r+1}}.$$

Ma la serie $\sum_1^\infty \frac{u_n(z)}{(z-z')^{r+1}}$ è convergente in egual grado sopra s, ed integrando termine a termine, vediamo che la serie del secondo membro in (11) è effettivamente convergente ed ha per somma

$$\frac{1.2.3..r}{2\pi i} \int_S \frac{\sum_1^\infty u_n(z).\,dz}{(z-z')^{r+1}} = w^{(r)}(z'),$$

onde risulta

$$w^{(r)}(z') = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(r)}(z'),$$

come è asserito nella seconda parte del teorema.

§. 48.

Applicazioni.

Dal teorema così dimostrato risulta che, se consideriamo un cerchio C tutto interno ad A, e con γ ne indichiamo il centro, la funzione

$$w(z) = \sum_1^\infty u_n(z)$$

sarà sviluppabile in una serie $P(z-\gamma)$ convergente in C:

$$w(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \alpha_m (z-\gamma)^m.$$

Come si calcoleranno i coefficienti α_m dello sviluppo? Dico che basterà sviluppare in serie $P(z-\gamma)$ ciascun termine $u_n(z)$ della serie $\sum_1^\infty u_n(z)$ e raggruppare tutti i termini che contengono la medesima potenza di $z-\gamma$. Poniamo invero

$$u_n(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_{m,n} (z-\gamma)^m;$$

avremo

$$a_{m,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{u_n(z)\,dz}{(z-\gamma)^{m+1}},$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{w(z)\,dz}{(z-\gamma)^{m+1}},$$

gli integrali essendo estesi al contorno σ del cerchio C. Ora si ha

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n(z)}{(z-\gamma)^{m+1}}\,dz,$$

quindi, a causa della convergenza in egual grado della serie sotto il segno:

$$\alpha_m = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int \frac{u_n(z)\,dz}{(z-\gamma)^{m+1}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{m,n},$$

ciò che dimostra appunto la proprietà enunciata.

Come esempio, si consideri la *serie di Lambert*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^3}{1-z^3} + \cdots,$$

la quale in ogni cerchio di centro 0 e di raggio $R < 1$ è convergente in egual grado, poichè se

$$|z| \leq R < 1,$$

si ha

$$\left|\frac{1}{1-z^n}\right| \leq \frac{1}{1-R^n} < \frac{1}{1-R}$$

e la serie $\Sigma|z^n|$ è convergente in egual grado.

Potremo dunque, entro il cerchio di raggio $=1$, trasformarla in serie di potenze di z così:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{n=\infty} z^n \left(\sum_{m=0}^{m=\infty} z^{mn}\right) = \sum_{N=1}^{N=\infty} \theta(N) \,.\, z^N.$$

La potenza z^N comparirà tante volte quante volte il numero N si può decomporre in due fattori

$$N = n(m+1),$$

sicchè $\theta(N)$ sarà precisamente *il numero dei divisori di* N.

Le considerazioni precedenti ci conducono a parlare delle funzioni di funzioni. Sia

$$w = f(z)$$

una funzione analitica di z e

$$W = F(w)$$

una funzione analitica di w. Quando potremo considerare W come funzione analitica di z? Per non considerare qui che il caso più semplice, supponiamo che z varii in un'area in cui $f(z)$ è finita, continua e monodroma e w varii conseguentemente in un'altra area in cui $F(w)$ è pure finita, continua e monodroma. Allora il segno

$$F(f(z))$$

avrà un significato preciso e rappresenterà una funzione finita, continua e monodroma di z. Ciò si può vedere sia ricorrendo alla definizione di Cauchy-Riemann, sia a quella di Weierstrass. Per dire di quest'ultimo modo, basterà evidentemente sviluppare W in serie di potenze di $w - w_0$ e ciascuna di queste potenze in serie di potenze di $z - z_0$. Così p. e. le funzioni

$$e^{e^z}, \ \operatorname{sen}(e^z), \ e^{\operatorname{sen} z}, \ \operatorname{sen}(\operatorname{sen} z) \text{ ecc.}$$

saranno funzioni analitiche (monodrome) esistenti in tutto il piano.

Quando le funzioni componenti $f(z)$, $F(w)$ hanno un campo limitato d'esistenza, o sono polidrome, si possono presentare le più svariate circostanze. In particolare può accadere che il segno $F(f(z))$ non definisca una sola funzione analitica, ma più od anche infinite funzioni analitiche distinte ed anche può accadere, al contrario, che il segno $F(f(z))$ non dia tutto il corso di una funzione analitica. Come esempî del primo caso citiamo

$$\sqrt{z^2} = \pm z \quad , \quad \log(z^a) = a \log z + 2 r \pi i ,$$

con a costante *non* reale e frazionaria, e r intero qualunque, che si scindono la prima in due, la seconda in infinite funzioni analitiche distinte.

Come esempio della seconda circostanza, basta citare quello in cui $w = \varphi(z)$ sia una funzione a spazio lacunare e $W = F(w)$ ne sia l'inversa; allora $F[\varphi(z)] = z$ prende solo quei valori di z che appartengono al campo di esistenza di φ.

Capitolo V.

Punti singolari delle funzioni monodrome. — Poli e punti singolari essenziali. — Residui. — Indicatore logaritmico. — Inversione delle serie di potenze.

§. 49.

Punti regolari.

I nostri studî saranno nel seguito quasi esclusivamente rivolti alle funzioni analitiche monodrome, ovvero a porzioni di funzioni analitiche, monodrome nell'area in cui si considerano. Per abbreviare, quando non si dica esplicitamente il contrario, intenderemo semplicemente per funzione una funzione analitica che soddisfi a queste condizioni.

Si consideri in un'area connessa A una funzione $w(z)$, per la quale ogni punto dell'area A e del suo contorno sia o un punto interno al campo d'esistenza di $w(z)$ o un punto al limite del campo (punto singolare) (§. 44). Nell'intorno di un punto γ in A, interno al campo d'esistenza, la funzione $w(z)$ è sviluppabile in serie di potenze

$$w(z) = \mathrm{P}(z-\gamma);$$

diremo anche, con Weierstrass, che la $w(z)$ è *regolare* nel punto γ, ovvero che γ è un punto regolare per $w(z)$. Ogni punto non regolare di A è un punto singolare per w.

Cominciamo dal dimostrare il seguente teorema fondamentale: *Nell'intorno di un punto regolare γ la funzione $w(z)$ non può annullarsi infinite volte.* Ciò risulta, con leggiera modificazione, da considerazioni già svolte al §. 43 pag. 125. Suppongasi che la serie di potenze

$$w(z) = \mathrm{P}(z-\gamma) = a_0 + a_1(z-\gamma) + \ldots$$

si annulli in infiniti punti dell'intorno di γ. A causa della continuità, si annullerà anche in γ e il primo coefficiente della serie a_0 sarà certamente nullo. Il teorema sarà dimostrato quando si provi che *tutti* i coefficienti della serie sono nulli. Suppongasi che il primo coefficiente non nullo sia a_n; potremo scrivere

$$w(z) = (z-\gamma)^n \left\{ a_n + a_{n+1}(z-\gamma) + \ldots \right\} = (z-\gamma)^n \mathrm{P}_1(z-\gamma),$$

dove la serie $P_1(z-\gamma)$, essendo il suo primo coefficiente $a_n \neq 0$, non si annullerà in γ.

Essendo $P_1(z-\gamma)$ continua in γ, potremo fare un intorno di γ così piccolo, che in esso la serie $P_1(z-\gamma)$ non si annulli mai, e allora la funzione

$$w(z) = (z-\gamma)^n P_1(z-\gamma)$$

non si annulla più in quell'intorno, salvo che in γ, ove è zero il primo fattore. Ciò è contrario all'ipotesi fatta, la quale è adunque assurda.

Come corollario del teorema, abbiamo l'importante risultato: *Due funzioni $w(z)$, $w_1(z)$, che assumano i medesimi valori in infiniti punti addensantisi attorno ad un punto regolare per ambedue le funzioni, coincidono in tutta la loro estensione.*

E infatti la differenza $w(z) - w_1(z)$ è regolare in γ e si annulla in infiniti punti dell'intorno, quindi in tutto l'intorno, onde il suo prolungamento analitico è sempre zero.

In particolare si vede che se due funzioni coincidono per un tratto lineare (o superficiale), del loro campo d'esistenza, per quanto piccolo sia, coincidono sempre.

L'area A può eventualmente contenere nel suo interno il punto $z = \infty$.

Lo studio delle funzioni $w(z)$ nell'intorno di $z = \infty$, cioè all'esterno di un cerchio di raggio sufficientemente grande nel piano, si riporta a quello di una funzione nell'intorno di un punto a distanza finita colla sostituzione

$$z' = \frac{1}{z},$$

che è un'inversione per raggi vettori reciproci, congiunta con un ribaltamento. I punti z a distanza grandissima dall'origine sono così riportati in punti z' vicinissimi all'origine e la distribuzione dei valori di $w(z)$ attorno a $z = \infty$ è la stessa di quella dei valori di

$$w_1(z') = w\left(\frac{1}{z'}\right)$$

nell'intorno di $z' = 0$. E perciò se $w_1(z')$ è regolare in quest'intorno, diremo che $w(z)$ è regolare nell'intorno di $z = \infty$; essa sarà allora sviluppabile in quest'intorno in una serie

$$w(z) = P\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots$$

procedente per le potenze intere e positive di $\frac{1}{z}$.

§. 50.

Infinitesimi.

Se la funzione $w(z)$, regolare in γ, vi si annulla, si dice che ha ivi uno *zero* od un *infinitesimo*. In tal caso nella serie

$$w(z) = \mathrm{P}(z-\gamma) = a_0 + a_1(z-\gamma) + \ldots$$

son nulli alcuni dei coefficienti, a cominciare dal primo a_0. Se supponiamo che il primo coefficiente non nullo sia a_n, avremo

$$(1) \qquad w(z) = (z-\gamma)^n \mathrm{P}_1(z-\gamma) = (z-\gamma)^n \left\{ \alpha_0 + \alpha_1(z-\gamma) + \ldots \right\},$$

dove il primo coefficiente α_0 della serie $\mathrm{P}_1(z-\gamma)$ non è nullo. Ora, se formiamo il rapporto

$$\frac{w(z)}{(z-\gamma)^n} = \mathrm{P}_1(z-\gamma)$$

e facciamo tendere z verso γ, vediamo che il rapporto converge verso la quantità finita e diversa da zero α_0. Le due quantità $w(z)$, $(z-\gamma)^n$, che diventano infinitesime insieme, avvicinandosi z a γ, sono dunque da reputarsi del medesimo ordine. E poichè valutiamo $z-\gamma$ come infinitesimo del primo ordine, quindi $(z-\gamma)^n$ come infinitesimo d'ordine n, abbiamo il teorema: *Una funzione $w(z)$ regolare in un punto, e che ivi si annulli, vi diventa infinitesima d'ordine intero.*

Se il punto γ è all'infinito dobbiamo, per quanto si è detto sopra, sostituire a $z-\gamma$ l'inversa $\frac{1}{z}$ della variabile, quindi se la funzione $w(z)$ sarà regolare all'infinito ed avrà ivi un infinitesimo, questo sarà d'ordine intero n e si avrà

$$(1^*) \qquad w(z) = \frac{1}{z^n}\left\{ \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \ldots \right\} = \frac{1}{z^n}\mathrm{P}_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

con $\alpha_0 \neq 0$.

Osserviamo che *se una funzione $w(z)$ è regolare in un punto $z=\gamma$ ed ivi non si annulla, anche l'inversa $\frac{1}{w(z)}$ sarà regolare in γ.* E infatti facciamo un intorno di γ così piccolo che in esso $w(z)$ non si annulli mai; in questo intorno $\frac{1}{w(z)}$ è finita, continua e monodroma e quindi rego-

lare in γ. Conoscendo lo sviluppo di $w(z)$:

$$w(z) = a_0 + a_1(z-\gamma) + a_2(z-\gamma)^2 + \dots,$$

si potrà calcolare razionalmente quello di

$$\frac{1}{w(z)} = \alpha_0 + \alpha_1(z-\gamma) + \alpha_2(z-\gamma)^2 + \dots$$

col metodo dei coefficienti indeterminati. Moltiplicando le due serie, otteniamo infatti le relazioni ricorrenti

$$\begin{cases} a_0\alpha_0 = 1 \\ a_1\alpha_0 + a_0\alpha_1 = 0 \\ a_2\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n\alpha_0 + a_{n-1}\alpha_1 + \dots + a_1\alpha_{n-1} + a_0\alpha_n = 0, \end{cases}$$

dalle quali deduciamo

$$\alpha_0 = \frac{1}{a_0}, \quad \alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{a_0^n} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \dots 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \dots a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \dots a_1 \end{vmatrix}.$$

Il raggio del cerchio di convergenza della seconda serie sarà, in generale, differente da quello della primitiva.

È bene osservare come si comportano le derivate di una funzione nell'intorno di un suo punto d'infinitesimo d'ordine n. Si vedrà subito che: *Se l'infinitesimo d'ordine n è a distanza finita, ad ogni derivazione diminuisce di un'unità il suo ordine, talchè la derivata n^{ma} $w^{(n)}(z)$ non vi diventa più nulla; al contrario se l'infinitesimo è in $z=\infty$, ad ogni derivazione cresce di un'unità il suo ordine.*

§. 51.

Punti singolari. — Poli.

Cominciamo ora lo studio dei punti singolari delle funzioni, ed esaminiamo dapprima il caso dei punti singolari *isolati*. Sia $z=\gamma$ un punto singolare isolato; potremo descrivere col centro in γ un cerchio C così

piccolo che sulla periferia di C e internamente a C non vi sia alcun altro punto singolare *all'infuori di* γ. Allora se, con un raggio *piccolo quanto si vuole*, si descrive un secondo cerchio C′ concentrico a C, nell'anello fra C, C′ la $w(z)$ è finita continua e monodroma e, pel teorema di Laurent (§. 44), è quindi sviluppabile in una serie:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z-\gamma)^n + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{(z-\gamma)^n},$$

che procede insieme per le potenze intere ascendenti e discendenti di $z-\gamma$. Di queste due parti la prima converge entro tutto C, la seconda converge in tutto il piano, eccetto che in $z=\gamma$.

Ora possono darsi due casi ben distinti, e cioè: *1.° la serie discendente si riduce ad un polinomio*

$$\frac{b_1}{z-\gamma} + \frac{b_2}{(z-\gamma)^2} + \ldots + \frac{b_n}{(z-\gamma)^n};$$

2.° la parte procedente per le potenze negative è un'effettiva serie.

Nel primo caso la singolarità si dice *polare* o un *polo* od anche, per una ragione che subito vedremo, un *infinito* della funzione; nel secondo caso la singolarità si chiama *essenziale*.

Studiamo dapprima una singolarità polare $z=\gamma$. Nell'intorno di essa, salvo che in γ, ove la funzione analitica non è, propriamente parlando, definita, si ha:

$$(2) \qquad w(z) = \frac{b_1}{z-\gamma} + \frac{b_2}{(z-\gamma)^2} + \ldots + \frac{b_n}{(z-\gamma)^n} + \mathrm{P}(z-\gamma).$$

Avvicinandosi con z a γ, tutti i valori della funzione risultano di modulo più grande di qualunque quantità assegnabile, ossia, per esprimersi con maggiore esattezza, se prendiamo una quantità positiva M grande a piacere, possiamo fare un intorno così piccolo del polo che in tutto l'intorno sia

$$|w(z)| > \mathrm{M}.$$

I valori della funzione, avvicinandosi al polo, convergono dunque equabilmente verso ∞, sicchè se conveniamo di prendere per valore di $w(z)$ nel polo l'infinito, possiamo dire che *un polo è ancora un punto di continuità* della funzione. Si osservi poi che il prodotto

$$(z-\gamma)^n w(z),$$

convergendo z a γ, converge verso la quantità b_n finita e diversa da zero. Per ciò, quando attorno al polo vale lo sviluppo (2), con $b_n \neq 0$, si dice che il punto $z=\gamma$ è un infinito d'ordine n della $w(z)$. Dunque: *Gli infiniti, come gli infinitesimi, di una funzione analitica uniforme sono sempre di ordine intero.*

Osserviamo come si comporta l'inversa $\frac{1}{w(z)}$ nell'intorno del polo $z=\gamma$ di $w(z)$. Abbiamo per la (2)

$$w(z)(z-\gamma)^n = \mathrm{P}(z-\gamma) = \alpha_0 + \alpha_1(z-\gamma) + \ldots,$$

ove $\mathrm{P}(z-\gamma)$ non si annulla in $z=\gamma$; per ciò

$$\mathrm{P}_1(z-\gamma) = \frac{1}{\mathrm{P}(z-\gamma)}$$

è pure regolare in $z=\gamma$ e non nulla. Ne risulta

$$\frac{1}{w(z)} = (z-\gamma)^n \mathrm{P}_1(z-\gamma),$$

il che dimostra che *un polo d'ordine n della funzione $w(z)$ è, per la funzione inversa $\frac{1}{w(z)}$, un punto regolare e precisamente un infinitesimo d'ordine n.*

Questa proprietà di sparire, come singolarità, nell'inversa è caratteristica delle singolarità polari. E infatti, se il punto $z=\gamma$ è singolare per $w(z)$ e non per l'inversa $\frac{1}{w(z)}$, dovrà essere necessariamente un infinitesimo per $\frac{1}{w(z)}$, altrimenti, per quanto si è visto al §. precedente, non sarebbe singolare per w. Ora, supposto che sia un infinitesimo d'ordine n per $\frac{1}{w(z)}$, avremo nell'intorno di γ:

$$\frac{1}{w(z)} = (z-\gamma)^n \mathrm{P}(z-\gamma) \quad , \quad \mathrm{P}(0) \neq 0,$$

onde ricaviamo per $w(z)$ uno sviluppo della forma (2). Si può dunque assumere come definizione della singolarità polare anche la seguente: *Un punto di singolarità di una funzione dicesi un polo, quando è singolare per la funzione, senza esserlo per l'inversa.*

Fino ad ora abbiamo supposto il polo a distanza finita. Se il polo è in $z = \infty$, si studierà in modo perfettamente analogo, come al §. precedente abbiamo trattato il caso di un infinitesimo all'infinito, e così avremo: *Se in $z = \infty$ la $w(z)$ ha un polo d'ordine n, nell'intorno di $z = \infty$ si svilupperà colla formola*

$$(2^*) \qquad w(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Si osserverà che questo sviluppo si ottiene semplicemente da quello (2) relativo ad un polo a distanza finita, cangiando $z - \gamma$ in $\frac{1}{z}$. La medesima osservazione, senza che sia necessario ripeterla, si applicherà nel seguito.

Dagli sviluppi (2), (2*) si rileva subito come si comportano le derivate di una funzione $w(z)$ nell'intorno di un polo e si vede che: *Per ogni derivazione, cresce di un'unità l'ordine d'infinito, se questo trovasi a distanza finita, e diminuisce invece di un'unità se è all'infinito.*

§. 52.

Esempî di singolarità essenziali.

Un punto singolare, che non sia un polo, si dirà un punto *singolare essenziale*, sia che si tratti di una singolarità isolata, ovvero di una singolarità limite d'infinite altre singolarità. Per far subito comprendere la differenza capitale fra una singolarità polare ed una singolarità essenziale adduciamo qualche esempio, riservandoci a dare nel seguito i teoremi generali. In vicinanza di un punto regolare, ovvero di un polo, una funzione $w(z)$ non può, pel teorema fondamentale del §. 49, riprendere infinite volte il medesimo valore, sicchè *se una funzione $w(z)$ prende un medesimo valore in tutti i punti di un gruppo infinito, ogni punto limite del gruppo è una singolarità essenziale.* Negli esempî che ora andiamo ad addurre si vedrà inversamente che le funzioni considerate, in vicinanza della singolarità essenziale, riprendono infinite volte un medesimo valore fissato ad arbitrio.

Prendiamo le funzioni

$$e^z, \quad \operatorname{sen} z,$$

che hanno in $z = \infty$ una singolarità essenziale isolata, come risulta dalla

loro rappresentazione per serie $P(z)$ convergenti in tutto il piano, od anche dalla loro periodicità per cui riprendono il medesimo valore in punti che si addensano nell'intorno di $z = \infty$. Sia $A = \rho e^{i\omega}$ una costante qualunque *finita* prefissata; avremo $e^z = A$ tutte le volte che sia

$$x = \log \rho \quad , \quad y = \omega + 2n\pi$$

con n intero qualunque. Dunque nell'intorno di $z = \infty$ la funzione e^z prende infinite volte il valore fissato A. Lo stesso vale naturalmente di

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} .$$

Se si vuole trasportare la singolarità essenziale a distanza finita, basterà considerare le funzioni

$$e^{\frac{1}{z}} \quad , \quad \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) ,$$

che avranno in $z = 0$ una singolarità essenziale (isolata) e in vicinanza di $z = 0$ riprenderanno infinite volte ogni valore, eccettuati i valori 0, ∞ per la prima, e il valore ∞ per la seconda.

Gli esempî ora addotti sono relativi al caso più semplice di singolarità essenziali isolate. Un esempio di singolarità essenziale *d'ordine superiore* sarebbe il punto $z = 0$ per la funzione

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}\right) .$$

Qui tutti i punti singolari (essenziali) sono i punti

$$z = \frac{1}{n\pi}$$

e queste singolarità isolate si addensano attorno a $z = 0$. A più forte ragione, come è chiaro, si presenterà ora, nelle vicinanze di $z = 0$, la circostanza osservata pel caso della singolarità isolata. E se ripetendo n

volte il nostro processo, consideriamo p. e. la *catena sinusoidale*

$$\operatorname{sen}\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{\operatorname{sen}\cdot\cdot\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{z}}}},$$

questa funzione avrà un gruppo di 1.ª specie di singolarità essenziali, il cui $(n-1)^{\text{mo}}$ gruppo derivato consterà del solo punto $z=0$; una tale singolarità essenziale si potrà dire dell'ordine n.

Generalmente però, nel seguito, considereremo soltanto singolarità essenziali del 1.° ordine, cioè isolate.

§. 53.

Residui.

Consideriamo un punto $z=\gamma$, singolare o no per la funzione $w(z)$, e supponiamo che, se è singolare, sia isolato.

Preso un intorno di γ, che non contenga alcun punto singolare, salvo eventualmente γ, descriviamo una piccola curva chiusa σ, p. es. un cerchio col centro in γ, che giri una ed una sola volta attorno a γ nel senso diretto. L'integrale:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma w(z)\,dz$$

che sarà zero, se γ sarà un punto regolare a distanza finita, avrà in generale un valore indipendente dalla curva σ descritta, come risulta dal teorema fondamentale di Cauchy; questo valore si chiama, secondo Cauchy, *residuo integrale* od anche semplicemente *residuo* della funzione in γ. Si può dare del residuo anche un'altra definizione, che importa molto osservare. Supponiamo dapprima γ a distanza finita; avremo nell'intorno del punto:

$$(3)\qquad w(z)=\mathrm{P}(z-\gamma)+\frac{b_1}{z-\gamma}+\frac{b_2}{(z-\gamma)^2}+\cdots,$$

dove la serie discendente si arresterà ad un polinomio, se la singolarità

è polare. Dico che in ogni caso: *Il residuo è eguale al coefficiente* b_1 *della potenza* $(z-\gamma)^{-1}$.

Per dimostrarlo, osserviamo che se calcoliamo l'integrale

$$\int_\sigma (z-\gamma)^n \, dz \,,$$

esteso ad un cerchietto di centro γ, dove si suppone n intero, positivo o negativo, troveremo il valore *zero* se $n \neq -1$, ed invece $2\pi i$ per $\int_\sigma \frac{dz}{z-\gamma}$. E invero, se n è positivo o nullo, ciò risulta subito dal teorema stesso di Cauchy. Per n qualunque, osserviamo che lungo il cerchio si ha

$$z-\gamma = \rho e^{i\theta} \;, \quad dz = i\rho e^{i\theta} \, d\theta \quad (\rho \text{ costante}) \,,$$

indi

$$\int_\sigma (z-\gamma)^n \, dz = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\theta} \, d\theta \,;$$

questo integrale è zero per $n+1 \neq 0$ ed $= 2\pi i$ per $n = -1$, c. d. d.

Ciò posto, sostituendo in

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma w(z) \, dz$$

per $w(z)$ il valore (3), ed osservando che, a causa della convergenza in egual grado della serie del secondo membro (posto pure che si tratti di una singolarità essenziale), si può integrare termine a termine, si avrà:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma w(z) \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \mathrm{P}(z-\gamma) \, dz + \frac{b_1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{dz}{z-\gamma} + \frac{b_2}{2\pi i} \int \frac{dz}{(z-\gamma)^2} + \cdots$$

Ora, pel teorema di Cauchy, il primo integrale del secondo membro è nullo e nulli sono pure, per l'osservazione superiore, tutti gli altri, eccetto

$$\frac{b_1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{dz}{z-\gamma} = b_1 \,,$$

ciò che dimostra appunto il teorema enunciato.

Poniamo ora che il punto $z=\gamma$ sia in $z=\infty$; avremo allora in questo intorno

$$(3^*) \qquad w(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots,$$

dove questa volta avremo in $z=\infty$ una singolarità polare od essenziale, secondo che la serie *ascendente* si riduce ad un polinomio o no, mentre $z=\infty$ sarà regolare se il polinomio si riduce ad una costante. In ogni caso dico che: *Il residuo della funzione in $z=\infty$ sarà il coefficiente $-b_1$ della potenza z^{-1}, cangiato di segno.*

Osserviamo subito che, in virtù di questo teorema, contrariamente a quello che accade a distanza finita, il residuo non sarà nullo in generale per una funzione regolare nell'intorno di $z=\infty$.

Se descriviamo un cerchio grandissimo s col centro nell'origine, potremo considerarne la parte esterna come intorno di $z=\infty$ e volendo allora percorrere la circonferenza in guisa che l'intorno resti alla sinistra, verremo a percorrerla nel senso inverso delle rotazioni. Avremo dunque pel residuo il valore

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_s w(z)\,dz,$$

intendendo ora che s sia percorso nel verso positivo degli angoli. Sostituendo a $w(z)$ il valore (3^*) e integrando per serie, ne risulta subito la verità della proposizione enunciata.

Facciamo ancora un'osservazione sul calcolo dei residui in un caso semplice, che è utile spesso applicare. Supponiamo che il punto singolare sia un polo del 1.° ordine; allora diciamo che: *il residuo è eguale al valore dell'inversa della derivata della funzione inversa $\frac{1}{w(z)}$ in quel punto.*

E infatti si ha nel caso supposto

$$w(z)=\frac{b_1}{z-\gamma}+\mathrm{P}(z-\gamma),$$

indi

$$\frac{1}{w(z)}=\frac{z-\gamma}{b_1}+(z-\gamma)^2\,\mathrm{P}_1(z-\gamma),$$

onde per valore della derivata di $\frac{1}{w(z)}$ in $z=\gamma$ troviamo appunto

$$\left(\frac{1}{w(z)}\right)'_{z=\gamma}=\frac{1}{b_1}.$$

§. 54.

L'integrale $\int_s w(z)\,dz$ nel caso di punti singolari interni.

Consideriamo un'area piana connessa finita, od anche estendentesi all'infinito, ma in questo caso però colla condizione che il punto $z = \infty$ non si trovi sul contorno (che cioè il contorno sia finito), e supponiamo che la funzione $w(z)$ sia in tutta l'area e sul contorno regolare, salvo in un numero *finito* di punti singolari

$$a_1\,,\ a_2\,,\ldots a_n$$

interni all'area. Proponiamoci di calcolare il valore dell'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S w(z)\,dz\,,$$

esteso al contorno completo dell'area, integrale che sarebbe certamente nullo se l'area fosse finita e non contenesse punti singolari. Indicando con

$$R_1\,,\ R_2 \ldots R_n$$

i residui della funzione in a_1, $a_2 \ldots a_n$ e con R_∞ il residuo in $z = \infty$, se l'area si estenderà all'infinito, dimostriamo la formola di Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S w(z)\,dz = R_1 + R_2 + \ldots + R_n + (R_\infty)\,,$$

dove il termine fra parentesi (R_∞) è da sopprimersi se l'area è finita.

In parole abbiamo il teorema: *Il valore dell' integrale* $\frac{1}{2\pi i}\int_S w(z)\,dz$, *esteso al contorno completo dell'area, è eguale alla somma dei residui nei punti singolari interni, se l'area è finita, e a questa somma aumentata del residuo del punto* ∞, *se l'area è infinita.*

Se infatti escludiamo con piccoli cerchi $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ i punti singolari dall'area ed anche il punto all'infinito, se l'area è infinita, togliendo dall'area la regione esterna ad un cerchio grandissimo Σ, la nuova area ottenuta sarà finita ed in essa $w(z)$ sarà finita, continua e monodroma, il contorno incluso. Pel teorema fondamentale, avremo quindi

$$\int_S w(z)\,dz + \int_{\sigma_1} w(z)\,dz + \ldots + \int_{\sigma_n} w(z)\,dz + \left(\int_\Sigma w(z)\,dz\right) = 0\,,$$

dove i circoli σ sono percorsi in verso negativo e il cerchio Σ in verso positivo. Percorrendoli tutti in verso positivo, avremo

$$\int_S w(z)\,dz = \int_{\sigma_1} w(z) + \int_{\sigma_2} w(z)\,dz + \ldots + \int_{\sigma_n} w(z)\,dz - \left(\int_\Sigma w(z)\,dz\right),$$

la quale formola, per la definizione stessa dei residui, coincide colla formola da dimostrarsi.

Una conseguenza di questa formola merita di essere subito notata. Supponiamo che la funzione analitica uniforme $w(z)$ esista in tutto il piano complesso (su tutta la sfera complessa) ed abbia un numero finito di punti singolari e dimostriamo: *La somma dei residui di $w(z)$ nei punti singolari e nel punto $z = \infty$ è nulla.* Descriviamo infatti un cerchio di raggio grandissimo includente tutti i punti singolari a distanza finita; l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S w(z)\,dz\,,$$

esteso al cerchio in senso diretto, è eguale alla somma dei residui dei punti singolari interni e d'altra parte al residuo, cangiato di segno, del punto $z = \infty$, ciò che dimostra la nostra proposizione.

§. 55.

Polidromia dell'integrale $W(z) = \int_a^z w(z)\,dz$.

Stabilita la nozione di residuo, possiamo riprendere le ricerche del §. 41 intorno alla polidromia degli integrali indefiniti. In un'area *semplicemente connessa* la funzione $w(z)$ sia dappertutto regolare, eccettuato in un numero finito di punti, i cui rispettivi residui siano

$$R_1\,,\ R_2 \ldots R_n\,;$$

e, se l'area si intende all'infinito, aggiungiamo ancora il residuo R_∞ del punto all'infinito. Se escludiamo dall'area i punti singolari (ed eventualmente il punto $z = \infty$), mediante piccoli cerchi $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$, la nuova area ottenuta sarà più volte connessa; se la rendiamo semplicemente connessa mediante tagli semplici fra i contorni aggiunti ed il primitivo

vediamo subito, applicando i risultati del citato §. 41, che i moduli di periodicità dell'integrale indefinito $\int_a^z w(z)\,dz$ ai tagli saranno

$$2\pi i R_1\,,\ 2\pi i R_2\,,\ \ldots\ 2\pi i R_n\,;$$

onde, se $\int_a^z w(z)\,dz$ è un particolare valore dell'integrale in z, tutti gli altri valori saranno

$$\int_a^z w(z)\,dz + 2\pi i\,(m_1 R_1 + m_2 R_2 + \ldots + m_n R_n)\,,$$

i numeri m_i essendo interi positivi, o negativi arbitrarii.

Nonostante la presenza dei punti singolari, l'integrale potrà essere monodromo; ciò accadrà manifestamente allora e allora soltanto quando tutti i residui siano nulli. Così p. e. gli integrali

$$\int_a^z \frac{dz}{z^2}\,,\ \int_a^z \frac{dz}{z^3}\,,\ \ldots\,,\ \int_a^z \frac{dz}{\operatorname{sen}^2 z}$$

sono monodromi anche nelle aree racchiudenti punti singolari, perchè ivi sono nulli i residui delle funzioni sotto il segno. Ma consideriamo invece l'integrale $\int_1^z \frac{dz}{z}$ che, senza presupporre qui la nozione della funzione logaritmica, indichiamo con

$$\log z = \int_1^z \frac{dz}{z}\,.$$

Il residuo di $\frac{1}{z}$ in $z=0$ è $=1$ e perciò la polidromia dell'integrale consiste nell'ammettere il modulo di periodicità $2\pi i$.

Ancora consideriamo l'integrale

$$\int_0^z \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arc\,tang} z\,;$$

la funzione sotto il segno ha i due poli del 1.° ordine $z=i$, $z=-i$, e poichè

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right),$$

vediamo che i residui sono rispettivamente

$$\frac{1}{2i}, \quad -\frac{1}{2i},$$

onde avremo per l'integrale un unico modulo di periodicità $=\pi$, come risulta anche dalla definizione diretta della funzione arc tang z.

In fine consideriamo le funzioni

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z},$$

che hanno poli del 1.° ordine in tutti i punti $z = n\pi$, la prima col residuo $(-1)^n$ la seconda col residuo $+1$, come si rileva subito dalla regola pel calcolo dei residui data alla fine del §. 53. Se ne conclude che le funzioni

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{z} \frac{dz}{\operatorname{sen} z}, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{z} \cot z \, dz$$

hanno un unico modulo di periodicità $=2\pi i$, ciò che risulta anche dalle loro espressioni effettive

$$\log \operatorname{tang} \frac{z}{2}, \quad \log \operatorname{sen} z.$$

Negli esempî addotti fin qui non si avevano moduli di periodicità infinitesimi. Un esempio di tali funzioni si ha p. e. nell'integrale

$$\int_0^z \left(\frac{1}{z-1} + \frac{\sqrt{2}}{z-2} \right) dz,$$

con moduli di periodicità $2\pi i$, $2\pi i \sqrt{2}$ in rapporto reale incommensurabile.

§. 56.

Indicatore logaritmico.

Consideriamo una funzione $w(z)$ che sia uniforme in un'area A, incluso il contorno, ed abbia ivi soltanto singolarità polari. Ricerchiamo se il rapporto

$$\frac{1}{w} \frac{dw}{dz} = \frac{w'}{w},$$

che si dice la *derivata logaritmica* della $w(z)$, avrà punti singolari e quali. In ogni punto regolare di w, che non ne sia un infinitesimo, è pure regolare $\frac{w'}{w}$, onde le singolarità di $\frac{w'}{w}$ possono essere soltanto negli infinitesimi e negli infiniti di w. Vediamo se $\frac{w'}{w}$ avrà effettivamente in ogni tale punto una singolarità e di quale specie. Supponiamo dapprima che $z=\gamma$ sia un infinitesimo d'ordine n di $w(z)$, talchè nell'intorno di γ avremo

$$w(z) = (z-\gamma)^n \, \mathrm{P}(z-\gamma) \ , \quad \text{con } \mathrm{P}(0) \neq 0 . \tag{4}$$

Derivando logaritmicamente, risulta

$$\frac{w'(z)}{w(z)} = \frac{n}{z-\gamma} + \frac{\mathrm{P}'(z-\gamma)}{\mathrm{P}(z-\gamma)} \ ;$$

ma la seconda parte $\frac{\mathrm{P}'(z-\gamma)}{\mathrm{P}(z-\gamma)}$ è regolare nell'intorno di $z=\gamma$, a causa di $\mathrm{P}(0) \neq 0$, onde in $z=\gamma$ la $\frac{w'}{w}$ ha un polo del 1.° ordine col residuo n, eguale all'ordine d'infinitesimo di $z=\gamma$ per $w(z)$. Per un infinito d'ordine n il calcolo è perfettamente analogo, bastando solo cangiare nella (4) n in $-n$. Ne concludiamo: *Se nell'area che si considera la funzione $w(z)$ non ha singolarità essenziali, la sua derivata logaritmica $\frac{w'(z)}{w(z)}$ vi ha soltanto singolarità polari del primo ordine; queste sono situate negli infinitesimi e negli infiniti di w e i loro residui sono dati da $+n$ o da $-n$, secondo che per $w(z)$ il punto considerato è un infinitesimo, ovvero un infinito d'ordine n.*

Questo teorema, per quanto riguarda il valore del residuo, sussiste ancora quando il punto $z=\gamma$ sia in $z=\infty$, ma allora la derivata logaritmica, in luogo di un polo, ha in $z=\infty$ un infinitesimo del 1.° ordine. E invero se in $z=\infty$ la $w(z)$ ha un infinitesimo, si ha nel suo intorno

$$w(z) = \frac{1}{z^n}\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots\right) \ , \quad \text{con } a_0 \neq 0 \ ,$$

onde

$$\frac{w'(z)}{w(z)} = -\frac{n}{z} - \frac{\frac{a_1}{z^2} + \frac{2\,a_2}{z^3} + \dots}{a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots} = -\frac{n}{z} + \frac{\alpha_0}{z^2} + \frac{\alpha_1}{z^3} + \dots$$

e il residuo di $\frac{w'}{w}$ in $z = \infty$ $\left(\text{che è un infinitesimo del 1.° ordine per } \frac{w'}{w}\right)$ è ancora $+n$. Similmente, se $z = \infty$ è un polo d'ordine n per w, avremo nell'intorno:

$$w(z) = z^n \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right), \quad a_0 \neq 0$$

onde

$$\frac{w'(z)}{w(z)} = \frac{n}{z} + \frac{\alpha_0}{z^2} + \frac{\alpha_1}{z^3} + \ldots,$$

formola che pone in evidenza per $\frac{w'(z)}{w(z)}$ in $z = \infty$ un infinitesimo del 1.° ordine col residuo $-n$.

Ciò premesso, si abbia in un'area connessa A finita o infinita (ma con contorno finito) una funzione $w(z)$, uniforme nell'area, che sul contorno non diventi mai nè zero, nè infinita e non abbia alcuna singolarità essenziale nell'interno o sul contorno dell'area. I suoi infinitesimi ed infiniti nell'interno dell'area saranno certamente in numero finito, altrimenti (§. 52) la $w(z)$ avrebbe singolarità essenziali. Supponiamo che gli infinitesimi di $w(z)$ siano nei punti

$$a_1, \; a_2, \ldots a_r,$$

coi rispettivi ordini

$$m_1, \; m_2, \ldots m_r,$$

e i poli nei punti

$$b_1, \; b_2, \ldots b_s,$$

con ordini dati da

$$n_1, \; n_2, \ldots n_s.$$

La derivata logaritmica $\frac{w'(z)}{w(z)}$ non ha alcuna singolarità sul contorno, mentre nell'interno dell'area ha poli del 1.° ordine solo nei punti a, b con residui $+m$ nei primi, $-n$ nei secondi. Se estendiamo al contorno completo s dell'area l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w'(z)\,dz}{w(z)}$, otterremo dunque (§. 54):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w'(z)\,dz}{w(z)} = \sum_{k=1}^{k=r} m_k - \sum_{h=1}^{h=s} n_h.$$

Se computiamo ciascun infinitesimo e ciascun polo tante volte quante unità sono nel suo ordine, e poniamo

$$\sum m_k = N_0 \ , \ \sum n_h = N_\infty \ ,$$

sarà evidentemente N_0 il numero totale degli infinitesimi, N_∞ quello dei poli, e risulterà la formola notevolissima, dovuta a Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S d \log w = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{w'(z)\,dz}{w(z)} = N_0 - N_\infty \, .$$

L'integrale del primo membro prende anche il nome di *indicatore logaritmico* di Cauchy; il suo computo fa conoscere la differenza fra il numero delle radici e il numero dei poli di $w(z)$ nell'area, *supposto che non vi siano nè radici nè poli sul contorno.*

Supponiamo in particolare che la $w(z)$ sia uniforme su tutta la sfera complessa e non abbia ivi che singolarità polari [1], le quali saranno quindi in numero finito. La sua derivata logaritmica avrà un numero finito di poli del 1.° ordine e la somma di tutti i suoi residui sarà nulla (§. 54). Dunque: *Se una funzione $w(z)$ è uniforme su tutta la sfera complessa e non ha che singolarità polari, essa diventa tante volte zero quante volte infinita.*

Se applichiamo questo teorema al caso di una funzione razionale intera

$$w(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m \, ,$$

siccome essa ha una sola singolarità polare in $z = \infty$ e questa d'ordine m, ne deduciamo il teorema fondamentale dell'algebra: *Ogni equazione di grado m ha precisamente m radici.*

§. 57.

Formola $\Omega_1 - \Omega_0 = 2\pi(N_0 - N_\infty)$.

Alla formola di Cauchy per l'indicatore logaritmico si può dare un'altra forma, che è utile osservare.

---

[1] Si vedrà fra breve che una tale funzione è necessariamente razionale in z. (Vedi §. 61).

Supponiamo per un momento che il contorno sia unico, cioè l'area semplicemente connessa. Percorrendo il contorno, $w(z)$ ha in ogni punto un modulo ρ (non nullo nè infinito) perfettamente determinato ed un argomento Ω, determinato a meno di multipli di 2π. Ma se in un punto iniziale M_0 del contorno scegliamo un determinato Ω_0 fra i valori possibili dell'argomento, lungo tutto il percorso sarà Ω perfettamente determinato dalla legge di continuità, sicchè dopo percorso il contorno a partire da M_0 (in senso positivo), al ritorno in M_0, Ω avrà acquistato un valore Ω_1 differente da Ω_0 per multipli di 2π; ora dico che si avrà precisamente

$$\Omega_1 - \Omega_0 = 2\pi(N_0 - N_\infty). \tag{5}$$

E infatti abbiamo

$$w(z) = \rho e^{i\Omega},$$

$$d \log w(z) = d \log \rho + i\, d\Omega,$$

onde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S d \log w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S d \log \rho + \frac{1}{2\pi}\int_S d\Omega.$$

Ora il primo integrale è nullo perchè $\log \rho$, essendo preso nel senso aritmetico, riprende al ritorno il valore iniziale ed il secondo è eguale appunto a $\frac{1}{2\pi}(\Omega_1 - \Omega_0)$, ciò che dimostra la formola:

Manifestamente, se l'area fosse a più contorni, avremmo per risultato d'integrazione una somma di tante differenze come $\Omega_1 - \Omega_0$, cioè

$$\sum(\Omega_1 - \Omega_0) = 2\pi(N_0 - N_\infty).$$

In particolare si consideri un infinitesimo $z = a$ d'ordine n per $w(z)$ e se ne prenda un intorno abbastanza piccolo, descrivendo ad esempio un cerchietto col centro in a, perchè in esso e sul contorno non vi siano altri infinitesimi nè infiniti della funzione. Se con z percorriamo il contorno s del cerchio, l'argomento di w crescerà di $2\pi n$, ossia nel piano w la congiungente l'origine coll'indice di w compirà n giri, in senso positivo, attorno all'origine, mentre z ne compie uno solo. Lo stesso vale evidentemente se $z = a$ è invece un polo d'ordine n; soltanto gli n giri si compirebbero allora in senso negativo. Di qui si intende facilmente che nel detto intorno di $z = a$ la funzione $w(z)$ riprenderà precisamente n volte ogni valore abbastanza prossimo a zero (o ad infinito).

Per precisare la cosa e dimostrarla rigorosamente, ritorniamo alla formola generale di Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{w'(z)}{w(z)}\,dz = N_0 - N_\infty,$$

supponendo naturalmente soddisfatte le condizioni del §. 56 per la validità della formola. Poichè il modulo di w sul contorno non si annulla, ammetterà un minimo $m > 0$, talchè su tutto il contorno sarà

$$|w_s| \geq m.$$

Sia w_1 una costante qualunque di modulo

$$|w_1| < m;$$

la differenza

$$w(z) - w_1$$

non è nulla (nè infinita) al contorno e nell'interno ha evidentemente lo stesso numero di poli di $w(z)$ cioè N_∞. Sia N'_0 il numero degli infinitesimi di questa differenza nel campo; avremo per la formola di Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{w'(z)}{w(z) - w_1}\,dz = N'_0 - N_\infty. \tag{6}$$

Facciamo variare w_1 con continuità, sempre supponendo $|w_1| < m$. Il primo membro della (6) è una funzione continua di w_1, poichè la funzione sotto il segno integrale è funzione *finita* e continua di w_1, la differenza $w(z) - w_1$, non annullandosi mai; d'altra parte, essendo il suo valore un numero intero, non potrebbe variare che in modo discontinuo. Se ne conclude che per tutti i valori di w_1 con $|w_1| < m$ l'indicatore logaritmico serba sempre lo stesso valore, onde si ha

$$N'_0 = N_0.$$

Abbiamo dunque il teorema: *Se la funzione $w(z)$ è regolare in tutti i punti di un'area connessa* A, *incluso il contorno, eccetto in un numero finito di poli nell'interno, e sul contorno il suo modulo si serba sempre superiore od eguale ad un minimo positivo m, nell'interno prenderà ogni valore di modulo $< m$ precisamente tante volte quante volte si annulla.*

Se si applica il teorema stesso alla funzione inversa $\frac{1}{w(z)}$, si vede

che, indicando con M il massimo modulo di $w(z)$ sul contorno: *la* $w(z)$ *prenderà nell' interno tante volte ogni valore di modulo* $>$ M *quante volte diviene infinita.*

Si aggiunga che, fatta eccezione al più da un numero finito di valori, la $w(z)$ prenderà ogni valore w di modulo $|w| < m$ precisamente N_0 volte *distinte*, ed ogni valore di modulo $>$ M precisamente N_∞ volte *distinte.* E invero se la differenza $w(z) - w_1$ diventa in qualche punto infinitesima d'ordine superiore al primo, ivi si annulla la derivata $w'(z)$; ma gli infinitesimi della derivata nell'area sono in numero finito.

Come caso particolare del risultato superiore, abbiamo il teorema: *Nell' intorno di un infinitesimo (o di un infinito) di ordine n la* $w(z)$ *prende ogni valore di modulo sufficientemente piccolo (o sufficientemente grande) precisamente n volte distinte.*

§. 58.

Inversione delle serie.

I risultati ultimamente conseguiti ci conducono a parlare della inversione delle funzioni o delle serie di potenze. Sia $w = f(z)$ una funzione analitica di z; domandiamo se si potrà considerare inversamente z come funzione analitica di w. Essendo $z = \gamma$ un punto regolare per $w(z)$, si abbia

$$w = P(z-\gamma) = a_0 + a_1(z-\gamma) + a_2(z-\gamma)^2 + \dots$$

e supponiamo dapprima che in γ non si annulli $f'(z)$, che sia cioè

$$a_1 \neq 0 .$$

Cangiando $z - \gamma$ in z e $w - a_0$ in w, scriviamo

$$w = a_1 z + a_2 z^2 + \dots , \text{ con } a_1 \neq 0 . \tag{7}$$

Facciamo un intorno così piccolo di $z = 0$, descrivendo un cerchio C col centro in 0, che in C e sul contorno w non diventi nè zero, nè infinita. Se m è il minimo modulo di w sul contorno s, la $f(z)$ prenderà entro C ogni valore w_1 di modulo $|w_1| < m$ una ed una sola volta in un punto z_1. Descrivendo nel piano w, col centro in $w = 0$, un cerchio C′ di raggio m, ad ogni punto w_1 entro C′ corrisponderà un solo punto z_1 entro C; di-

mostreremo che z_1 è funzione analitica di w_1, regolare nell'intorno di $w_1 = 0$. La funzione:

$$z \frac{f'(z)}{f(z) - w_1}$$

diventa entro C infinita del primo ordine solo in $z = z_1$ col residuo z_1 [1], onde avremo

$$z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{z f'(z)}{f(z) - w_1} dz . \tag{8}$$

Mentre z percorre il contorno è

$$|f(z)|_s \geq m \ , \quad |w_1| < m \ ,$$

onde $\left| \frac{w_1}{f(z)} \right| < 1$ e possiamo sviluppare

$$\frac{1}{f(z) - w_1} = \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w_1}{f(z)}}$$

nella serie $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{w_1^n}{f^{(n+1)}(z)}$. Sostituendo nella (8), e integrando termine a termine la serie convergente in egual grado, risulterà

$$z_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n w_1^n ,$$

avendo posto

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{z f'(z)}{f^{n+1}(z)} dz , \tag{9}$$

ove si osserverà che il primo coefficiente α_0 è nullo. Abbiamo dunque il teorema: *Se w è sviluppabile per una serie* (7) *di potenze* P(z) *col primo*

---

[1] In generale, se in un prodotto

$$\varphi(z) \ \psi(z)$$

il primo fattore è regolare in un punto $z = a$, ed il secondo vi ha un polo del 1.° ordine col residuo R, il residuo del prodotto sarà R $\varphi(a)$, poichè esso è dato da

$$\lim_{z=\alpha} \{(z-a) \varphi(z) \psi(z)\} = \varphi(a) \lim_{z=a} \{(z-a) \psi(z)\} .$$

coefficiente $a_1 \neq 0$, *si può inversamente esprimere, in un intorno di* $w=0$, *la* z *come una serie di potenze per* w:

$$z = \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3 + \dots \tag{10}$$

I coefficienti α_n sono definiti dalle (9), ma possono anche calcolarsi algebricamente sostituendo nel secondo membro della (10) per w la serie (7) e sviluppando, secondo il teorema del §. 48, in serie di potenze di z. Identificando la serie del secondo membro con z, si ottiene una serie di equazioni lineari ricorrenti nelle α:

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_1 &= 1 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1^2 &= 0 \\ \alpha_1 a_3 + 2\,\alpha_2 a_1 a_2 + \alpha_3 a_1^3 &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

che determinano successivamente i coefficienti α.

Supponiamo ora il caso più generale che

$$w = f(z)$$

abbia in $z=0$ un infinitesimo d'ordine n, onde avremo

$$w = z^n (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots), \text{ con } a_1 \neq 0. \tag{11}$$

Poniamo $w = t^n$ ed, estraendo la radice n^{ma}, avremo

$$t = z \sqrt[n]{a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots}\,.$$

Nell'intorno di $z=0$ il radicale, che è funzione *regolare* di z perchè la funzione sotto il segno non si annulla per $z=0$, si può convertire in una serie di potenze, onde scriviamo

$$t = z\,(\alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \dots), \; \alpha_1 \neq 0.$$

Pel risultato precedente, se consideriamo z come funzione di t, assumendo $z=0$ per $t=0$, la z è funzione regolare di t:

$$z = \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \dots;$$

sostituendo per t il suo valore $w^{\frac{1}{n}}$, abbiamo z espressa per w colla serie

$$z = \beta_1 w^{\frac{1}{n}} + \beta_2 w^{\frac{2}{n}} + \dots \tag{12}$$

Per ogni valore di w, interno al cerchio di convergenza di questa serie, abbiamo n valori distinti per z, che girando attorno a $z=0$ si permutano ciclicamente fra loro e costituiscono n *rami* di una medesima funzione analitica di w [1]. Il punto $w=0$ è un punto *critico algebrico* per z (punto di diramazione). Se indichiamo con

$$z_1, z_2, \ldots z_n$$

gli n rami di z, corrispondenti ad un valore di w, ogni funzione razionale intera e simmetrica di $z_1, z_2, \ldots z_n$ sarà una funzione di w regolare in $w=0$. Ciò si può vedere anche direttamente, dimostrando la cosa per le funzioni simmetriche elementari (somme delle potenze simili):

$$z_1^r + z_2^r + \ldots + z_n^r \quad (r \text{ intero positivo}).$$

E invero la funzione

$$\frac{z^r f'(z)}{f(z) - w},$$

entro il cerchio C, ha poli del 1.° ordine in $z_1, z_2, \ldots z_n$ coi residui $z_1^r, z_2^r, \ldots z_n^r$, onde risulta

$$z_1^r + z_2^r + \ldots + z_n^r = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{z^r f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

Il secondo membro è evidentemente una funzione regolare di w nell'intorno di $w=0$.

Capitolo VI.

Funzioni uniformi in tutto il piano complesso. — Loro sviluppi in serie di frazioni parziali secondo Cauchy. — Teorema di Mittag-Leffer. — Sviluppi in prodotti infiniti per le trascendenti intere.

§. 59.

Trascendenti intere.

Procediamo ora allo studio ed alla classificazione delle funzioni analitiche uniformi esistenti in tutto il piano (su tutta la sfera complessa),

---

[1] Essendo $a \neq 0$ un punto qualsiasi nell'intorno considerato di w, si può sviluppare

$$t = \left\{(w-a) + a\right\}^{\frac{1}{n}}$$

per potenze intere e positive di $w-a$, quindi anche per z si ha nell'intorno di $w=a$ una serie di potenze: $z = \mathrm{P}(w-a)$.

e dimostriamo in primo luogo il teorema fondamentale: *Ogni funzione analitica, uniforme e non costante su tutta la sfera complessa, deve avere almeno un punto singolare.*

Nel caso contrario il suo modulo si manterrebbe su tutta la sfera inferiore ad una quantità fissa M. Descriviamo in tale ipotesi nel piano complesso, col centro nell'origine, un cerchio C di raggio R grande ad arbitrio; la nostra funzione $w(z)$ è quivi finita, continua e monodroma e però sviluppabile in una serie di potenze

$$w(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

convergente in tutto il piano. Il coefficiente a_n è dato, per le formole (5) del §. 43, pag. 124, dall'integrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

esteso al contorno s del cerchio. Ora, per ipotesi, si ha sempre $|w|_s < \mathrm{M}$ ed, applicando la formola di Darboux, ne deduciamo

$$|a_n| < \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^n},$$

e siccome, se $n > 0$, all'ingrandire di R il secondo membro tende a zero, mentre il primo ha un valore fisso, ne deduciamo

$$a_n = 0 \quad \text{per } n = 1, 2, 3 \ldots,$$

e però $w(z) = a_0$, cioè costante contro l'ipotesi.

Le funzioni uniformi in tutto il piano, avendo necessariamente qualche singolarità, potranno classificarsi a seconda del numero e della specie delle loro singolarità. Il caso più semplice sarà quello in cui si abbia una sola singolarità e questa sia in $z = \infty$, talchè in qualunque campo finito del piano la funzione sarà sempre finita, continua e monodroma. Allora $w(z)$ è sviluppabile in una serie

$$w(z) = \sum a_n z^n$$

convergente in tutto il piano, e la singolarità in $z = \infty$ sarà polare od essenziale, secondo che la serie si arresterà o no ad un polinomio. Nel secondo caso la funzione dicesi una *trascendente intera* e si indica, con Weierstrass, col simbolo $\mathrm{G}(z)$.

Abbiamo dunque il risultato: *Una funzione uniforme in tutto il piano, con un solo punto singolare in $z = \infty$, è un polinomio razionale intero in z, ovvero una trascendente intera $G(z)$, secondo che la singolarità è polare od essenziale.*

Notiamo che dalla dimostrazione data del teorema fondamentale risulta che, fissato un numero positivo M grande a piacere, in qualunque intorno di $z = \infty$ una trascendente intera $G(z)$ assume anche dei valori di modulo $> M$. Nel caso particolare di un polinomio si può fare anzi l'intorno in guisa che tutti i valori della funzione abbiano modulo $> M$.

Fra le trascendenti intere ve ne sono alcune, come

$$e^z \quad , \quad e^{\operatorname{sen} z} ,$$

che non solo non diventano mai infinite a distanza finita, ma nemmeno si annullano. È facile vedere che l'espressione generale di una siffatta trascendente intera $G(z)$ sarà:

$$G(z) = e^{G_1(z)}, \tag{1}$$

dove $G_1(z)$ è, essa stessa, una trascendente intera. E infatti, se $G(z)$ non si annulla mai, la sua derivata logaritmica

$$\frac{G'(z)}{G(z)}$$

è una trascendente intera $G_2(z)$, e però integrando si ha

$$\log G(z)^{(1)} = \int G_2(z)\, dz = G_1(z),$$

e passando dai logaritmi ai numeri, risulta appunto la (1).

§. 60.

Punti singolari essenziali.

Se la funzione $w(z)$ uniforme (in una certa area) ha nel punto $z = a$ una singolarità essenziale isolata essa può porsi, come sappiamo, nell'intorno del punto, sotto la forma

$$w(z) = P(z-a) + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

---

(1) La polidromia proveniente dal segno logaritmico è qui soltanto apparente, perchè $G(z)$ non diventa mai nè zero nè infinita.

La serie discendente converge in tutto il piano, salvo in $z = a$, ed è quindi una trascendente intera *dell'argomento* $\frac{1}{z-a}$, che inoltre si annulla pel valore 0 dell'argomento, cioè per $z = \infty$. Indicando una tale trascendente intera col simbolo

$$g\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

avremo dunque

$$w(z) = \mathrm{P}(z-a) + g\left(\frac{1}{z-a}\right). \tag{2}$$

Da questa osservazione, e da quanto abbiamo detto al §. precedente relativamente alle trascendenti intere, facilmente possiamo trarre una dimostrazione del teorema di Weierstrass: *In vicinanza di un punto singolare essenziale isolato, e per quanto piccolo intorno si prenda di esso, la funzione assume anche valori di modulo tanto grande quanto si vuole ed anche valori prossimi di tanto poco quanto si vuole ad una quantità finita* A *prefissata ad arbitrio.*

Che la $w(z)$ assuma, in qualunque prossimità di $z = a$, anche valori di modulo più grande di qualunque quantità assegnata risulta subito dall'osservare che nel secondo membro della (2), per z prossimo ad a, il primo termine $\mathrm{P}(z-a)$ assume valori prossimi al termine iniziale della serie, mentre $g\left(\frac{1}{z-a}\right)$ assume (§. 59) anche valori di modulo grande quanto si vuole. Per dimostrare poi la cosa anche pei valori finiti A, si consideri la funzione

$$\frac{1}{w(z) - \mathrm{A}}, \tag{3}$$

che avrà in $z = a$ certamente una singolarità essenziale, la quale sarà inoltre isolata, se in prossimità di $z = a$ non si annullerà infinite volte la differenza $w(z) - \mathrm{A}$. Ma in questo secondo caso sarebbe già provata la nostra asserzione: anzi non solo $w(z)$ si approssimerebbe quanto si vuole ad A, ma assumerebbe effettivamente infinite volte il valore A. Nel primo caso poi, la singolarità essenziale $z = a$ per la funzione (3) essendo isolata, la funzione stessa deve prendere in qualsiasi intorno di a valori di modulo grande ad arbitrio o, ciò che è lo stesso, deve $w(z)$ accostarsi ad A di tanto poco quanto si vuole.

Questo teorema di Weierstrass fa già comprendere la profonda differenza che esiste fra una singolarità polare ed una essenziale. Picard ha precisato vieppiù questo risultato, dimostrando che: *In vicinanza di un punto singolare essenziale la funzione non solo si accosta, ma prende effettivamente infinite volte tutti i valori possibili, fatta eccezione da due speciali valori al massimo* [1].

Ritorneremo più tardi su questo teorema, che per ora enunciamo soltanto. Qui osserviamo ancora che il teorema di Weierstrass sussiste non solo per singolarità essenziali isolate, ma anche (ed a più forte ragione) per singolarità limiti di infinite altre singolarità (Cf. §. 52).

§. 61.

Funzioni uniformi con un numero finito di singolarità.

Continuando nella classificazione delle funzioni uniformi in tutto il piano, consideriamo ora quelle che hanno in tutto il piano complesso un numero finito di singolarità. Le singolarità a distanza finita siano nei punti

$$a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\ a_n\,;$$

potrà aversi ancora eventualmente nella funzione $w(z)$ una singolarità all'infinito. Nell'intorno di $z=a_1$ la funzione $w(z)$ si pone sotto la forma

$$w(z) = \mathrm{P}(z-a_1) + g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right),$$

la $g_1(t)$ indicando una trascendente intera di t annullantesi per $t=0$, ovvero un polinomio, secondo che la singolarità in $z=a_1$ è essenziale, o polare. Se poniamo

$$w(z) - g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) = w_1(z)\,,$$

la $w_1(z)$ sarà regolare in $z=a_1$ ed avrà le rimanenti singolarità di $w(z)$. Procedendo nel medesimo modo sopra $w_1(z)$, avremo

$$w_1(z) = w_2(z) + g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right)$$

---

[1] Cf. gli esempi discussi al §. 52.

e la $w_2(z)$ non avrà singolarità che in

$$z = a_3\,,\ a_4 \ldots a_n\,,\ (\infty)\,.$$

Così procedendo, troveremo

$$w(z) = g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \ldots + g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + f(z)\,,$$

dove la $f(z)$ non avrà altra singolarità che in $z = \infty$, se pure esisteva in $w(z)$. La $f(z)$ si ridurrà quindi ad una costante, ovvero ad un polinomio, o in fine ad una trascendente intera $G(z)$. Includendo in quest'ultimo caso generale gli altri due, scriveremo

$$(4)\qquad w(z) = g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \ldots + g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + G(z)\,.$$

Se le singolarità saranno soltanto polari, le funzioni $g_1, g_2 \ldots g_n$, G saranno altrettanti polinomii interi nei loro argomenti. E poichè una funzione uniforme su tutta la sfera e che non ha singolarità essenziali non può avere un numero *infinito* di singolarità polari, ne concludiamo: *Una funzione uniforme su tutta la sfera complessa, e dotata soltanto di singolarità polari, è una funzione razionale di z.* L'inversa è evidente [1].

Si osservi poi che la formola (4), applicata al caso attuale, dà precisamente quella decomposizione di una funzione razionale in frazioni parziali che si considera nell'algebra e si utilizza nel calcolo per l'integrazione delle funzioni razionali.

È evidente che, dati ad arbitrio i punti in numero finito $a_1, a_2, \ldots a_n$, ed assegnate ad arbitrio le trascendenti intere

$$g_1\,,\ g_2\,,\ \ldots\ g_n\,,$$

si può costruire colla (4) una funzione uniforme in tutto il piano coi soli punti singolari $a_1, a_2 \ldots a_n$, nei quali si comporterà rispettivamente come le trascendenti

$$g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)\,,\ g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) \ldots g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right).$$

---

[1] Si noti come dalla espressione effettiva di una funzione razionale espressa pel quoziente di due polinomii si verifichi subito il teorema, già dimostrato al §. 56, che una tale funzione diventa tante volte zero quante volte infinita.

Osserviamo in fine che, applicando i ragionamenti superiori ad una funzione $w(z)$ uniforme non in tutto il piano ma solo in un'area data A, con un numero finito di punti singolari

$$a_1 , a_2 , \ldots a_n ,$$

nell'interno dell'area la $w(z)$ potrà porsi sotto la forma

$$(5) \qquad w(z) = g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \ldots + g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + f(z) ,$$

la $f(z)$ essendo una funzione uniforme e regolare in tutta l'area.

§. 62.

Metodo di Cauchy per gli sviluppi in serie di funzioni con infinite singolarità.

Passiamo ora a considerare le funzioni uniformi in tutto il piano e con un numero *infinito* di singolarità, le quali abbiano però come unico punto limite il punto $z = \infty$, tali cioè che in qualunque campo tutto situato a distanza finita capiti soltanto un numero finito di punti singolari (essenziali o polari) e soltanto cresca all'infinito questo numero, ingrandendo all'infinito il campo.

Consideriamo un tale campo finito (racchiuso da un solo contorno, ossia semplicemente connesso) supponendo per altro che *sul contorno non vi sia alcun punto singolare* della nostra funzione $w(z)$. Nell'interno di C cadrà un numero finito di punti singolari

$$a_1 , a_2 , \ldots a_n$$

e in tutto C potremo porre, secondo la (5), la $w(z)$ sotto la forma

$$(6) \qquad w(z) = \sum_{r=1}^{r=n} g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) + f(z) ,$$

ove $f(z)$ è regolare nei punti di C (contorno incluso). Prendiamo un punto z' interno a C, ma distinto dai punti singolari, e cerchiamo di calcolare il valore di w in z' per mezzo dei valori di w al contorno s del campo, estendendo così la formola di Cauchy al caso attuale, ove si hanno inter-

namente al campo singolarità. Alla $f(z)$, che è regolare in C, possiamo applicare la formola di Cauchy

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)\,dz}{z-z'},$$

che per la (6) diventa

$$w(z') - \sum_{r=1}^{r=n} g_r\left(\frac{1}{z'-a_r}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=n}\int_s \frac{1}{z-z'}\,g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)dz.$$

Ora facilmente vediamo che ciascun integrale della somma del secondo membro

$$\int_s \frac{1}{z-z'}\,g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)dz$$

è nullo, poichè nella regione del piano esterna ad s la funzione sotto il segno

$$\frac{1}{z-z'}\,g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

è dappertutto regolare e in $z=\infty$ è infinitesima del 2.° ordine almeno [1], onde il suo residuo è nullo. La formola precedente diventa quindi semplicemente

$$(7) \qquad w(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'} + \sum_{r=1}^{r=n} g_r\left(\frac{1}{z'-a_r}\right)$$

e non differisce dall'ordinaria formola di Cauchy che per la parte relativa alle singolarità.

Immaginiamo ora che il campo C ingrandisca all'infinito, passando per una serie *discreta* di configurazioni in guisa che, per ogni speciale configurazione, il contorno s di C non contenga mai alcun punto singolare, ma del resto con legge arbitraria.

La formola (7) rimarrà sempre applicabile, purchè z' non coincida con un punto singolare a; soltanto il numero dei punti a che cadranno entro il campo, cioè il numero dei termini nella somma del secondo membro della (7), andrà sempre più crescendo.

---

[1] Si ricordi che la trascendente intera $g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$ si annulla in $z=\infty$.

Ora se la legge d'accrescimento del contorno è tale che, mantenendo z' entro un'area A finita arbitraria, l'integrale

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'}$$

converga equabilmente (in egual grado) verso zero, dalla (7), con passaggio al limite, otterremo la formola

$$w(z') = \sum_1^\infty g_r \left(\frac{1}{z'-a_r}\right) \tag{8}$$

e la serie del secondo membro sarà, in ogni area finita A, convergente in egual grado, quando ne siano esclusi con piccoli intorni i punti singolari a. Così otteniamo per la funzione $w(z)$ uno sviluppo che vale in tutto il piano, a qualunque distanza finita, e ne pone in evidenza le singolarità, analogamente alla decomposizione in frazioni parziali di una funzione razionale. Si noti però che la convergenza della serie (8) sarà in generale subordinata all'ordine dei termini, i quali dovranno essere raggruppati al modo stesso come entrano i punti singolari nel campo C crescente secondo la legge assegnata.

§. 63.

Due casi particolari.

Per le applicazioni, che dovremo fare nel seguito, di questo processo generale sono particolarmente importanti due casi, in cui si riscontra effettivamente che si ha

$$\lim \int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = 0 \text{ [1]}. \tag{10}$$

1.° Supponiamo che l'ingrandimento del contorno s proceda in guisa che tutti i suoi punti si allontanino all'infinito dall'origine e sul contorno via via crescente si mantenga sempre

$$|w(z)|_s < Q,$$

[1] Scrivendo questa formola sottintendiamo che, variando z' in un'area qualunque finita, il limite deve essere preso per l'ingrandire infinito del contorno s e la convergenza a zero dell'integrale deve aver luogo equabilmente.

essendo Q una quantità finita. Diciamo che allora *basterà dimostrare che si ha*

$$\lim \int_s \frac{w'(z)\,dz}{z} = 0\,,$$

per essere sicuri che sussisterà la (10) *e varrà quindi lo sviluppo in serie* (8).

Prendiamo ora un'area A comunque grande, ma finita, nella quale manterremo z', talchè $|z'|$ si manterrà inferiore ad una quantità finita K:

$$|z'| < \mathrm{K}\,.$$

Da un certo punto in poi, movendosi z sul contorno s, risulterà per le ipotesi fatte

$$|z| > |z'|\,, \quad \text{cioè} \quad \frac{|z'|}{|z|} < 1\,,$$

onde potremo sviluppare in serie $\frac{w(z)}{z-z'}$ colla formola:

$$\frac{w(z)}{z-z'} = \frac{w(z)}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \frac{w(z)}{z^{n+1}}$$

ed avremo, a causa della convergenza in egual grado:

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = \int_s \frac{w(z)\,dz}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}\,.$$

Se dimostriamo che ingrandendo il contorno s, possiamo rendere

$$(11) \qquad \left| \sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}} \right| < \varepsilon\,,$$

essendo ε una quantità comunque piccola, sarà provata la nostra asserzione.

Ora si ha

$$(12) \qquad \left| \sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=1}^{n=\infty} \left| z'^n \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{K}^n \left| \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}} \right|.$$

Calcoliamo un limite superiore del modulo dell'integrale $\int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}$, riportando colla sostituzione

$$z = \frac{1}{\zeta}$$

il contorno grandissimo s ad un contorno piccolissimo σ attorno all'origine, ed applicando la formola di Darboux. Abbiamo

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}} = -\int_\sigma w\left(\frac{1}{\zeta}\right)\zeta^{n-1}\,d\zeta$$

e, indicando con ρ la massima distanza dell'origine dai punti di σ e con λ il perimetro di σ, risulta

$$\left|\int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}\right| \leq Q\,\rho^{n-1}\lambda\,,$$

onde la (12) diventa

$$\left|\sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}\right| \leq KQ\lambda\,\frac{1}{1-K\rho}\,.$$

Siccome tanto ρ quanto λ convergono verso zero, risulterà, da un certo punto in poi, soddisfatta la (11) c. d. d.

2.° Supponiamo che: *il contorno s ingrandisca per forme circolari, col centro nell'origine, e sul contorno crescente del cerchio non solo* $|w(z)|$ *si mantenga finito ma diventi, da un certo punto in poi, minore di qualunque quantità assegnabile. Dico che sarà allora soddisfatta la* (10).

Per quanto abbiamo visto sopra basta provare che si ha

$$\lim \int_s \frac{w(z)\,dz}{z} = 0\,,$$

ciò che è un'immediata conseguenza della formola di Darboux e della nostra ipotesi.

Quest'ultimo risultato conduce ad applicare, con una conveniente modificazione, il processo di sviluppo in serie anche nel caso in cui il modulo di $w(z)$ sul contorno crescente del cerchio, anzichè diminuire, cresce all'infinito comparabilmente ad una potenza del raggio R, in guisa che,

per un valore sufficientemente grande del numero intero n, risulti da un certo punto in poi $\left|\frac{w(z)}{z^n}\right|$ piccolo a piacere. Potremo allora applicare lo sviluppo alla funzione $\frac{w(z)}{z^n}$ e risulterà

$$w(z) = z^n \sum_1^\infty g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right).$$

Se sviluppiamo

$$z^n = [(z-a_r)+a_r]^n$$

per potenze di $z-a_r$ col binomio di Newton, vediamo che il prodotto

$$z^n\, g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

si converte in una nuova trascendente intera

$$g'_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

aumentata di un polinomio $P_{a_r}(z)$ di grado $n-1$ in z, onde avremo per $w(z)$, lo sviluppo

$$w(z) = \sum_1^\infty \left\{ g'_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) + P_{a_r}(z) \right\}. \tag{13}$$

L'aggiunta dei polinomi $P_{a_r}(z)$ nei singoli termini della serie a destra ha per effetto di assicurarne la convergenza, artificio che ritroveremo fra breve per stabilire il teorema di Mittag-Leffler (§. 65).

§. 64.

Sviluppi in serie delle funzioni $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$, $\cot z$.

Applichiamo il processo generale descritto alle due funzioni

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z}, \quad \cot z,$$

i cui punti singolari sono nei punti

$$z = n\pi,$$

percorrendo n i numeri interi, positivi e negativi; per l'una e per l'altra funzione la singolarità è polare del 1.° ordine col residuo

$$(-1)^n \text{ per } \frac{1}{\operatorname{sen} z}, \quad +1 \text{ per } \cot z,$$

come risulta dalla regola alla fine del §. 53. La trascendente intera g_n si riduce qui rispettivamente a

$$\frac{(-1)^n}{z-n\pi}, \quad \frac{1}{z-n\pi}.$$

Per campo C, che dovremo poi fare ingrandire all'infinito, prendiamo il rettangolo racchiuso dalle rette

$$x = \pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad y = \pm k,$$

dove m è un numero intero positivo e k una costante qualunque; facendo crescere all'infinito sì m che k, il contorno s si allontanerà in ogni senso all'infinito.

D'altra parte, posto

$$z = x + iy,$$

si ha

$$\left|\frac{1}{\operatorname{sen} z}\right| = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}}, \quad |\cot z| = \frac{\sqrt{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}}$$

e si vede subito che i moduli delle due funzioni rimangono sempre inferiori ad una quantità fissa sul contorno crescente. Basterà dunque verificare (§. 63) che gli integrali

$$\int \frac{dz}{z \operatorname{sen} z}, \quad \int \frac{\cot z\, dz}{z},$$

estesi al contorno del rettangolo, hanno per limite lo zero. Ora questi due integrali, a causa della simmetria del contorno rispetto all'origine e delle formole:

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z, \quad \cot(-z) = -\cot z,$$

sono assolutamente nulli, il che prova quanto volevamo [1]. Sono quindi

---

[1] Allo stesso risultato si arriva anche subito, calcolando la somma dei residui delle due funzioni sotto il segno nell'interno del rettangolo.

applicabili i risultati del primo caso discusso al §. precedente e poichè, all'ingrandire del contorno, i poli entrano due a due, associandosi ad ogni polo il suo simmetrico, avremo le formole:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \lim_{n=\infty} \sum_{-n}^{n} \frac{(-1)^r}{z - r\pi}$$

$$\cot z = \lim_{n=\infty} \sum_{-n}^{n} \frac{1}{z - r\pi},$$

ovvero

$$(14) \qquad \frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right\} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

$$(15) \qquad \cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right\} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

e le serie del secondo membro, in qualunque campo a distanza finita, da cui siano esclusi i poli, sono convergenti in egual grado. Derivando la (15) termine a termine, come è lecito (§. 47), abbiamo l'altro sviluppo per $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}$:

$$(16) \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{(z - n\pi)^2} + \frac{1}{(z + n\pi)^2} \right\}.$$

Dalla (16), facendo $z = \frac{\pi}{2}$, si ottiene

$$\frac{\pi^2}{4} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \right\},$$

che si può scrivere

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots,$$

formola che ci dà la somma delle inverse dei quadrati dei numeri dispari. D'altronde si ha

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

e la precedente si può anche scrivere

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{17}$$

risultato che dovremo applicare in seguito.

Questa non è del resto che un caso particolare delle formole che dimostrano come il valore della serie

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots + \frac{1}{m^{2n}} + \ldots$$

sta in rapporto commensurabile con π^{2n}, dipendente dai così detti *numeri di Bernoulli.*

Stabiliremo rapidamente queste formole ricorrendo alla (15), che scriviamo

$$z \cot z = 1 + \sum_1^\infty \frac{2z^2}{z^2 - n^2\pi^2} = 1 - \sum_1^\infty \frac{2z^2}{n^2\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}}.$$

Per $|z| < \pi$ possiamo sviluppare il secondo membro in serie di potenze per z, applicando la formola

$$\frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{z^{2r}}{n^{2r}\pi^{2r}},$$

e ricordando i risultati generali del §. 48. Otteniamo così

$$z \cot z = 1 - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{S_{2n}}{\pi^{2n}} z^{2n};$$

e ponendo

$$B_n = \frac{2\, S_{2n} \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2n)}{(2\pi)^{2n}},$$

potremo scrivere

$$z \cot z = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n (2z)^{2n}}{2 \,.\, 3 \ldots (2n)}.$$

Dall'identità che ne deriva

$$z\left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \ldots\right) =$$

$$= \left(z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} \ldots\right)\left(1 - \frac{B_1 (2z)^2}{2} - \frac{B_2 (2z)^4}{2.3.4} \ldots\right),$$

paragonando dall'una parte e dall'altra i coefficienti delle medesime potenze di z, si calcolano per via ricorrente i *numeri di Bernoulli*

$$B_1 , B_2 , B_3 \ldots ,$$

che sono tutti numeri razionali; i primi valori sono

$$B_1 = \frac{1}{6} , \quad B_2 = \frac{1}{30} , \quad B_3 = \frac{1}{42} , \quad B_4 = \frac{1}{30} \ldots$$

§. 65.

Teorema di Mittag-Leffler.

Nei §§. precedenti abbiamo supposto *data* la funzione $w(z)$, uniforme in tutto il piano e con un numero finito di singolarità in ogni campo finito, e ne abbiamo cercato uno sviluppo in serie, che ne ponesse in evidenza le singolarità. Ora ci proponiamo il problema inverso e cioè vogliamo costruire una funzione con assegnate singolarità in punti prefissati. Supponiamo dato un insieme di punti isolato nel piano complesso; un tale insieme, per un teorema di Cantor, è sempre numerabile, cioè si possono ordinare i punti, distribuendo loro per indici i numeri $1, 2, 3 \ldots n \ldots$ Per ciascuno di questi punti

$$a_1 , a_2 , \ldots a_n \ldots$$

supponiamo inoltre assegnata una trascendente intera corrispondente

$$g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) , \quad g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) \ldots g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) \ldots$$

affatto ad arbitrio e domandiamo di: *costruire una funzione uniforme $w(z)$ in tutto il piano che nell'intorno di ciascun punto a_n dell'insieme si comporti come la trascendente intera assegnata $g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$* [1] *e non abbia alcun'altra singolarità, salvo nei punti dell'insieme derivato.*

La soluzione generale di questo problema è stata data da Mittag-Leffler [2], il quale l'ha risoluto affermativamente per ogni insieme iso-

---

[1] In modo cioè che la differenza

$$w(z) - g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

sia regolare in a_n.

[2] *Sur la représentation analytique des fonctions uniformes.* Acta Math., T. 4.

lato, costruendo effettivamente la funzione domandata. Questo risultato porta il nome di *teorema di Mittag-Leffler*. Noi non ne studieremo qui che un caso particolare, il caso cioè che vi sia un unico punto limite del gruppo delle singolarità assegnate, e, senza alterare la generalità, potremo supporre che quest'unico punto limite sia il punto $z = \infty$, cioè che in ogni campo finito cada un numero finito di punti a, ma questo numero vada crescendo oltre ogni limite all'ingrandire del campo. Numereremo allora i punti a, distribuendoli per ordine di modulo crescente, e quelli che abbiano eventualmente lo stesso modulo per ordine d'argomento crescente, talchè

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \ldots .$$

Supponiamo dapprima $|a_1| > 0$, cioè che il primo punto non cada nell'origine e quindi anche nessuno dei seguenti. La trascendente intera $g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$ dell'argomento $\frac{1}{z - a_n}$, nell'interno del cerchio C_n col centro nell'origine e di raggio $= |a_n|$, è finita, continua e monodroma e però sviluppabile in serie di Taylor

$$g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) = \sum_{r=0}^{r=\infty} B_{n,r}\, z^r , \tag{18}$$

avente il cerchio C_n per cerchio di convergenza. Ora prendiamo ad arbitrio una serie di numeri reali e positivi

$$\varepsilon_1 , \ \varepsilon_2 , \ldots \varepsilon_n \ldots ,$$

che assoggettiamo alla sola condizione di dar luogo ad una serie convergente

$$\sum \varepsilon_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$$

e fissiamo inoltre arbitrariamente una quantità positiva $\delta < |a_1|$. Nel cerchio C'_n concentrico ed interno a C_n e distante da C_n di δ la serie del secondo membro nella (18) è convergente in egual grado, e però si può trovare un numero intero m_n tanto grande che per tutti i punti z in C'_n risulti

$$\left| g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - \sum_{r=0}^{r=m_n} B_{n,r}\, z^r \right| < \varepsilon_n .$$

Se poniamo

$$-\sum_{r=0}^{r=m_n} B_{n,r}\, z^r = P_{m_n}(z)\,,$$

sarà $P_{m_n}(z)$ un polinomio di grado m_n in z, e per ogni z interno a C'_n avremo

$$(19) \qquad \left| g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \right| < \varepsilon_n\,.$$

Fissati così i numeri interi $m_1, m_2, \ldots m_n \ldots$, prendiamo a considerare la serie

$$(a) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \right\}$$

e dimostriamo che in qualunque campo a distanza finita, dal quale siano esclusi i punti a che vi capitano, essa è convergente in egual grado e rappresenta la funzione cercata. Basta evidentemente considerare il caso di un campo circolare, grande quanto si vuole, col centro nell'origine. Sia C' un tale cerchio di raggio R e siano

$$a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\ldots\ a_r$$

quei punti a (in numero finito) che distano dall'origine meno di $R+\delta$; scindiamo allora la nostra serie nella somma dei primi r termini e nella parte residua

$$(20) \qquad \sum_{n=r+1}^{n=\infty} \left\{ g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \right\},$$

della quale basterà mostrare la convergenza in egual grado in C. Poichè i punti

$$a_{r+1}\,,\ a_{r+2}\,,\ \ldots\ a_n \ldots$$

distano esternamente da C almeno di δ, a tutti i termini della (20) è applicabile la diseguaglianza (19) e quindi la serie dei moduli della (20) ha i termini inferiori a quelli della serie

$$\sum_{r+1}^{\infty} \varepsilon_n\,,$$

che per ipotesi è convergente. Così è provata la convergenza in egual

grado della serie (a) in qualunque campo finito (esclusi i punti a). Se poniamo

$$(21) \qquad w(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ g_n \left(\frac{1}{z-a_n} \right) + P_{m_n}(z) \right\},$$

sarà dunque $w(z)$ funzione finita, continua e monodroma della variabile complessa z in tutto il piano, esclusi i punti a (Cf. §. 47). In questi punti si comporterà nel modo voluto poichè, se dalla serie del secondo membro in (21) togliamo il termine corrispondente a $z = a_r$, la serie rimanente è una funzione regolare nell'intorno di a_r ed in questo intorno si ha per ciò

$$w(z) = g_r \left(\frac{1}{z-a_r} \right) + P(z-a_r).$$

Osserviamo poi che se avesse luogo il caso escluso, che cioè fra i punti singolari figurasse l'origine colla trascendente $g\left(\frac{1}{z}\right)$, basterebbe aggiungere questo termine nel secondo membro della (21), la quale possiamo dunque ritenere valga in tutti i casi.

Abbiamo così dimostrato il teorema di Mittag-Leffler, costruendo *una* funzione uniforme $w(z)$ con tutte e sole le singolarità volute. Ma evidentemente, di tali funzioni ne esistono infinite, differenti fra loro per trascendenti intere dell'argomento z. L'espressione più generale della funzione richiesta sarà dunque:

$$(22) \qquad w(z) = G(z) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ g_n \left(\frac{1}{z-a_n} \right) + P_{m_n}(z) \right\},$$

designando $G(z)$ una trascendente intera arbitraria.

§. 66.

Costruzione di una trascendente intera per prodotti infiniti.

Una questione, che si collega a quella risoluta nel §. precedente col teorema di Mittag-Leffler, e di non minore importanza, è quella di costruire una trascendente intera, noti che ne siano i punti e gli ordini di infinitesimo. Ci proponiamo di stabilire il teorema fondamentale dovuto a Weierstrass:

Dati ad arbitrio nel piano un numero infinito [1] *di punti, che abbiano per unico punto limite il punto* $z = \infty$, *si può sempre costruire una trascendente intera, che si annulli soltanto nei punti dati*

$$a_1 , a_2 , \ldots a_n , \ldots$$

con ordini corrispondenti assegnati pure ad arbitrio:

$$p_1 , p_2 , \ldots p_n , \ldots$$

Ricondurremo la costruzione della trascendente intera cercata al problema già risoluto nel §. precedente, mediante le seguenti considerazioni. Supponiamo che $G(z)$ sia una trascendente intera, che soddisfi alle condizioni volute. La sua derivata logaritmica

$$w(z) = \frac{G'(z)}{G(z)}$$

sarà una funzione uniforme in tutto il piano, che in tutti e soli i punti a_n avrà singolarità e precisamente poli del 1.° ordine coi termini corrispondenti d'infinito

$$\frac{p_n}{z - a_n} .$$

Una tale funzione $w(z)$ esiste, pel teorema di Mittag-Leffler, ed ha per espressione analitica

$$(23) \qquad w(z) = G_1(z) + \sum_1^\infty \left\{ \frac{p_n}{z - a_n} + P_{m_n}(z) \right\} ,$$

dove $P_{m_n}(z)$ è un polinomio in z di grado conveniente m_n. La trascendente intera cercata, se esiste, dovrà dedursi per integrazione da $w(z)$. Moltiplicando i due membri della (23) per dz e integrando da 0 a z per un medesimo cammino che eviti i punti a_n, potremo eseguire nel secondo membro, a causa della convergenza in egual grado, l'integrazione termine a termine ed otterremo

$$\int_0^z w(z)\, dz = G_2(z) + \sum_1^\infty \left\{ p_n \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + Q_{m_n}(z) \right\} ,$$

---

[1] Il caso di un numero finito di infinitesimi offre immediata risoluzione per mezzo di una funzione razionale intera.

dove $Q_{m_n}(z)$ è il polinomio di grado $m_n + 1$ in z, che nasce integrando $P_{m_n}(z)$. Passando dai logaritmi ai numeri, si ottiene

$$e^{\int_0^z w(z)\,dz} = e^{G_2(z)} e^{\sum_1^\infty \left\{ \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{p_n} + Q_{m_n}(z) \right\}},$$

ovvero:

$$e^{\int_0^z w(z)\,dz} = e^{G_2(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{p_n} e^{Q_{m_n}(z)} \right\}.$$

La polidromia è sparita dai due membri e il prodotto infinito essendo convergente in egual grado in qualunque campo a distanza finita, inclusi ora anche i punti a_n, ove si annulla dell'ordine p_n, vediamo che la trascendente cercata esiste ed è data dalla formola

$$G(z) = e^{G_1(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{p_n} e^{Q_{m_n}(z)} \right\}, \tag{24}$$

restando la trascendente intera $G_1(z)$ affatto arbitraria. Inversamente ogni trascendente intera che abbia gli infinitesimi nei punti a_n, cogli ordini p_n, è data dalla (24). Questo importantissimo risultato è dovuto a Weierstrass, il quale diede il nome di *fattori primarii* ai fattori

$$\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{p_n} e^{Q_{m_n}(z)},$$

l'aggiunta dell'esponenziale $e^{Q_{m_n}(z)}$ avendo per effetto di assicurare la convergenza assoluta ed in egual grado del prodotto infinito.

Nella formola (24) è supposto che l'origine non debba essere un infinitesimo per $G(z)$; ma evidentemente, se vogliamo che $G(z)$ abbia in $z = 0$ un infinitesimo d'ordine r, basterà far precedere nella (24) al prodotto infinito il fattore z^r.

Dall'esistenza di una trascendente intera con infinitesimi assegnati ad arbitrio si può trarre, con Weierstrass, un'importante conseguenza. Sia $w(z)$ una funzione uniforme in tutto il piano e senza singolarità essenziali a distanza finita. Le sue singolarità polari formeranno un gruppo di punti coll'unico punto limite $z = \infty$; siano

$$a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$$

questi poli e

$$p_1, p_2, \ldots p_n \ldots$$

i loro rispettivi ordini. Costruiamo la trascendente intera $G(z)$ che diventa infinitesima nei punti a dei medesimi ordini p_i. Il prodotto $w(z) . G(z)$ è uniforme e senza singolarità nè essenziali, nè polari a distanza finita, e però è una trascendente intera $G_1(z)$. Abbiamo dunque il teorema:

Ogni funzione uniforme in tutto il piano, che non abbia singolarità essenziali a distanza finita, è il quoziente di due trascendenti intere.

Come corollario, ne segue che una tale funzione può sempre esprimersi analiticamente per mezzo del quoziente di due prodotti infiniti della forma (24).

§. 67.

Forma degli esponenti $Q_{m_n}(z)$.

Consideriamo ora più da vicino il modo di formazione dei polinomii $Q_{m_n}(z)$, che figurano come esponenti nei fattori della (24). Il polinomio derivato $P_{m_n}(z)$ consta, secondo il §. 65, dei primi $m_n + 1$ termini dello sviluppo per potenze di z dell'espressione

$$-\frac{p_n}{z-a_n} = p_n \left\{ \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \frac{z^2}{a_n^3} + \cdot\cdot \right\};$$

si ha cioè

$$P_{m_n}(z) = p_n \left\{ \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \frac{z^2}{a_n^3} + \cdot\cdot + \frac{z^{m_n}}{a_n^{m_n+1}} \right\},$$

dove i numeri m_n debbono essere fissati in guisa che la serie

$$\sum \left\{ \frac{p_n}{z-a_n} + P_{m_n}(z) \right\} = \sum_n \frac{p_n z^{m_n+1}}{a_n^{m_n+2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{a_n}}$$

in ogni campo finito, dal quale siano esclusi i punti a, converga in egual grado.

Poniamo per abbreviare

$$m_n + 2 = r_n$$

e risulterà

$$Q_{m_n}(z) = p_n \left\{ \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2\,a_n^2} + \frac{z^3}{3\,a_n^3} + \cdot\cdot + \frac{z^{r_n-1}}{(r_n-1)\,a_n^{r_n-1}} \right\},$$

dove i numeri r_n debbono essere determinati in guisa da assicurare la convergenza in egual grado della serie

$$(25) \qquad \sum \frac{p_n z^{r_n-1}}{a_n^{r_n}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{a_n}};$$

e la formola (24) si scrive allora così:

$$(26) \qquad G(z) = e^{G_1(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}+\ldots+\frac{z^{r_n-1}}{(r_n-1)a_n^{r_n-1}}} \right\}^{p_n}.$$

Che i numeri r_n siano sempre determinabili nel modo richiesto risulta dalla dimostrazione, data al §. 65, del teorema di Mittag-Leffler. Questi numeri r_n saranno in generale variabili coll'indice n e nulla sappiamo in generale della loro determinazione effettiva. Però vi ha un caso molto importante, e ancora di grande generalità, nel quale si possono prendere tutti i numeri r_n eguali ad un numero fisso r, talchè l'esponente di e nei fattori primarii (26) ha il grado fisso $r-1$. Ciò avviene quando sono soddisfatte le condizioni seguenti:

1.° Gli ordini $p_1, p_2, \ldots p_n \ldots$ d'infinitesimo rimangano tutti inferiori ad un numero fisso.

2.° La serie $\sum \frac{1}{|a_n|^r}$ risulti convergente [1].

In tal caso infatti se prendiamo $r_n = r$, e facciamo variare z in un campo finito, dal quale siano esclusi i punti a_n, la serie dei moduli della (25):

$$\sum \frac{p_n |z|^{r-1}}{\left|1-\frac{z}{a_n}\right|} \cdot \frac{1}{|a_n|^r}$$

si ottiene dalla serie $\sum \frac{1}{|a_n|^r}$, convergente per ipotesi, moltiplicando i termini di questa per quantità che si mantengono inferiori ad una quantità fissa.

Abbiamo dunque il teorema:

---

[1] Si noti che la prima condizione *necessaria* per la convergenza: $\lim \frac{1}{|a_n|^r} = 0$ è soddisfatta (con qualunque r positivo).

Se la trascendente intera $G(z)$ *ha gli infinitesimi*

$$a_1 , a_2 , \ldots a_n \ldots ,$$

di ordini

$$p_1 , p_2 , \ldots p_n \ldots ,$$

che rimangono inferiori ad un numero fisso e la serie

$$\sum \frac{1}{|a_n|^r} ,$$

per un conveniente valore intero positivo di r, *converge, la* $G(z)$ *si può sviluppare in prodotto infinito, convergente assolutamente ed in egual grado, colla formola*

$$(27) \quad G(z) = e^{G_1(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2\,a_n^2} + \cdot\cdot + \frac{z^{r-1}}{(r-1)\,a_n^{r-1}}} \right\}^{p_n} .$$

§. 68.

Genere delle trascendenti intere. — Esempî. — Γ Euleriana.

Le trascendenti intere che soddisfano alle condizioni del teorema precedente si classificano, secondo Laguerre, *in generi* dipendentemente dal minimo esponente intero r che rende la serie

$$\sum \frac{1}{|a_n|^r}$$

convergente; una tale trascendente intera si dice di genere $r-1$.

Prendiamo p. e. la funzione

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} ,$$

che ha infinitesimi del 1.° ordine nei punti

$$z = \pm 1 , \pm 2 , \pm 3 , \ldots$$

Siccome la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente, qui abbiamo $r = 2$ e la trascendente intera è quindi di primo genere. Il suo sviluppo in prodotto infi-

nito sarà dato per la (27) da:

$$\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z} = e^{G_1(z)} \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}},$$

dove nel prodotto infinito n percorre tutti gli interi positivi e negativi, zero escluso.

Riunendo i fattori corrispondenti a valori opposti di n, si può scrivere

$$\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z} = e^{G_1(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Per trovare qui l'effettivo valore di $G_1(z)$, basta derivare logaritmicamente questa formola e confrontarla colla (15) §. 64, ove si cangi z in πz; si ottiene così $G'_1 = 0$, cioè $G_1 =$ costante, e la formola precedente dimostra subito che $G_1 = 0$; ne risulta la formola d'Eulero:

$$\operatorname{sen}\pi z = \pi z \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{27*}$$

Come esempio di costruzione di una nuova trascendente intera, cerchiamo una tale trascendente che abbia i suoi infinitesimi del 1.° ordine nei punti

$$z = 0\,,\ -1\,,\ -2\,,\ -3\,,\ldots -n\,,\ldots$$

Poichè la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente, avremo immediatamente l'espressione analitica di una tale funzione nel prodotto infinito

$$G(z) = e^{G_1(z)}\, z \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Prendiamo $G_1(z) = cz$, dove c indica una costante, ed avremo

$$G(z) = e^{cz}\, z \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Fissiamo anche la costante c, determinandola in guisa che sia reale e renda $G(1) = 1$. L'inversa della funzione $G(z)$ è la funzione *gamma* Euleriana $\Gamma(z)$, sicchè

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{cz}\, z \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}; \tag{28}$$

essa è uniforme in tutto il piano ed ha soltanto singolarità polari del 1.° ordine nei punti $z = 0, -1, -3 \ldots -n, \ldots$

La costante c prende il nome di *costante di Mascheroni*. Dalla condizione

$$e^{-c} = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}$$

risulta per c anche la definizione

$$c = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right);$$

il valore approssimato di c è

$$c = 0,577\,215\,664\,901.$$

Possiamo scrivere la (28) così:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n=\infty} \left\{ e^{z\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)} . z . \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{k}{z}} \right\}$$

$$= \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{z(1+z)\left(1 + \frac{z}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{z}{n}\right)}{n^z} \right\}$$

e si ha la formola di Gauss

$$(29) \qquad \Gamma(z) = \lim \frac{n^z}{z(1+z)\left(1 + \frac{z}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{z}{n}\right)} \text{ [1]}.$$

Da questa espressione di $\Gamma(z)$ risulta subito dimostrata la *prima* proprietà fondamentale di $\Gamma(z)$, espressa dalla formola

$$(30) \qquad \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

Da questa e dall'essere $\Gamma(1) = 1$ segue che per un valore intero e positivo m dell'argomento la Γ euleriana assume il valore

$$\Gamma(m) = 1 . 2 . 3 \ldots (m-1).$$

---

[1] Pel simbolo n^z s'intende, senza ambiguità, $e^{z \log n}$ ($\log n$ in senso aritmetico).

Dalla (30) e dalla (28) risulta

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{cz} \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

e cangiando z in $-z$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = e^{-cz} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}},$$

da cui moltiplicando si ottiene per la formola (27*) d'Eulero:

$$\Gamma(1+z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z},$$

ossia per la (30)

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}, \tag{31}$$

formola che ci esprime la *seconda* proprietà fondamentale della Γ euleriana.

§. 69.

Caso in cui le distanze fra i punti d'infinitesimo si mantengono superiori a una quantità fissa.

Ritorniamo ora al teorema in fine al §. 6 per segnalarne un caso particolare notevole, il caso in cui la distanza fra due punti qualunque d'infinitesimo

$$a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$$

si mantiene sempre superiore ad una quantità fissa d. *In tal caso dimostriamo che la serie*

$$\sum \frac{1}{|a_n|^3} \tag{32}$$

è convergente. Se sarà quindi soddisfatta l'altra condizione che gli ordini

d'infinitesimo non vadano crescendo oltre ogni limite, il prodotto infinito

$$\prod_1^\infty \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2}} \right\}^{p_n}$$

convergerà e rappresenterà la funzione cercata.

La convergenza della serie (32) si prova facilmente colle considerazioni seguenti. Mediante le rette, parallele agli assi, di equazioni

$$x = m\frac{d}{\sqrt{2}}, \quad y = n\frac{d}{\sqrt{2}},$$

dove m, n percorrono tutti i valori interi positivi e negativi, dividiamo il piano in una rete di quadrati di diagonale $= d$, di modo che in uno dei quadrati cadrà al massimo *uno* dei punti a.

Dalla serie (32) togliamo quei termini, in numero di quattro al più, che corrispondono a punti a situati in uno dei quattro quadrati attorno all'origine e cangiamo tutti gli altri termini in termini più grandi sostituendo ad ogni punto a_r il vertice più prossimo all'origine del quadrato in cui si trova. Provata la convergenza della nuova serie sarà, a più forte ragione, dimostrata per la (32). Tutto si riduce quindi a dimostrare la convergenza della serie doppia

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\left\{(m^2+n^2)\frac{d^2}{2}\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

ossia la convergenza della serie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dove nella sommazione s'intende esclusa la combinazione $m = 0$, $n = 0$. Ora in questa serie la somma dei termini in cui $m = \pm n$ forma la serie cenvergente

$$4\sum_1^\infty \frac{1}{(2n^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^3}$$

e gli altri si riuniscono nella serie doppia

$$S = 4\sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

escluse le combinazioni $m = n$. Ma questa può scriversi anche

$$S = 8 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e perchè, essendo

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{m^3} \quad (n = 1, 2, \ldots m-1),$$

si ha

$$\sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{m^2},$$

risulterà

$$S < 8 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Dunque S è convergente, come si era asserito.

Capitolo VII.

Funzioni analitiche di più variabili complesse. — Funzioni implicite. — Proprietà fondamentali delle funzioni algebriche.

§. 70.

Funzioni regolari di due variabili complesse.

I principii della teoria delle funzioni di una variabile complessa, in particolare il concetto di funzione analitica, si possono estendere al caso di funzioni di più variabili complesse, come ci proponiamo ora di dimostrare in tutta brevità. Per semplicità di linguaggio ci limitiamo al caso di *due* variabili complesse; ma si vedrà immediatamente che le considerazioni si applicano al caso generale di n variabili complesse.

Siano

$$z_1 = x_1 + i y_1, \quad z_2 = x_2 + i y_2$$

due variabili complesse, i cui indici si muovono nel rispettivo piano complesso illimitatamente, ovvero entro campi finiti corrispondenti C_1, C_2. Supponiamo che la variabile complessa w *dipenda* da z_1, z_2 in guisa che

per qualsiasi coppia di valori (z_1, z_2) appartenente al campi (C_1, C_2) la w assuma un valore e, considerata come funzione delle quattro variabili reali

$$x_1 , y_1 ; x_2 , y_2 ,$$

sia una funzione finita, continua (e ad un sol valore), e possegga derivate prime pure finite e continue e soddisfacenti alle condizioni di monogeneità

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y_1} , \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y_2} \text{ [1]} .$$

In tal caso diremo che la w è nel campo (C_1, C_2) una funzione regolare delle due variabili complesse z_1, z_2 e scriveremo

$$w = f(z_1 , z_2).$$

È chiaro che per ogni valore fissato di z_2 interno a C_2 la w sarà in C_1 una funzione dappertutto regolare di z_1 e analogamente scambiando z_1 con z_2.

Sia ora (z'_1, z'_2) una coppia di valori per z_1, z_2 interna al campo (C_1, C_2). Col centro in z'_1 descriviamo, nel piano complesso z_1, un cerchio Γ_1 tutto interno a C_1 e similmente nel piano complesso z_2, col centro in z_2', un cerchio Γ_2 interno a C_2. Se con $(\bar{z}_1 \bar{z}_2)$ indichiamo una coppia variabile entro (Γ_1, Γ_2) la funzione

$$f(\bar{z}_1 , \bar{z}_2)$$

tenendo fisso $\bar{z}_2$ e variabile $\bar{z}_1$ è, dentro Γ_1, una funzione finita, continua

---

[1] Scindendo w nella sua parte reale ed immaginaria: $w = u + i v$, si hanno le relazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial v}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_1} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \dfrac{\partial v}{\partial y_2} , \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_2} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_2} , \end{cases}$$

dalle quali si trae che u deve verificare simultaneamente le quattro equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0 , & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} , & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 . \end{cases}$$

e monodroma e però sviluppabile in serie di potenze di $\bar{z}_1 - z'_1$; si avrà:

$$f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n (\bar{z}_1 - z'_1)^n , \tag{1}$$

dove

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1} \frac{f(z_1, \bar{z}_2)\, dz_1}{(z_1 - z'_1)^{n+1}} , \tag{2}$$

avendo indicato con s_1 il contorno di Γ_1.

D'altronde, pel modo con cui $\bar{z}_2$ figura in b_n, si vede che b_n è funzione finita, continua e monodroma di $\bar{z}_2$ entro C_2 e quindi si potrà sviluppare in serie di potenze di $\bar{z}_2 - z'_2$ colla formola

$$b_n = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_{m,n} (\bar{z}_2 - z'_2)^m , \tag{3}$$

dove sarà

$$a_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_2} \frac{b_n\, dz_2}{(z_2 - z'_2)^{m+1}} , \tag{4}$$

ovvero per la (2):

$$a_{m,n} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{s_2} \frac{dz_2}{(z_2 - z'_2)^{m+1}} \int_{s_1} \frac{f(z_1, z_2)\, dz_1}{(z_1 - z'_1)^{n+1}} . \tag{5}$$

Sostituendo nella (1) per b_n il valore dato dalla (3), ed osservando che, la convergenza delle nostre serie essendo assoluta, si possono ordinare i termini della serie doppia risultante come si vuole, si potrà scrivere:

$$f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \sum_m \sum_n a_{m,n} (\bar{z}_1 - z'_1)^n (\bar{z}_2 - z'_2)^m . \tag{6}$$

Abbiamo dunque il teorema: *Se, variando z_1, z_2 entro i rispettivi cerchi Γ_1, Γ_2 di centri z'_1, z'_2, la funzione $f(z_1, z_2)$ è funzione finita, continua e ad un sol valore delle variabili complesse z_1, z_2, essa è sviluppabile in una serie doppia di potenze intere e positive dei binomii*

$$z_1 - z'_1 , \quad z_2 - z'_2 ,$$

convergente assolutamente in tutto il campo.

§. 71.

Serie di potenze.

L'inversione del teorema precedente si fa con somma facilità, ricorrendo alle proprietà delle serie di potenze di più variabili, che sono affatto analoghe a quelle dimostrate nel Cap. I (§§. 3, 4 pag. 14, s. s.) per le serie di potenze di una variabile. Per semplicità, facendo $z_1'=z_2'=0$, consideriamo una serie di potenze di due variabili z_1, z_2:

$$(7) \qquad P(z_1, z_2) = \sum \sum a_{m,n} z_1^m z_2^n$$

e supponiamo che per una coppia di valori

$$z_1 = z_1^{(0)}, \quad z_2 = z_2^{(0)},$$

nessuno dei quali sia nullo, la serie converga.

Fissiamo due valori positivi r_1, r_2, tali che

$$r_1 < |z_1^{(0)}|, \quad r_2 < |z_2^{(0)}|,$$

ma che siano del resto prossimi a $|z_1^{(0)}|$, $|z_2^{(0)}|$ rispettivamente tanto poco quanto si vuole. Sussiste allora il teorema fondamentale (cf. pag. 15): *La serie* $\Sigma\Sigma a_{m,n} z_1^m z_2^n$, *per tutti i valori di* z_1, z_2 *che soddisfano le condizioni*

$$|z_1| \leq r_1, \quad |z_2| \leq r_2,$$

è convergente assolutamente ed in egual grado.

Per ipotesi la serie

$$\sum \sum a_{m,n} z_1^{(0)m} z_2^{(0)n}$$

è convergente e però

$$\lim_{m,n=\infty} |a_{m,n}| \, |z_1^{(0)}|^m \, |z_2^{(0)}|^n = 0,$$

onde segue che possiamo fissare una quantità positiva g abbastanza grande, perchè si abbia per ogni coppia di valori m, n:

$$|a_{m,n}| \, |z_1^{(0)}|^m \, |z_2^{(0)}|^n < g.$$

Prendiamo la serie dei moduli della proposta (7):

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} |a_{m,n} z_1^m z_2^n|$$

e consideriamo il resto a partire da valori

$$m \geq m_1 \ , \quad n \geq n_1$$

abbastanza elevati:

$$R_{m_1, n_1} = \sum_{m=m_1}^{m=\infty} \sum_{n=n_1}^{n=\infty} |a_{m,n}| \, |z_1|^m \, |z_2|^n .$$

Scrivendo

$$|a_{m,n}| \, |z_1|^m \, |z_2|^n = |a_{m,n}| \, |z_1^{(0)}|^m \, |z_2^{(0)}|^n \left|\frac{z_1}{z_1^{(0)}}\right|^m \left|\frac{z_2}{z_2^{(0)}}\right|^n ,$$

e posto

$$\frac{r_1}{|z_1^{(0)}|} = \zeta_1 \ , \quad \frac{r_2}{|z_2^{(0)}|} = \zeta_2 \ ,$$

avremo

$$|a_{m,n}| \, |z_1|^m \, |z_2|^n < g \, \zeta_1^m \, \zeta_2^n$$

e però

$$R_{m_1, n_1} < g \, \zeta_1^{m_1} \, \zeta_2^{n_1} \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \zeta_1^m \, \zeta_2^n .$$

Siccome ζ_1, ζ_2 sono quantità positive < 1, potremo scrivere

$$R_{m_1, n_1} < g \, \zeta_1^{m_1} \, \zeta_2^{n_1} \, \frac{1}{1-\zeta_1} \cdot \frac{1}{1-\zeta_2} ,$$

onde si vede che, presi m_1, n_1 sufficientemente grandi, il resto R_{m_1, n_1} si potrà rendere minore di qualunque quantità prefissata ε, *per tutti i valori* z_1, z_2 *tali che*

$$|z_1| \leq r_1 \ , \quad |z_2| \leq r_2 ,$$

ciò che dimostra il teorema.

Da questo teorema fondamentale si traggono, come è chiaro, conseguenze affatto simili a quelle del Cap. I per le funzioni di una sola variabile, in particolare il teorema: *Se la serie di potenze* $P(z_1, z_2)$ *converge per una coppia di valori* $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}$ *delle variabili di moduli* $|z_1^{(0)}| > 0$, $|z_2^{(0)}| > 0$, *tracciando nei rispettivi piani* z_1, z_2 *due circoli* C_1, C_2 *coi centri*

in $z_1=0$, $z_2=0$, *in guisa che lascino all'esterno i punti* $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$, *la serie* $P(z_1, z_2)$, *movendosi* z_1, z_2 *entro* C_1, C_2, *convergerà in egual grado e rappresenterà nel campo* (C_1, C_2) *una funzione finita, continua e monodroma delle due variabili complesse* z_1, z_2.

§. 72.

Campo ristretto di convergenza. — Prolungamento analitico.

La delimitazione del *vero* campo di convergenza di una serie di potenze a più variabili dipende, come Weierstrass ha dimostrato [1], da una diseguaglianza

$$F(\rho_1, \rho_2) < 0 ,$$

cui debbono soddisfare i moduli

$$\rho_1 = |z_1| \ , \quad \rho_2 = |z_2|$$

delle variabili. Senza entrare in queste ricerche generali, che non occorrono al nostro scopo, ci basterà qui definire quello che Weierstrass chiama il *campo ristretto di convergenza* di una serie di potenze $P(z_1, z_2)$ nel modo seguente. Distinguiamo i numeri positivi ρ in due classi e diciamo della prima classe A) ogni numero ρ tale che per

$$|z_1| < \rho \ , \quad |z_2| < \rho$$

la serie converga, della seconda classe B) ogni numero ρ tale che per

$$|z_1| > \rho \ , \quad |z_2| > \rho$$

la serie diverga. Come al §. 3 (pag. 18), risulta che esiste un numero limite R che separa le due classi, sicchè la serie $P(z_1, z_2)$ converge per valori che siano *simultaneamente* di modulo $<$ R e diverge per valori i cui moduli superino *simultaneamente* R. Ma naturalmente può la serie convergere anche per valori z_1, z_2 tali che sia $|z_1| > R$, $|z_2| < R$ e divergere per $|z_1| < R$ con $|z_2| > R$. — Allora se nei piani z_1, z_2, coi centri nelle origini, tracciamo due circoli C_1, C_2 di raggio R, per ogni coppia (z_1, z_2)

---

[1] *Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen.* (Lezioni manoscritte).

i cui indici cadano simultaneamente nell'interno dei circoli, la serie converge, e diverge invece se tutti due gli indici cadono all'esterno. Il campo (C_1, C_2) è quello che Weierstrass chiama il campo ristretto di convergenza.

Diciamo ora brevemente del *prolungamento analitico* di una serie di potenze $P(z_1, z_2)$.

Prendiamo una coppia di punti (a_1, a_2) nell'interno del campo di convergenza e sia r la più piccola delle due distanze di a_1, a_2 dal rispettivo contorno. Se descriviamo coi centri in a_1, a_2 due circoli Γ_1, Γ_2 di raggio $=r$, questi rimangono nell'interno rispettivamente di (C_1, C_2) e possiamo quindi (§. 70) convertire la serie $P(z_1, z_2)$ in una nuova serie

$$P(z_1 - a_1, z_2 - a_2);$$

il raggio del campo ristretto di convergenza per questa nuova serie è *almeno* $=r$, ma può anche essere maggiore. In quest'ultimo caso può darsi che la funzione risulti così prolungata analiticamente al di là del primitivo campo di convergenza. Dopo ciò s'intende subito come il concetto di *funzione analitica*, che abbiamo sviluppato al §. 45 pel caso di una sola variabile, sia estendibile anche nel campo di più variabili complesse.

§. 73.

Radici di un'equazione $f(w, z) = 0$.

Sia

$$f(w, z) = \sum \sum a_{m,n} w^m z^n$$

una serie di potenze delle due variabili w, z, di cui indichiamo con R il raggio del campo ristretto C di convergenza. Poniamo fra w e z la relazione

$$f(w, z) = 0, \tag{8}$$

e domandiamo se, ed in quale senso, potremo dire che w viene così definita come funzione analitica *implicita* della z. Un caso particolare è già stato risoluto al §. 58 coll'inversione delle serie, e con un metodo analogo possiamo ora risolvere la questione generale.

Supponiamo di conoscere una coppia particolare w_0, z_0 di valori, che soddisfino la (8), e facciamo senz'altro, come è lecito:

$$w_0 = 0, \quad z_0 = 0,$$

sicchè per ipotesi

$$f(0, 0) = 0 .$$

La funzione $f(w, 0)$ è una funzione regolare di w entro C e s'annulla per $z = 0$; ma noi supponiamo naturalmente che non sia identicamente $f(w, 0) = 0$ [1]. Questa funzione

$$P(w) = f(w, 0)$$

avrà dunque in $w = 0$ un infinitesimo, il cui ordine diciamo n; allora per $z = 0$ l'equazione $f(w, z) = 0$ ha una radice nulla $w = 0$, multipla dell'ordine n. Ora ci proponiamo di dimostrare che: *per z prossima a zero l'equazione $f(w, z) = 0$ avrà n radici*

$$w_1 , \ w_2, \ldots w_n$$

prossime a zero.

Dimostreremo il nostro teorema, e ne preciseremo il senso, colle considerazioni seguenti. Cominciamo dal descrivere nel piano w un circolo C′ di raggio ρ, concentrico a C, e più piccolo in guisa che $P(w) = f(w, 0)$ non si annulli nell'area circolare C′ nè sul suo contorno s, eccetto naturalmente che in $w = 0$. Su tutto il contorno s la funzione $f(w_s, 0)$ avrà il modulo discosto da zero; supponiamo che sia sempre

$$|f(w_s, 0)| > g , \tag{9}$$

essendo g una quantità positiva. Mostriamo in primo luogo che si può descrivere nel piano z, col centro in $z = 0$, un cerchio Γ di raggio r abbastanza piccolo perchè si abbia sempre

$$|f(w_s, z) - f(w_s, 0)| < g \tag{10}$$

per $|z| \leq r$ e w_s essendo dovunque sul contorno s. Variando w, z colle limitazioni

$$|w| \leq \rho , \quad |z| \leq \rho ,$$

la serie $f(w, z)$ è convergente in egual grado e però possiamo decomporla in una parte finita $P(w, z)$ (un polinomio) ed un resto $R(w, z)$:

$$f(w, z) = P(w, z) + R(w, z) ,$$

[1] In tal caso in tutti i termini di $f(w, z)$ comparirebbe una potenza di z, che si potrebbe sopprimere in precedenza.

tale che sia per tutti i valori di w, z, di modulo non superiore a ρ:

$$|R(w, z)| < \frac{1}{3} g .$$

Ora

$$\begin{cases} f(w_s, z) = P(w_s, z) + R(w_s, z) , \\ f(w_s, 0) = P(w_s, 0) + R(w_s, 0) , \end{cases}$$

e perciò

$$|f(w_s, z) - f(w_s, 0)| < |P(w_s, z) - P(w_s, 0)| + \frac{2}{3} g .$$

La differenza

$$P(w_s, z) - P(w_s, 0)$$

è un polinomio in z, che si annulla per $z = 0$ e i cui coefficienti, pur variando w_s sul contorno di C′, non superano col modulo una quantità fissa. Possiamo dunque prendere r così piccolo che sia sempre

$$|P(w_s, z) - P(w_s, 0)| < \frac{1}{3} g \quad \text{per } |z| \leq r$$

e troveremo così sempre verificata la (10), come si voleva.

Cio premesso, dimostriamo che: *fissato un valore $\bar{z}$ di modulo $|\bar{z}| \leq r$, l'equazione $f(w, \bar{z}) = 0$ avrà precisamente n radici $w_1, w_2, \ldots w_n$ entro il circolo C′, cioè di modulo $< \rho$.*

Intanto la $f(w, \bar{z})$ non si annulla certo sul contorno s di C′, poichè se fosse

$$f(w_s, \bar{z}) = 0 ,$$

per la (10) ne risulterebbe $|f(w_s, 0)| < g$, che contraddice la (9). Se indichiamo adunque con N il numero delle radici di

$$f(w, \bar{z}) = 0 ,$$

entro C′, e poniamo $f'_w(w, z) = \dfrac{\partial f(w, z)}{\partial w}$, avremo secondo la formola dell'indicatore logaritmico:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f'_w(w_s, \bar{z})}{f(w_s, \bar{z})} dw .$$

L'integrale del secondo membro, se facciamo variare z entro Γ, è una funzione continua di $\bar{z}$ ed essendo un numero intero, dalla considerazione stessa fatta al §. 58, risulta che esso serberà sempre lo stesso valore. Ma poichè per $\bar{z}=0$ si ha $N=n$, avremo sempre

$$N = n \quad , \quad \text{c. d d.}$$

§. 74.

Teorema di Weierstrass.

Siano $w_1, w_2, \ldots w_n$ i valori di w entro C', radici dell'equazione

$$f(w, z) = 0 \quad \text{per } z \leq r .$$

Se consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S w^k \frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w}\, dw ,$$

essendo k un intero positivo qualunque, il suo valore sarà la somma dei residui nell'interno, onde:

$$w_1^k + w_2^k + \ldots + w_n^k = \frac{1}{2\pi i}\int_S w^k \frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w}\, dw ,$$

ed il secondo membro è evidentemente una funzione regolare di z entro Γ, che di più si annulla per $z=0$. Se poniamo

$$\varphi(w, z) = (w - w_1)(w - w_2)\ldots(w - w_n) =$$
$$w^n + \alpha_1 w^{n-1} + \alpha_2 w^{n-2} + \ldots + \alpha_n ,$$

saranno quindi le α serie di potenze di z convergenti entro Γ.

Preso ora un punto qualunque z entro Γ, ed un punto $\bar{w}$ entro C, distinto da $w_1, w_2, \ldots w_n$, si consideri la funzione di w

$$\frac{1}{w - \bar{w}} \frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w} .$$

Questa ha entro C solo singolarità in

$$w_1 , w_2 , \ldots w_n \quad \text{e in } \bar{w},$$

e precisamente singolarità polari del 1.° ordine, coi residui

$$\frac{1}{w_1 - \bar{w}}, \quad \frac{1}{w_2 - \bar{w}}, \quad \ldots \quad \frac{1}{w_n - \bar{w}}$$

nei primi punti, e col residuo

$$\left(\frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w}\right)_{w=\bar{w}}$$

in $\bar{w}$. Avremo quindi

$$\frac{1}{w_1 - \bar{w}} + \frac{1}{w_2 - \bar{w}} + \ldots + \frac{1}{w_n - \bar{w}} + \left(\frac{\partial \log f(w; z)}{\partial w}\right)_{\bar{w}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{1}{w - \bar{w}} \frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w} \, dw \, .$$

Il secondo membro è una funzione regolare di z e $\bar{w}$, diciamo $P(\bar{w}, z)$ e, cangiando $\bar{w}$ in w, potremo scrivere la formola precedente anche così:

$$\frac{\partial \log f(w, z)}{\partial w} - \frac{\partial \log \varphi(w, z)}{\partial w} = P(w, z) \, ,$$

da cui, integrando rispetto a w e passando dai logaritmi ai numeri, otteniamo:

$$f(w, z) = \psi(z) \, . \, \varphi(w, z) \, e^{P_1(w, z)} \, ,$$

ove $\psi(z)$, che è una funzione regolare di z e non s'annulla per $z = 0$ (altrimenti s'annullerebbe identicamente $f(w, 0)$), si può includere nell'esponenziale.

Otteniamo così la formola:

$$f(w, z) = \varphi(w, z) \, e^{P_1(w, z)} = \{w^n + \alpha_1 w^{n-1} + \ldots + \alpha_n\} \, e^{P_1(w, z)} \, ,$$

che ci esprime il teorema di Weierstrass: *Se la funzione regolare $f(w, z)$ delle due variabili complesse w, z si annulla per $w = 0$, $z = 0$ e non è identicamente $f(w, 0) = 0$, in un intorno sufficientemente piccolo di $w = 0$, $z = 0$ si può porre sotto la forma*

$$f(w, z) = (w^n + \alpha_1 w^{n-1} + \ldots + \alpha_n) \, . \, e^{P_1(w, z)} \, ,$$

dove il primo fattore, che pone in evidenza il modo di annullarsi della funzione, è un polinomio di grado finito in w con coefficienti funzioni regolari di z e nulle per $z = 0$, mentre il secondo fattore (esponenziale) non si annulla più nell'intorno.

§. 75.

Funzioni implicite.

Il teorema di Weierstrass ci dimostra che, volendo studiare come dipendono da z nell'intorno di $z=0$ le radici $w_1, w_2, \ldots w_n$ prossime a zero dell'equazione

$$f(w, z) = 0 ,$$

si può sostituire a questa l'altra più semplice

$$\varphi(w, z) = w^n + \alpha_1 w^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0 ,$$

che è del grado n in w. Se supponiamo dapprima $n=1$, l'equazione precedente ci dà senz'altro w in serie di potenze per z e ci dimostra il teorema fondamentale:

Se l'equazione $f(w, z) = 0$ è soddisfatta per $z = a$ $w = b$ ed è $\left(\frac{\partial f(w, z)}{\partial w}\right)_{a, b} \neq 0$, per ogni valore di z prossimo ad a l'equazione ha una sola radice w prossima a b e questo valore w è una funzione regolare di z nell'intorno di $z = a$.

Quando invece si annulli per $z=a$, $w=b$ un certo numero di derivate

$$\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \ldots \frac{\partial^{n-1} f}{\partial w^{n-1}},$$

ma sia

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial w^n}\right)_{a, b} \neq 0 ,$$

allora per $z=a$ avremo n valori $w_1, w_2, \ldots w_n$ prossimi a b, dati da un equazione della forma

$$\varphi(w, z) = (w-b)^n + \alpha_1 (w-b)^{n-1} \ldots + \alpha_n = 0 , \tag{11}$$

dove le α sono funzioni regolari di z nell'intorno di $z=a$ e quivi nulle. Questi n valori di w, restringendo convenientemente l'intorno di $z=a$, si potranno supporre tutti distinti, altrimenti dovrebbe annullarsi anche il discriminante $D(z)$ della (11) rispetto a w: ma questo discriminante è regolare nell'intorno di a, e restringendo l'intorno si può far sì che non abbia altra radice che in $z=a$. Se z_0 è un punto di questo intorno di-

stinto da a, ciascuno degli n valori $w_1, w_2, \ldots w_n$, p. e. w_1, sarà sviluppabile in serie di potenze di $z - z_0$, essendo

$$\left(\frac{\partial f(w, z)}{\partial w}\right)_{w=w_0,\, z=z_0} \neq 0 .$$

Vediamo dunque che in ogni caso, ponendo fra w, z il legame espresso dall'equazione

$$f(w, z) = 0 ,$$

veniamo a definire una o più funzioni analitiche w della variabile complessa z.

§. 76.

Funzioni algebriche.

Applichiamo questi risultati generali al caso importante in cui la $f(w, z)$ sia una funzione razionale intera degli argomenti w, z e si abbia quindi l'equazione:

$$(12) \quad f(w, z) = \varphi_0(z)\, w^n + \varphi_1(z)\, w^{n-1} + \ldots + \varphi_{n-1}(z)\, w + \varphi_n(z) = 0 ,$$

i cui coefficienti $\varphi_i(z)$ sono polinomii razionali interi in z. La w, definita da una tale equazione come funzione implicita di z, dicesi una *funzione algebrica* di z. Per ogni valore di z abbiamo n valori di w:

$$w_1 , \; w_2 , \ldots w_n ,$$

che sono in generale distinti e finiti. Eccezione si ha soltanto per un numero finito di valori di z, i cui indici diconsi i *punti critici*. Questi punti critici sono di due specie. Essi provengono in primo luogo da quei valori di z che annullano il primo coefficiente $\varphi_0(z)$, e per questi valori di z uno o più dei valori di w diventano infiniti; uno solo se quel valore di z annulla il primo coefficiente $\varphi_0(z)$ e nessuno dei seguenti, più se accade il contrario.

In secondo luogo, per valori speciali di z, possono due o più valori di w coincidere; ciò avviene quando insieme a $f(w, z)$ si annulla anche $\frac{\partial f(w, z)}{\partial w}$ e però il discriminante $D(z)$ della (12) rispetto a w.

Gli indici delle radici delle due equazioni

$$\varphi_0(z) = 0 \quad , \quad D(z) = 0$$

sono dunque i punti critici della (12).

Se $z = a$ è un punto *non* critico, le radici

$$w_1 \, , \; w_2 \, , \; \ldots \; w_n$$

sono finite e tutte diseguali per $z = a$, onde

$$f(w_i, a) = 0 \quad \left(\frac{\partial f(w, a)}{\partial w}\right)_{w_i} \neq 0$$

e dal teorema fondamentale del §. precedente risulta: *Ciascuno degli n rami*

$$w_1 \, , \; w_2 \, , \; \ldots \; w_n$$

è nell'intorno di un punto non critico $z = a$ una funzione regolare di z, cioè sviluppabile in serie di potenze

$$w_i = P_i(z - a) \, . \tag{13}$$

È facile vedere che se prolunghiamo analiticamente un ramo $w_1 = P_1(z-a)$, il suo prolungamento soddisferà ancora alla (12) e sarà quindi sempre uno degli n rami.

E invero se $P_1(z - b)$ è un prolungamento analitico immediato di $P_1(z - a)$, nel campo comune di convergenza si ha

$$f(P_1(z - b) \, , \; z) = 0 \, ,$$

e questa relazione vale quindi anche in tutto il campo di convergenza di $P_1(z - b)$.

Importa ora osservare che: *Il raggio del cerchio di convergenza di ciascuna di queste serie di potenze* (13) *sarà, per lo meno, eguale alla minima distanza del centro a dai punti critici.*

Consideriamo infatti un determinato ramo, p. e.

$$w_1 = P_1(z - a) \, ,$$

e la serie del 2.° membro converga in un cerchio C, che non contenga alcun punto critico nè all'interno, nè sulla periferia; dimostriamo che il vero cerchio di convergenza sarà più grande di C. Invero nell'intorno

di qualunque punto b del disco circolare C, o del suo contorno, qualunque degli n rami è sviluppabile in una serie di potenze $P(z-b)$, il cui raggio R del cerchio di convergenza è certamente >0 onde, per un teorema di Weierstrass sul limite inferiore [1], potremo prendere un valore abbastanza piccolo r che serva come raggio di convergenza per tutti i punti dell'area C. Descriviamo allora un cerchio C′ concentrico a C e di raggio $=\rho-\frac{r}{2}$, avendo indicato con ρ il raggio di C′. Ogni cerchio Γ col centro in un punto c della periferia di C′ e di raggio $=r$ può valere come cerchio di sviluppo in serie di potenze $P(z-c)$ per ogni ramo di w; esso ci dà in particolare per w_1 un prolungamento analitico oltre il cerchio primitivo C. L'inviluppo dei circoli Γ è un cerchio C″ concentrico a C e di raggio $=\rho+\frac{r}{2}$ e la nostra funzione w_1 è dunque in tutto il cerchio C″ finita, continua e monodroma; dunque la serie $P_1(z-a)$ converge nel cerchio C″ più ampio di C, ciò che dimostra l'asserzione fatta.

§. 77.

Teorema fondamentale.

Consideriamo nel piano complesso z una curva chiusa σ, che parta da un punto non critico A e vi ritorni, senza passare per alcun punto critico. Per ogni punto b di σ gli n rami saranno sviluppabili in serie di potenze $P(z-b)$ e vi sarà un raggio r, abbastanza piccolo, che potrà servire come raggio di convergenza per tutti i punti di σ (§. 76). Fissiamo in A un ramo di partenza w_i e prolunghiamolo analiticamente lungo il cammino σ per mezzo di cerchi di convergenza di raggio r, ciascuno dei quali abbia una parte superficiale a comune col precedente. Al ritorno in A il ramo w_i o ritornerà col valore iniziale, o con uno degli altri $n-1$ valori che w ha in A. Se si osserva che due rami diversi

---

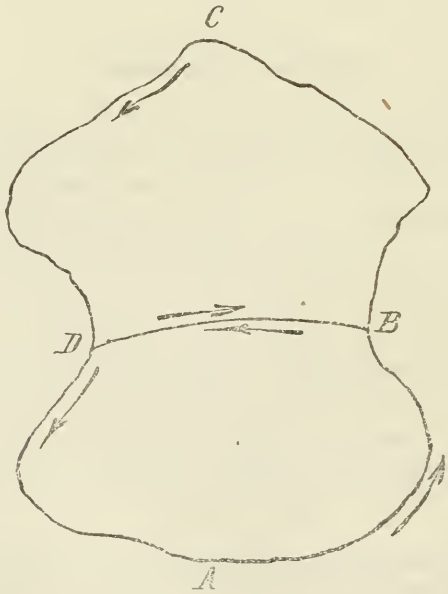
[1] Esiste certamente un limite inferiore per R, sia r; basta provare che $r>0$. Pel citato teorema di Weierstrass, esiste nel cerchio C almeno un punto L tale che in qualunque intorno di esso, comunque piccolo, il limite inferiore dei valori di R è ancora r; e siccome per questo punto limite R ha un valore $R_0>0$, in un intorno sufficientemente piccolo di L tutti i valori di R saranno p. e. superiori a $\frac{R_0}{2}$, onde è certamente $r>0$.

w_i, w_k, descritto il cammino chiuso, si mutano necessariamente in due rami diversi, si vede che l'effetto prodotto sugli n rami $w_1, w_2 \ldots w_n$ dal descrivere il cammino chiuso σ sarà di permutarli fra loro in un certo modo, di produrre cioè una corrispondente *sostituzione* sui rami

$$S = \begin{pmatrix} w_{i_1} & w_{i_2} \ldots & w_{i_n} \\ w_1 & w_2 \ldots & w_n \end{pmatrix},$$

gli indici $i_1, i_2 \ldots i_n$ coincidendo, salvo l'ordine, con $1, 2, \ldots n$. Si vede poi subito che la sostituzione S sugli indici rimane la stessa spostando sopra σ il punto A di partenza. Questa sostituzione S può anche essere l'identità, cioè può ogni ramo ritornare col proprio valore. Ciò avviene effettivamente se il cammino chiuso σ è tutto contenuto in un'area *semplicemente connessa* e priva di punti critici. Per dimostrarlo, supponiamo dapprima che σ non intersechi sè stessa, nel qual caso formerà il con-

Fig. 8.ª



torno di un'area semplice, priva nell'interno e sul contorno di punti critici, e per ogni punto z_0 dell'area (contorno incluso) potremo servirci per le corrispondenti serie $P(z - z_0)$ di un raggio fisso r di cerchio di convergenza.

Descriviamo il cammino chiuso

$$\sigma = ABCDA$$

della figura, partendo da A col ramo w_1, e supponiamo si ritorni in A con un valore diverso w_2, sicchè la sostituzione prodotta sui rami dal cammino chiuso ABCDA non è l'identità. Per mezzo di una linea semplice BD, che riunisca due punti del contorno σ, dividiamo l'area in due regioni coi contorni ABDA, BCDB. Dico che uno almeno di questi due cammini chiusi deve produrre sui rami una sostituzione non identica.

E in vero, se invece di descrivere σ descriviamo l'altro cammino chiuso

$$ABCDBDA,$$

inserendo due volte il tratto BD, percorso in verso contrario, l'effetto prodotto sui rami è evidentemente lo stesso. Se dunque il cammino chiuso BCDB non produce sostituzione sui rami, l'effetto prodotto da σ sarà il medesimo che quello del cammino chiuso ABDA, il quale produrrà un'effettiva sostituzione. Possiamo ora ragionare sul cammino chiuso ABDA come prima sopra ABCDA, spezzando l'area racchiusa in due aree parziali più piccole. Così procedendo, arriveremo ad un contorno chiuso, producente sostituzione sui rami, tutto contenuto in un cerchio del raggio fissato r, ciò che è assurdo.

È chiaro poi che se il cammino chiuso σ intersecasse sè stesso, basterebbe applicare considerazioni analoghe a quelle del §. 31 (pag. 91) per arrivare alla medesima conclusione.

Abbiamo così dimostrato il teorema: *In qualunque area semplicemente connessa, priva di punti critici, ogni ramo della funzione algebrica è una funzione finita, continua e monodroma di z.*

§. 78.

Punti di diramazione.

Andiamo ora a studiare il modo di comportarsi di una funzione algebrica nell'intorno di un punto critico $z = b$ (a distanza finita) e supponiamo dapprima che in b coincidano due o più rami, senza che alcun ramo vi diventi infinito; supponiamo cioè che b sia una radice del discriminante $D(z)$ e non del primo coefficiente $\varphi_0(z)$ (§. 76). Prendiamo un

intorno, p. e. circolare, così piccolo del punto critico b che non contenga alcun altro punto critico. Per un giro attorno a $z=b$ gli n rami $w_1, w_2, .. w_n$ subiranno una sostituzione S (che potrà anche eventualmente ridursi all'identità); decomponiamo questa sostituzione in cicli e sia

$$(w_1\, w \ldots w_p)$$

uno dei cicli contenente il ramo w_1. Per vedere la specie di singolarità che hanno in $z=b$ i p rami $w_1, w_2, .. w_p$, che si permutano ciclicamente fra loro girando attorno a b, facciamo la sostituzione

$$z-b=t^p \tag{14}$$

e consideriamo $w_1, w_2, \ldots w_p$ come funzioni di t. Se nell'intorno considerato di $z=b$ prendiamo un punto z_0 e col centro in z_0 descriviamo un cerchio che escluda b, i rami $w_1, w_2 .. w_p$ sono sviluppabili in serie di potenze di $z-z_0$. Considerati come funzioni di t in un intorno di $t=0$, essi sono quindi funzioni regolari in ogni punto, *salvo al massimo in* $t=0$. Ma ora vediamo subito che essi sono regolari anche in t, per la qual cosa basta dimostrare che facendo compiere a t un giro attorno a $t=0$ ciascun ramo, p. e. w_1, ritorna col proprio valore. E invero, per la (14), se t gira una volta attorno a $t=0$, la z gira p volte attorno a $z=b$ e sui rami di w producendosi la sostituzione S^p si vede appunto che $w_1, w_2, .. w_p$ ritornano ciascuno col medesimo valore. Avremo dunque

$$w_1 = P(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots,$$

cioè

$$w_1 = \alpha_0 + \alpha_1 (z-b)^{\frac{1}{p}} + a_2 (z-p)^{\frac{2}{p}} + \ldots \tag{15}$$

È chiaro che gli sviluppi per $w_2, w_3 \ldots w_p$ si ottengono da quello di w_1 cangiando t in $\varepsilon t, \varepsilon^2 t, \ldots \varepsilon^{p-1} t$ rispettivamente, ove si ponga

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

giacchè per un giro di z attorno a b, che muta w_1 in w_2, w_2 in $w_3 \ldots$, la $(z-b)^{\frac{1}{p}}$ acquista appunto il fattore ε.

Come si vede, nell'intorno di un punto critico $z=b$, ove più rami coincidono, questi si sviluppano in generale per *potenze frazionarie* di $z-b$, i cui esponenti hanno il medesimo denominatore.

Può anche darsi che il punto critico sia soltanto *apparente* e ciò avviene se la sostituzione S è l'identità. Allora nell'intorno di esso tutti i rami si comportano regolarmente.

Se la S non è l'identità, il punto $z=b$ si dice un punto critico algebrico o di *diramazione* per significare che, girando attorno ad un tale punto, i rami si permutano fra loro.

§. 79.

Singolarità polari.

Supponiamo ora che il valore critico $z=b$ annulli il 1.° coefficiente $\varphi_0(z)$. Se facciamo la sostituzione

$$w=\frac{1}{w'},$$

l'equazione (12) diventa

$$\varphi_n(z)\,w'^n+\varphi_{n-1}(z)\,w'^{n-1}+\ldots+\varphi_1(z)\,w'+\varphi_0(z)=0\,. \tag{16}$$

Se il valore $z=b$ annulla φ_0 senza annullare φ_1, la (16) ha per $z=b$ una sola radice nulla $w'_1=0$, talchè w'_1 è una serie di potenze di $z-b$ annullantesi per $z=b$. Supposto che vi si annulli dell'ordine n, avremo

$$w'_1=(z-b)^n\{a_1+a_2(z-b)+\ldots\}\,,\quad \text{con } a_1\neq 0\,,$$

e quindi pel ramo corrispondente w_1 della primitiva

$$w_1=\frac{A_1}{(z-b)^n}+\frac{A_2}{(z-b)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{z-b}+P(z-b)\,.$$

Quel ramo w_1, che diventa infinito per $z=b$, ha dunque semplicemente in $z=b$ una singolarità polare.

Supponiamo ora che per $z=b$ siano nulli, oltre φ_0, anche $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{r-1}$ e sia

$$\varphi_r(b)\neq 0\,.$$

Allora la (16) ha per $z=b$ precisamente r radici nulle. Una di esse, p. e. w'_1, si svilupperà nell'intorno di $z=b$ per potenze intere e positive

di $(z-b)^{\frac{1}{p}}$, supposto che il ciclo contenente w'_1 consti di p rami. Se lo sviluppo comincia colla potenza $(z-b)^{\frac{q}{p}}$, avremo

$$w'_1 = (z-b)^{\frac{q}{p}} \left\{ a_1 + a_2 (z-b)^{\frac{1}{p}} + \ldots \right\}, \quad a_1 \neq 0 ,$$

indi

$$w_1 = (z-b)^{-\frac{q}{p}} \left\{ \alpha_1 + \alpha_2 (z-b)^{\frac{1}{p}} + \ldots \right\}, \quad \alpha_1 \neq 0 ,$$

ossia

$$(17) \qquad w_1 = \frac{\alpha_1}{(z-b)^{\frac{q}{p}}} + \frac{\alpha_2}{(z-b)^{\frac{q-1}{p}}} + \ldots + \frac{\alpha_q}{(z-b)^{\frac{1}{p}}} + \mathrm{P}\left((z-b)^{\frac{1}{p}}\right).$$

In tal caso w_1 si sviluppa adunque per potenze intere, positive e negative, di

$$(z-b)^{\frac{1}{p}} ;$$

ma la parte che contiene potenze negative ha sempre un numero finito di termini. È evidente che una tale singolarità si può riguardare come proveniente dal sovrapporsi di una singolarità polare e di un punto di diramazione.

Abbiamo così esaminato il modo di comportarsi dei rami di una funzione algebrica nell'intorno di ogni punto $z=b$ a distanza finita. Resta soltanto che esaminiamo ciò che accade nell'intorno di $z=\infty$. Colla sostituzione $z=\frac{1}{z'}$ riporteremo l'esame all'intorno del punto $z'=0$, e diremo quindi che in $z=\infty$ si ha pel ramo w_1 in considerazione un punto regolare, un punto di diramazione, ovvero un polo, corrispondentemente a quello che accade per w_1 in $z'=0$.

Gli sviluppi dei rami nell'intorno di $z=\infty$, nel caso che questo punto sia singolare pel ramo, si otterranno quindi semplicemente dagli sviluppi (15) o (17), cangiandovi $z-b$ in $\frac{1}{z}$.

Riepilogando abbiamo il risultato: *Una funzione algebrica ha su tutta la sfera complessa un numero finito di punti singolari, che possono essere o poli, o punti di diramazione, o singolarità composte di queste due specie.*

§. 80.

Le funzioni algebriche come funzioni analitiche.

Ciascun ramo di una funzione algebrica di z è altresì un ramo di una funzione analitica e, come si è detto già al §. 76, la funzione analitica prolungata dà sempre un ramo della funzione algebrica. Ci rimane da risolvere l'importante questione: *Gli n rami* $w_1, w_2 .. w_n$ *della funzione algebrica* w *costituiscono una sola funzione analitica, ovvero l'insieme di più funzioni analitiche?*

La risposta è molto semplice: *avviene il primo caso se l'equazione* $f(w, z) = 0$ *è irriducibile, il secondo se è invece riducibile.*

Se la $f(w, z)$ è riducibile, cioè se si spezza nel prodotto di due fattori razionali interi

$$f(w, z) = \varphi(w, z) \,.\, \psi(w, z)\,,$$

è ben chiaro che le due equazioni

$$\varphi(w, z) = 0 \quad , \quad \psi(w, z) = 0$$

definiscono due funzioni algebriche distinte.

Ma supponiamo invece che

$$f(w, z) = 0$$

sia irriducibile; per provare che in tal caso gli n rami costituiscono un'unica funzione analitica basterà dimostrare che da un ramo w_1 si può passare, per prolungamento analitico, descrivendo convenienti cammini chiusi, ad uno qualunque degli altri. Supponiamo al contrario che da w_1 si possa così passare soltanto a

$$w_1\,,\ w_2\,, \ldots w_p \quad \text{con } p < n\,.$$

Si vede subito che i p rami $w_1, w_2, \ldots w_p$ formano un ciclo chiuso in guisa che da uno qualunque di essi si può passare per prolungamento analitico soltanto ad uno degli altri. Consideriamo allora le funzioni simmetriche elementari dei p rami del ciclo

$$F_k(z) = w_1^k + w_2^k + \ldots + w_p^k\,,$$

ove k è un intero positivo. Questa funzione analitica di z è uniforme su

tutta la sfera complessa, poichè per ogni cammino chiuso descritto da z i p rami $w_1, w_2 \ldots w_p$ si permutano fra loro e $F_k(z)$ ritorna quindi col medesimo valore. Inoltre la $F_k(z)$ possiede soltanto un numero finito di singolarità e queste sono necessariamente singolarità polari; infatti, applicando ai singoli termini w_i^k gli sviluppi (15), (17), le potenze frazionarie debbono necessariamente sparire nella somma monodroma $F_k(z)$.

Questa funzione $F_k(z)$ è dunque una *funzione razionale* di z (§. 61). Ne risulta che il prodotto

$$(w-w_1)(w-w_2)\ldots(w-w_p) = w^p + \alpha_1 w^{p-1} + \alpha_2 w^{p-2} + \ldots + \alpha_p$$

ha i suoi coefficienti funzioni razionali di z. Questo polinomio è d'altronde un fattore di

$$f(w, z) = \varphi_0(z)(w-w_1)(w-w_2)\ldots(w-w_n) ,$$

onde concludiamo appunto che $f(w, z)$ è allora riducibile.

Abbiamo così dimostrato il teorema: *Un' equazione algebrica irriducibile*

$$f(w, z) = 0 ,$$

di grado n in w, definisce un' unica funzione analitica w di z con n rami.

Dimostriamo che le proprietà caratteristiche delle funzioni analitiche algebriche consistono in ciò: 1.° esse hanno un numero finito di determinazioni o rami, 2.° su tutta la sfera complessa non hanno che un numero finito di singolarità, che sono o poli o punti di diramazione.

E invero se w è una funzione analitica di z con n rami

$$w_1 , w_2 \ldots w_n$$

ed ha un numero finito di punti singolari, nell' intorno dei quali possiede sviluppi della forma (15, (17), il ragionamento testè applicato dimostra che nel polinomio

$$w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_n = (w-w_1)(w-w_2)\ldots(w-w_n)$$

i coefficienti a sono funzioni razionali di z.

§. 81.

Gruppo di monodromia.

Consideriamo un'equazione algebrica

$$\varphi_0(z)\, w^n + \varphi_1(z)\, w^{n-1} + \ldots + \varphi_n(z) = 0\,.$$

Fissando un punto non critico A nel piano, ad ogni cammino chiuso σ descritto da z, che parta da A e vi ritorni senza passare per alcun punto critico, corrisponde (§. 77) una sostituzione S sugli n rami. Se consideriamo due cammini chiusi σ_1, σ_2, che producano rispettivamente le sostituzioni S_1, S_2, il cammino chiuso $\sigma_1\,\sigma_2$, che risulta dal percorrere prima σ_1 poi σ_2, produce evidentemente la sostituzione prodotto

$$S_1 \,.\, S_2\,.$$

In particolare il cammino σ_1^{-1}, che si ottiene percorrendo σ_1 in senso inverso, produrrà la sostituzione inversa S_1^{-1}.

Ciò premesso, consideriamo la totalità dei cammini chiusi; avremo corrispondentemente un insieme di sostituzioni sui rami che saranno necessariamente in numero finito, al massimo $= \pi(n)$. Queste sostituzioni

$$S_1\,,\ S_2 \ldots .\ S_m\,, \tag{18}$$

fra le quali si trova certamente l'identità, formano un *gruppo* poichè, per le osservazioni premesse, se S_i, S_k sono due sostituzioni qualunque della serie (18), anche il prodotto $S_i\, S_k$ trovasi nella serie stessa. Questo gruppo Γ dicesi il *gruppo di monodromia* dell'equazione. Facilmente si vede che il gruppo stesso è indipendente dal punto iniziale scelto A.

Se l'equazione è irriducibile, vi sono in Γ sostituzioni che portano un ramo qualunque in un altro qualunque, cioè *il gruppo di monodromia* Γ *è transitivo.* E invece Γ è intransitivo se la proposta è riducibile.

Il gruppo di monodromia Γ possiede le proprietà caratteristiche date dai teoremi seguenti:

1.° *Se una funzione razionale*

$$y = F(w_1\,,\ w_2 \ldots w_n,\ z)$$

degli n rami della funzione algebrica e di z rimane invariata eseguendo sugli n rami una sostituzione qualunque del gruppo Γ di monodromia, essa è una funzione razionale di z.

E infatti, pei principii della teoria delle equazioni, la y è certamente legata a z da un'equazione algebrica (risolvente della data), cioè è una funzione algebrica di z:

$$F(w_1, w_2 \dots w_n, z) = \psi(z). \tag{19}$$

Ma, descrivendo un qualunque cammino chiuso, $\psi(z)$ ritorna, per ipotesi, col medesimo valore ed è perciò una funzione razionale di z.

2.° *Inversamente, se una funzione razionale* $F(w_1, w_2 \dots w_n, z)$ *si può esprimere razionalmente per* z, *essa deve rimanere invariata per qualunque sostituzione del gruppo di monodromia.*

E infatti nella (19), ove si supponga $\psi(z)$ razionale in z, facciamo percorrere a z il cammino chiuso σ_i, che produce la sostituzione $S_i = \begin{pmatrix} w_{i_1} & w_{i_2} & \dots & w_{i_n} \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ del gruppo di monodromia. Per le proprietà del prolungamento analitico, la (19) rimarrà sempre soddisfatta e, perchè $\psi(z)$ ritorna col proprio valore, avremo

$$F(w_{i_1}, w_{i_2} \dots w_{i_n}, z) = F(w_1, w_2 \dots w_n, z),$$

c. d. d.

In generale distinto dal gruppo di monodromia è il *gruppo algebrico* G dell'equazione, pel quale intendiamo il *gruppo di Galois* per l'equazione nel campo di razionalità formato dalle quantità costanti (coefficienti) che vi figurano, aggiunto al campo stesso il parametro indeterminato z. Pel gruppo algebrico dell'equazione valgono i due teoremi sopra enunciati pel gruppo di monodromia, soltanto modificati in questo che le funzioni razionali di z ivi considerate hanno di più *coefficienti razionali*. Si dimostra che in ogni caso: *Il gruppo di monodromia* Γ *è un sottogruppo invariante del gruppo algebrico* G; *l'aggiunta di una sola irrazionalità numerica abbassa il gruppo di Galois per l'equazione da* G a Γ [1].

§. 82.

Sostituzioni elementari del gruppo di monodromia.

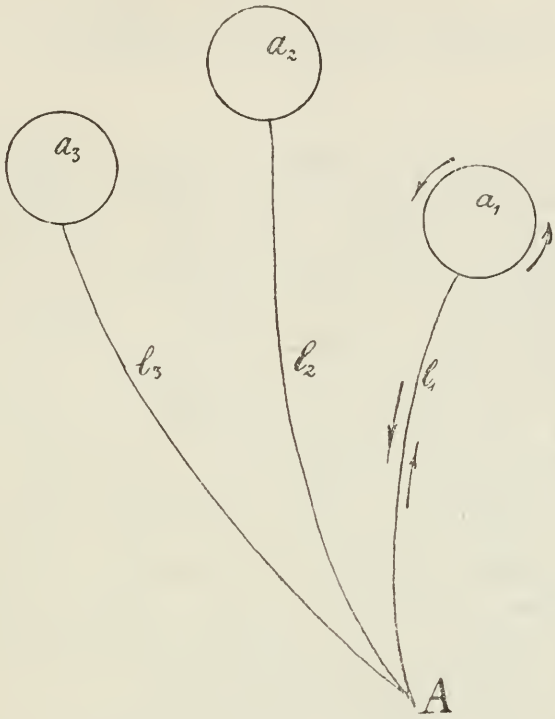
Consideriamo sulla sfera complessa i punti di diramazione in numero finito

$$a_1, a_2 \dots a_N,$$

[1] Vedi *Teoria dei gruppi e delle equazioni algebriche.*

incluso il punto ∞, se è di diramazione, e fissiamo il punto A origine dei cammini chiusi che descriviamo per calcolare le sostituzioni del gruppo di monodromia. Diciamo *cammino elementare* o *cappio* un cammino chiuso

Fig. 9.ª



foggiato nel modo seguente. Andiamo da A ad un punto A_1 vicinissimo al punto critico a_1 per un arco l_1 di curva semplice, giriamo poi intorno ad a_1, nel verso positivo, sopra una piccola circonferenza σ_1 avente il centro in a_1 indi, percorrendo l_1 in senso inverso, torniamo in A. Il cammino chiuso

$$l_1 \, \sigma_1 \, l_1^{-1}$$

sarà il cappio relativo ad a_1. Così per ciascun punto critico a_i costruiremo un cappio corrispondente $l_i \, \sigma_i \, l_i^{-1}$, in guisa che i tratti $l_1, l_2 \ldots l_N$ non s'intersechino fra loro. Corrispondentemente ad ogni cappio $l_i \, \sigma_i \, l_i^{-1}$, avremo una sostituzione s_i del gruppo di monodromia e facilmente vediamo che: *L'intero gruppo di monodromia si genera, componendo le sostituzioni elementari*

$$s_1 \, , \, s_2 \, , \ldots s_N$$

e le loro potenze fra loro. E invero qualunque cammino chiuso si può ridurre, per deformazione continua, senza attraversare punti critici, ad una successione di cappii.

Naturalmente fra le sostituzioni generatrici $s_1, s_2, \ldots s_N$ può esservene un certo numero di superflue, che risultino cioè da combinazioni delle altre. Anzi ciò avviene necessariamente se nella serie

$$a_1, \; a_2, \ldots a_N$$

sono inclusi tutti i punti di diramazione, giacchè un cammino chiuso che avvolga *tutti* i punti critici produce la sostituzione identica.

Per calcolare le sostituzioni elementari s_i, prodotte dai cappii, la ricerca fondamentale da farsi consiste nell'esaminare come si permutano fra loro i rami girando sul piccolo contorno σ_i, avvolgente il punto critico a_i. Questo insegna il metodo di Puiseux, che permette di calcolare dello sviluppo in serie per potenze frazionarie di $z - a_i$, per ogni ramo, tanti termini quanti occorrono per differenziare il ramo stesso da tutti gli altri. Ma noi non ci addentreremo qui in tali studî e solo faremo l'osservazione seguente che, calcolato il discriminante $D(z)$, permette di riconoscere se una sostituzione elementare s_i è pari o dispari, se consta cioè di un numero pari o dispari di trasposizioni.

Diciamo che: *La sostituzione elementare s_i sarà pari o dispari, secondo che il punto critico $z = a_i$ sarà pel discriminante $D(z)$ un infinitesimo (od un polo) di ordine pari o di ordine dispari.*

E infatti la radice quadrata del discriminante

$$\sqrt{D(z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \\ w_1^2 & w_2^2 & \ldots & w_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{n-1} & w_2^{n-1} & \ldots & w_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

per il cammino chiuso σ_i non cangia se s_i è pari e muta invece di segno se s_i è dispari. Ma se l'infinitesimo (o polo) è dell'ordine r l'argomento di $D(z)$ aumenta (o diminuisce) dopo il giro σ_i di $2\pi r$ e quello di $\sqrt{D(z)}$ di πr, onde avverrà il primo caso se r è pari, il secondo se r è dispari.

Capitolo VIII.

Prime nozioni sulle superficie di Riemann e sugli integrali Abeliani.

§. 83.

Concetto generale della superficie Riemanniana.

Per lo studio delle funzioni algebriche e dei loro integrali (integrali Abeliani) Riemann ha introdotta un'utile e feconda rappresentazione geometrica colle superficie che portano il suo nome. Ci proponiamo di esporre nel presente capitolo i primi concetti della teoria Riemanniana nella brevità che ci viene imposta dalla natura del presente corso. Se, proseguendo lo studio delle funzioni algebriche, si adopera, come negli ultimi §§. del Capitolo precedente, la consueta rappresentazione geometrica nella quale i valori della variabile indipendente z vengono distesi sul piano complesso di Gauss (o sulla sfera complessa), si presenta l'inconveniente che in ogni punto z la funzione algebrica w non ha più un solo valore, ma un certo numero m di valori distinti; e per seguire la variazione della w, allorquando il punto rappresentativo si muove nel piano complesso, occorre sempre tener conto del cammino seguìto dal punto per giungere dalla posizione iniziale alla finale, poichè insomma la w non è più una funzione monodroma della posizione del punto rappresentativo. L'introduzione delle superficie di Riemann ha appunto per iscopo di ristabilire la monodromia nella rappresentazione.

Chiameremo superficie di Riemann per una data equazione algebrica [1]:

$$f(w, z) = 0 \tag{1}$$

una superficie chiusa così costituita che ad ogni suo punto possa associarsi o, come diremo, pensare ivi deposta, una ed una sola coppia di valori di w, z, soddisfacenti alla (1), ed inversamente ad ogni tale coppia corrisponda uno ed un solo punto della superficie, in guisa che la corri-

---

[1] Qui ci occupiamo soltanto delle superficie di Riemann corrispondenti ad una relazione algebrica fra w, z; ma si possono egualmente considerare superficie Riemanniane per relazioni funzionali di specie qualunque. Queste superficie di monodromia possono alla loro volta prestare utili servigi nelle ricerche analitiche.

spondenza *biunivoca* fra le coppie (w, z) ed i punti della superficie sia una corrispondenza *continua*.

Ammessa per un momento la possibilità di costruire una tale superficie Riemanniana R, possibilità che fra breve dimostreremo, è chiaro che se il punto rappresentativo P descriverà sulla superficie R un cammino chiuso qualsiasi, la coppia iniziale (w, z) sarà ricondotta. attraverso ad una catena continua di valori, alla coppia primitiva stessa ed avremo così perfettamente ristabilita la monodromia. Osserviamo che sulla superficie Riemanniana R ogni valore z della variabile indipendente dovrà manifestamente trovarsi disteso tante volte quanti sono i valori di w corrispondenti ad un medesimo valore di z e cioè precisamente m volte, se la (1) è di grado m in w; similmente ogni valore di w si troverà sulla R ripetuto n volte, se n è il grado della (1) in z.

La definizione stessa che abbiamo dato della superficie R di Riemann rende evidente che potremo sostituire ad R qualunque altra superficie chiusa R′, tale che fra i punti di R e quelli di R′ possa stabilirsi una corrispondenza biunivoca e continua, bastando per ciò immaginare deposta ogni coppia di valori w, z, soddisfacenti alla (1), anzichè in un punto P di R, nel corrispondente punto P′ di R′. In questi studî adunque la forma e la grandezza delle varie parti della superficie rappresentativa non hanno per sè importanza alcuna e solo essenziale è la relazione di contiguità fra le parti stesse. Conviene per ciò immaginare la superficie come formata da un velo *perfettamente flessibile ed estendibile* e le infinite forme che possono darsi alla superficie deformandola in modo continuo, senza rottura nè duplicatura, saranno perfettamente sostituibili, pel nostro scopo, alla superficie primitiva. Anzi potremo più in generale ammettere di spezzare la superficie in un numero qualsiasi di parti e, dopo di avere deformata in modo arbitrario ciascuna delle parti, di riunire ancora i varii pezzi, solo che si facciano alla fine coincidere nuovamente i punti, che si trovavano riuniti sulla superficie primitiva. Ammetteremo ancora che il velo ideale, da cui la superficie è costituita, possa liberamente attraversare sè stesso e fra due regioni che mutuamente si attraversano penseremo non aver luogo, lungo la linea di passaggio, connessione alcuna, se non ha luogo la coincidenza dei valori di w, z che nelle due regioni immaginiamo deposti in un medesimo punto di questa linea [1]. Del resto

---

[1] Un tale punto rappresenta dunque due punti distinti della superficie, secondo che si pensa della prima o della seconda regione.

si può in ogni caso, con deformazione continua, ridurre una superficie Riemanniana ad una superficie libera nello spazio che non attraversi mai sè medesima, evitando così anche la leggiera difficoltà che questo modo di concepire le cose suole presentare da principio.

§. 84.

La superficie Riemanniana a due fogli per le funzioni $w = \sqrt{z}$, $w = \sqrt{P(z)}$.

Esposto il concetto generale di superficie Riemanniana, andiamo ora a dimostrare come per una data equazione algebrica (1) si costruisca effettivamente una tale superficie nella forma ordinaria di m fogli o strati sovrapposti. Per maggior chiarezza comincieremo da alcuni casi semplici, per elevarci poi alle considerazioni generali.

Prendiamo a considerare dapprima la semplicissima funzione algebrica

$$w = \sqrt{z}\,.$$

La polidromia di questa funzione nell'ordinario piano complesso (sfera complessa) nasce dal girare *isolatamente* attorno al punto di diramazione $z = 0$, ovvero attorno all'altro $z = \infty$, poichè per un tale giro un ramo del radicale si cangia con continuità nell'opposto. Immaginiamo il piano tagliato lungo una linea che dal punto $z = 0$ vada senza intersecare sè stessa, all'infinito, per es. pensiamo, per fissare le idee, eseguito un tale taglio lungo la parte negativa dell'asse reale da 0 a $-\infty$. Scelto in un punto z, per es. in $z = 1$, uno dei valori del radicale, diciamo $w = +1$, quel ramo sarà nel piano così tagliato una funzione monodroma della z. In due punti di fronte sui due orli del taglio i valori di w saranno eguali e di segno contrario e precisamente, supposto il taglio eseguito come sopra, i valori di w sull'orlo superiore (o destro) saranno puramente immaginarii col coefficiente dell'immaginario positivo, quelli sull'orlo inferiore (sinistro) i coniugati. Così abbiamo la rappresentazione geometrica per uno solo dei rami della nostra funzione algebrica.

Ma immaginiamo di prendere un secondo piano complesso, o come diciamo un secondo foglio, che tagliamo precisamente come il primo e sovrapponiamo a questo. Su questo secondo foglio distendiamo i valori del secondo ramo, partendo ad esempio dal medesimo punto $z = 1$, ove questa volta prenderemo il valore opposto $w = -1$ del radicale. Così

in due punti collocati l'uno sull'altro dei due fogli F_1, F_2 i valori ivi deposti per w saranno sempre uguali e di segno contrario, e per ciò i valori di w sull'orlo destro del taglio in F_1 coincideranno ordinatamente con quelli dell'orlo sinistro in F_2 e quelli dell'orlo sinistro su F_1 con quelli dell'orlo destro su F_2. E allora se immaginiamo connessi o saldati l'uno all'altro l'orlo destro di F_1 col sinistro di F_2 e quello sinistro di F_1 col destro di F_2, verremo appunto a formare un'unica superficie a due fogli o strati che si connettono, intrecciandosi fra loro, lungo la linea primitiva del taglio (sezione di diramazione). Ad ogni coppia distinta di valori di w, z, soddisfacenti all'equazione $w^2 = z$, corrisponderà così uno ed un solo punto della nostra superficie e questa corrispondenza sarà evidentemente biunivoca e continua; abbiamo così costruita la superficie Riemanniana a due fogli per l'equazione $w^2 - z = 0$.

Prendiamo ora a considerare più in generale la equazione algebrica

$$w^2 = P(z),$$

dove $P(z)$ indica un polinomio razionale intero in z a radici tutte semplici e cerchiamo di costruire la superficie Riemanniana corrispondente. I punti di diramazione a distanza finita della funzione $w = \sqrt{P(z)}$ sono qui tutti e soli gli infinitesimi di $P(z)$, e il punto $z = \infty$ sarà un punto di diramazione o no secondo che il grado del polinomio è impari o pari. In ogni caso adunque il numero totale dei punti di diramazione sarà pari e noi lo indicheremo con $2p+2$, dove adunque il grado del polinomio sarà $2p+1$ se dispari, e $2p+2$ se pari. Indichiamo con

$$e_1\,,\ e_2\,;\ e_3\,,\ e_4\,;\ \ldots\ e_{2p+1}\,,\ e_{2p+2}$$

i punti di diramazione, distribuiti arbitrariamente in coppie, e nel piano complesso z immaginiamo congiunto ciascun punto di diramazione e_{2r-1} col successivo e_{2r} con una linea che non intersechi sè medesima nè le altre precedenti e lungo queste $p+1$ linee eseguiamo altrettanti tagli. Se nel piano complesso così tagliato fissiamo in un punto O, diverso dai punti di diramazione, il valore che assumiamo per $\sqrt{P(z)}$, indi prolunghiamo analiticamente il ramo, otterremo distesi su questo primo foglio F_1 i valori di un ramo del nostro radicale, che costituiranno una funzione monodroma, poichè in esso foglio sono resi impossibili i giri attorno ad un numero dispari di punti di diramazione. Prendasi ora un secondo foglio F_2, tagliato precisamente come F_1, e sovrapposto a questo,

sul quale deponiamo in ogni punto quel valore di $\sqrt{P(z)}$ che è l'opposto del valore che il radicale ha nel punto sottostante di F_1; così anche in F_2 avremo una distribuzione monodroma dei valori del secondo ramo. Ora lungo ogni taglio i valori di $\sqrt{P(z)}$ all'orlo destro (o sinistro) di F_1 coincidono con quelli all'orlo sinistro (destro) di F_2 e per ciò, se immaginiamo nuovamente di connettere questi quattro orli nel modo di prima, otterremo un'unica superficie a due fogli che si connettono intrecciandosi lungo le $p+1$ sezioni di diramazione, e in essa avremo evidentemente la superficie Riemanniana cercata.

Osserviamo che in luogo di costruire la nostra superficie adoperando fogli piani, sovrapposti all'ordinario piano complesso, potremmo egualmente operare sulla sfera complessa con fogli sferici, nel qual caso parleremo della sfera Riemanniana a più strati.

§. 85.

Deformazione della superficie Riemanniana in quella di una sfera, di un anello ecc.

Possiamo assoggettare la superficie Riemanniana costruita ad una qualunque deformazione continua, secondo le osservazioni generali del §. 83; in particolare vogliamo qui mostrare come si può dedurne una superficie libera nello spazio, che non attraversi sè medesima.

Riprendiamo per ciò la costruzione della prima superficie Riemanniana per $w=\sqrt{z}$ prima della connessione stabilita fra gli orli dei tagli di F_1, F_2. Supposti sempre i tagli eseguiti lungo la parte negativa dell'asse reale, ribaltiamo ad esempio il foglio F_1 attorno all'asse reale, sicchè i valori di un ramo del radicale risulteranno distribuiti sulla pagina superiore [1] del foglio F_2 e quelli del secondo ramo sulla pagina inferiore di F_1. Attualmente lungo gli orli dei tagli in F_1, F_2 coincideranno i valori di $\sqrt{w(z)}$ immediatamente sovrapposti, sicchè connettendo gli orli corrispondenti avremo in sostanza l'ordinario piano rivestito nella sua pagina superiore ed inferiore di un doppio velo continuo che si piega attraverso la fenditura praticata lungo il semiasse reale. Deformando in modo continuo questo velo, possiamo dargli la forma omologa sferica ed

---

[1] Immaginiamo, per fissare le idee, i fogli collocati sopra un piano orizzontale.

anche, continuando la deformazione, foggiare in modo arbitrario, scostandoli, gli orli della fenditura, così p. e. da farne un circolo della sfera diviso in due sèmicerchi, ciascuno dei quali corrisponde ad uno degli antichi orli. Così avremo una calotta sferica rivestita internamente ed esternamente di un unico velo, che potremo deformare ancora in guisa da dargli la forma di una superficie chiusa, dappertutto convessa verso l'esterno, p. e. di nuovo la forma sferica. Per tal modo, da ultimo, avremo trasformata la superficie Riemanniana, primitiva in una sfera ordinaria [1].

Consideriamo ora il caso della superficie Riemanniana a due fogli per la funzione $w = \sqrt{P(z)}$, quando il polinomio $P(z)$ è di terzo o quarto grado in z e quindi, nelle notazioni del §. 84, abbiamo $p = 1$ e conseguentemente 2 sezioni di diramazione. Immaginiamo che la nostra superficie sia una sfera Riemanniana a due fogli e, per fissare le idee, le due sezioni di diramazione siano praticate in un meridiano verticale e simmetricamente disposte rispetto al diametro verticale. Tolta la connessione fra i due fogli lungo le sezioni di diramazione, si deformi con continuità l'uno e l'altro foglio sì da foggiarli p. e. a cilindri circolari coassiali nei quali le circonferenze delle basi rappresenteranno le sezioni di diramazione, divisa ciascuna da un diametro in due metà corrispondenti agli orli destro e sinistro del primitivo taglio. Si estragga, parallelamente all'asse, il foglio cilindrico interno e dopo averlo ribaltato attorno al detto diametro di una delle circonferenze basi si riavvicinino nuovamente i due cilindri sì da riunirli per le due circonferenze basi di fronte, con che appunto verremo a riunire, per una delle sezioni di diramazione, i punti congiunti primitivamente sulla superficie Riemanniana.

Nell'unico cilindro così risultante i punti delle due basi sopra una medesima generatrice rappresenteranno ancora un solo e medesimo punto della superficie Riemanniana. Per unire effettivamente anche questi, basta immaginare di deformare in modo continuo il cilindro, incurvando p. e. a forma di archi circolari, vieppiù vicini ad una circonferenza completa, le generatrici, ed alla fine, saldando insieme le circonferenze basi dell'anello aperto, otterremo la superficie chiusa dell'anello completo o toro, che potremo adoperare come superficie Riemanniana nel caso considerato.

---

[1] Naturalmente su questa sfera trovansi distesi *due* volte i valori di z ed una sola volta quelli di w.

Se consideriamo ora il caso più generale della sfera Riemanniana a due fogli per la funzione $w = \sqrt{P(z)}$, il polinomio $P(z)$ avendo il grado $2p+1$ o $2p+2$, potremo procedere in modo analogo togliendo la connessione dei due fogli lungo le $p+1$ sezioni di diramazione ed, estratto il foglio interno, potremo deformare i due fogli in guisa da conservare p. e. ad ambedue la forma sferica e da ridurre ciascuna fenditura alla forma di un circolo minore completo. I due fogli porteranno così $p+1$ aperture circolari ciascuno, che due a due si corrispondono e i cui orli corrispondenti debbono nuovamente congiungersi fra loro. Per una coppia di questi contorni possiamo operare direttamente il congiungimento dei due fogli e deformare poi l'unica superficie risultante, riducendola p. e. ad una sfera con $2p$ aperture circolari che si dividono in p coppie, i cui orli corrispondenti sono ancora da congiungersi fra loro. La deformazione che resta da eseguire può immaginarsi compiuta in guisa che la riunione di un contorno circolare col corrispondente abbia luogo per mezzo di un anello esterno alla sfera. Da ultimo avremo così ridotta la nostra superficie Riemanniana ad una sfera con p anelli, o manichi.

§. 86.

La superficie Riemanniana a m fogli per l'equazione $f(w, z) = 0$.

Le considerazioni relative ai casi particolari sopra trattati renderanno ora più chiaro il procedimento da seguirsi pel caso generale. Data un'equazione algebrica qualunque

$$f(w, z) = 0 ,$$

il cui grado in w indicheremo con m, segnamo sul piano complesso z gli *effettivi* punti di diramazione, che indicheremo con

$$a_1 , \ a_2 , \ a_3 , \ldots a_N$$

comprendendovi naturalmente il punto $z = \infty$, se questo sarà un punto di diramazione; e fissato nel medesimo piano un punto O, distinto dai punti di diramazione, riuniamolo ai punti $a_1, a_2, \ldots a_N$ mediante N linee semplici $l_1, l_2, \ldots l_N$, che non intersechino sè stesse, nè si intersechino fra loro. Prendiamo ora m fogli $F_1, F_2, \ldots F_m$, che sovrapponiamo tutti al piano complesso, e in ciascuno di essi, sia F_i, segniamo il punto O_i

sovrapposto ad O e le linee $l_i^{(i)}$, $l_2^{(i)} \ldots l_N^{(i)}$ sovrapposte a $l_1, l_2 \ldots l_N$, e lungo queste linee $l_1^{(i)}, l_2^{(i)} \ldots l_N^{(i)}$, eseguiamo nel foglio F_i altrettanti tagli. Nel punto O gli m valori di w sono distinti e siano

$$w_1 , \; w_2 , \ldots w_m ,$$

ciascuno dei quali attribuiremo ordinatamente in $O_1, O_2 \ldots O_m$ ai fogli $F_1, F_2 \ldots F_m$. Se nel foglio F_i così tagliato, partendo dal valore w_i di w in O_i, seguiamo il prolungamento analitico di questo ramo di w, verremo a deporre in ogni punto di F_i un unico e determinato valore di w e questi valori costituiranno sopra il foglio tagliato F_i una funzione monodroma. Se consideriamo gli m punti $p_1, p_2, \ldots p_m$ sovrapposti in $F_1, F_2, \ldots F_m$ ad un medesimo punto qualsiasi p del piano complesso (distinto naturalmente dai punti di diramazione), i corrispondenti valori di w, che indicheremo senza ambiguità con

$$w_{p_1} , \; w_{p_2} , \ldots w_{p_m} ,$$

vi saranno manifestamente tutti distinti e daranno gli m valori di w corrispondenti al valore di z nel punto p. Consideriamo in particolare ciò che accade in punti sovrapposti ai due orli di m tagli $l_s^{(1)} \, l_s^{(2)} \ldots l_s^{(m)}$ corrispondenti sopra $F_1, F_2 \ldots F_m$. Distinguendo i due orli di un taglio in destro e sinistro, siano $p_1, p_2, \ldots p_m$ gli m punti sovrapposti sull'orlo destro e $q_1, q_2, \ldots q_m$ gli m punti di fronte sull'orlo sinistro, punti che corrispondono tutti ad un solo e medesimo valore di z, sia $z = a$. Tanto i valori

$$w_{p_1} , \; w_{p_2} \ldots w_{p_m} ,$$

quanto gli altri

$$w_{q_1} , \; w_{q_2} \ldots w_{q_m} ,$$

danno tutte e sole le radici della nostra equazione algebrica per $z = a$ e per ciò, prescindendo dall'ordine, sono i medesimi; supponiamo dunque che si abbia

$$w_{p_1} = w_{q_{i_1}} , \; w_{p_2} = w_{q_{i_2}} \ldots w_{p_m} = w_{q_{i_m}} ,$$

ove $i_1, i_2 \ldots i_m$ sono i numeri $1, 2, \ldots m$ in altro ordine. Se spostiamo p_1 lungo l'orlo destro del taglio considerato sopra F_1 e contemporaneamente q_{i_1}, nel medesimo modo, lungo l'orlo sinistro del taglio in F_{i_1}, avremo manifestamente sempre $w_{p_1} = w_{q_i}$, e similmente $w_{p_2} = w_{q_{i_2}}, \ldots w_{p_m} = w_{q_{i_m}}$,

talchè dappertutto, lungo quegli m tagli sovrapposti, i valori di w deposti sull'orlo destro in $F_1, F_2 \ldots F_m$ coincideranno ordinatamente con quelli dell'orlo sinistro in $F_{i_1}, F_{i_2} \ldots F_{i_m}$. Per ciò lungo questi tagli l'orlo destro in $F_1, F_2, \ldots F_m$ si connetterà rispettivamente col sinistro in $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots F_{i_m}$ ed eseguita questa operazione per tutti i sistemi di tagli, avremo costruita una superficie i cui punti corrispondono biunivocamente ed in modo continuo alle coppie di valori w, z, che soddisfano all'equazione algebrica proposta. Questa superficie ad m fogli o strati è adunque la superficie Riemanniana cercata; essa risulterà connessa allora ed allora soltanto quando la equazione proposta sia irriducibile.

Alla costruzione della superficie Riemanniana generale facciamo seguire alcune considerazioni esplicative. Il congiungimento dei fogli lungo una sezione di diramazione, che parte da un punto di diramazione, avviene precisamente nel modo stesso come gli m rami si permutano per un giro nel piano semplice attorno a questo punto $z = a_i$. Se decomponiamo la sostituzione corrispondente in un prodotto di sostituzioni circolari, gli m fogli si decomporranno in altrettanti gruppi e se uno di essi è composto dei fogli $F_1, F_2, \ldots F_r$, questi r fogli saranno congiunti ciclicamente fra loro, sicchè girando attorno al punto di diramazione si passerà dal foglio F_1 a F_2, da F_2 a F_3; ... da F_{r-1} a F_r e in fine da F_r si ritornerà sopra F_1. Il punto di diramazione nel quale gli r fogli sono congiunti ciclicamente fra loro è un unico punto della superficie Riemanniana R e dicesi un punto di diramazione *dell'ordine* $r-1$. Al punto di diramazione $z = a_i$ del piano semplice corrispondono dunque, sulla superficie Riemanniana, tanti punti distinti quante sono le sostituzioni circolari, nelle quali si decompone la sostituzione sui rami per un giro attorno a $z = a_i$.

Ciò premesso, è facile definire l'*intorno* di un punto qualsiasi della superficie Riemanniana. Se il punto che si considera non è di diramazione, una piccola curva chiusa che giri una volta attorno al punto, p. e. un circolo col centro nel punto, descritta nel foglio a cui il punto appartiene, limiterà il detto intorno [1]. Se il nostro punto è un punto di

---

[1] Può anche darsi che il punto in considerazione appartenga a più fogli della superficie Riemanniana, senza che ivi abbia luogo diramazione. Ciò avviene se più rami della funzione algebrica w coincidono in quel punto senza diramarsi; ed in tal caso saranno da considerarsi tanti intorni del punto quanti sono i fogli a cui appartiene.

diramazione d'ordine $r-1$ e congiunge ciclicamente i fogli $F_1, F_2, \ldots F_r$, la curva chiusa che limita l'intorno farà un giro sul primo foglio F_1, un secondo giro su F_2 ecc. un r^{mo} giro sopra F_r, e soltanto dopo compiuti questi r giri si chiuderà. In tal caso l'intorno del punto è assimilabile all'insieme di r spire di una superficie elicoidale di passo infinitesimo.

§. 87.

Funzioni uniformi sulla superficie Riemanniana.

Data un'equazione algebrica

$$f(w, z) = 0 ,$$

abbiamo visto come si può costruire una superficie Riemanniana ad m fogli che rappresenta geometricamente il modo di diramazione della funzione algebrica.

Ma il concetto più importante e fecondo della teoria Riemanniana consiste appunto nella inversione di quest'ordine di considerazioni, nel supporre cioè data a *priori* una superficie a m fogli, distesi sull'ordinario piano complesso, connessi fra loro mediante sezioni di diramazione comunque assegnate. Una tale superficie definisce sempre, secondo Riemann, una classe di corrispondenti funzioni algebriche. Questo importante risultato che Riemann deduceva, in modo non rigoroso, applicando il così detto principio di Dirichlet, venne posto fuori di dubbio dalle ricerche di Neumann e Schwarz.

Noi ci limiteremo all'avere così accennato a questo punto più elevato di vista, e nelle ricerche ulteriori del presente capitolo supporremo sempre data un'equazione algebrica fondamentale

$$f(w, z) = 0 \tag{1}$$

e costruita la corrispondente superficie R di Riemann, alla quale applicheremo le nostre considerazioni.

Sopra una superficie Riemanniana R si possono studiare le funzioni di variabile complessa precisamente come sull'ordinario piano semplice, ed è appunto di questo studio che vogliamo ora occuparci. Ma in primo

luogo, per maggiore chiarezza e brevità dell'esposizione, definiamo ciò che intenderemo per *variabile principale* in un punto della superficie di Riemann. Se il punto $z = a$ che si considera è un punto ordinario (non di diramazione) a distanza finita, chiameremo variabile principale il binomio $z - a$ ed, ove il punto ordinario in considerazione sia all'infinito, la variabile principale nel punto sarà $\frac{1}{z}$.

Quando il punto $z = a$ sia un punto di diramazione a distanza finita d'ordine $r - 1$, la sostituzione

$$z - a = t^r$$

darà la rappresentazione *conforme* dell'intorno del punto in considerazione sopra un disco circolare semplice del piano t e si assumerà allora

$$t = (z - a)^{\frac{1}{r}}$$

come variabile principale. In fine se il punto di diramazione d'ordine $r - 1$ è all'infinito, prenderemo corrispondentemente per variabile principale

$$t = z^{-\frac{1}{r}}.$$

Una funzione v di variabile complessa sulla superficie R si dirà *regolare* in un punto se essa è sviluppabile nell'intorno del punto in serie di potenze intere e positive della *variabile principale*, per il che sarà necessario e sufficiente, secondo il teorema di Cauchy, che essa sia finita, continua e monodroma nell'intorno del punto. Similmente nell'intorno di un punto singolare *isolato* la v, supposta monodroma nell'intorno, sarà sviluppabile in serie di Laurent per le potenze intere ascendenti e discendenti della variabile principale t e, se la seconda parte sarà una serie infinita, la singolarità si dirà essenziale; polare nel caso opposto.

In quest'ultimo caso si dirà ordine della singolarità polare o d'infinito l'esponente della massima potenza negativa di t, che figura nello sviluppo. In modo del tutto simile si definirà l'ordine di infinitesimo in un punto $z = a$, ove la funzione v si annulli, comportandovisi regolarmente; l'infinitesimo di 1.° ordine in qualsiasi punto della superficie Riemanniana è dunque dato dalla prima potenza t della variabile principale.

Particolarmente importanti sono le funzioni v che esistono su tutta la superficie Riemanniana e sono ivi *monodrome*, cioè le funzioni uniformi della superficie Riemanniana. Formiamo subito di tali funzioni, considerando un polinomio razionale intero in w, i cui coefficienti siano funzioni uniformi di z in tutto il piano complesso. Il grado di questo polinomio si potrà abbassare ad $m-1$, tenendo conto dell'equazione (1) di grado m in w, cui w soddisfa, e si avrà così

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \ldots + \alpha_{m-1} w^{m-1}, \tag{2}$$

dove le α sono funzioni uniformi di z in tutto il piano complesso. È evidente che una tale funzione v è uniforme sulla superficie Riemanniana; i suoi punti singolari si trovano unicamente fra i punti singolari (poli) della funzione algebrica w ed i punti singolari dei coefficienti α.

Dimostriamo ora inversamente che la (2) ci dà la più generale espressione di una funzione uniforme sulla superficie Riemanniana. Per ciò osserviamo che una funzione *monodroma* v sulla superficie Riemanniana, considerata come funzione analitica sul piano semplice z, avrà in ogni punto m ed m determinazioni soltanto distinte (m rami), che indicheremo con

$$v_1 , v_2 , \ldots v_m ,$$

corrispondentemente ai valori

$$w_1 , w_2 \ldots w_m ,$$

che hanno luogo per w nei punti sovrapposti degli m fogli. La monodromia di v sulla superficie Riemanniana si tradurrà nel piano semplice z in ciò che per qualunque cammino chiuso tracciato in questo piano le $v_1, v_2 \ldots v_m$ subiranno la medesima sostituzione di $w_1, w_2 \ldots w_m$. Ciò posto, se dalle m equazioni lineari:

$$\left\{\begin{array}{l} v_1 = \alpha_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_1^2 + \ldots + \alpha_{m-1} w_1^{m-1} \\ v_2 = \alpha_0 + \alpha_1 w_2 + \alpha_2 w_2^2 + \ldots + \alpha_{m-2} w_2^{m-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_m = \alpha_0 + \alpha_1 w_m + \alpha_2 w_m^2 + \ldots + \alpha_{m-1} w_m^{m-1} \end{array}\right.$$

ricaviamo i valori delle α, troviamo per una qualunque di esse:

$$(3) \qquad \alpha_r(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & w_1 \dots w_1^{r-1} & v_1 & w_1^{r+1} \dots w_1^{m-1} \\ 1 & w_2 \dots w_2^{r-1} & v_2 & w_2^{r+1} \dots w_2^{m-1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 & w_m \dots w_m^{r-1} & v_m & w_m^{r+1} \dots w_m^{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & w_1 \dots w_1^{r-1} & w_1^{r} & w_1^{r+1} \dots w_2^{m-1} \\ 1 & w_2 \dots w_2^{r-1} & w_2^{r} & w_2^{r+1} \dots w_2^{m-1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 & w_m \dots w_m^{r-1} & w_m^{r} & w_m^{r+1} \dots w_m^{m-1} \end{vmatrix}},$$

dove il determinante denominatore, come prodotto delle differenze di $w_1, w_2, \dots w_m$ è certamente diverso da zero (salvo che nei punti di diramazione). Un giro qualunque nel piano semplice z, producendo la medesima sostituzione sopra $v_1, v_2, \dots v_m$ come sopra $w_1\, w_2, \dots w_m$, non altera il secondo membro della (3) e perciò $\alpha_r(z)$ è una funzione uniforme di z nel piano semplice z. Così adunque: *Qualunque funzione uniforme v sulla superficie Riemanniana può porsi sotto la forma* (2), *dove le α sono funzioni uniformi di z nel piano semplice.*

§. 88.

Teorema di Cauchy, residui e indicatore logaritmico.

Alle funzioni uniformi sulla superficie Riemanniana possono estendersi i teoremi fondamentali relativi alle funzioni uniformi sul piano semplice, come ora vogliamo brevemente dimostrare. In primo luogo supponiamo che in un'area connessa della superficie Riemanniana la nostra funzione uniforme v sia dappertutto regolare e dimostriamo che sussisterà ancora il teorema fondamentale di Cauchy:

$$\int_S v\, dz = 0\,,$$

l'integrale essendo esteso al contorno completo dell'area. Se quest'area occupa col suo contorno un solo strato della superficie Riemanniana, la cosa è evidente, non differendo allora il teorema dall'ordinario.

Se al contrario essa occupa più strati, basterà decomporre l'area in tante aree parziali, ciascuna delle quali si trovi tutta in un solo foglio, ciò che si può sempre fare aggiungendo convenienti contorni. Gli integrali estesi al contorno completo di ciascuna area parziale saranno nulli ciascuno per sè e per ciò anche la loro somma, nella quale gli integrali estesi ai contorni aggiunti si distruggeranno due a due, perchè percorsi ciascuno due volte in senso contrario, e rimarrà appunto $\int_s v\,dz = 0$.

Al teorema di Cauchy si lega la considerazione dei *residui*. Per residuo in un punto della superficie Riemanniana di una funzione v, che ivi abbia al più una singolarità isolata, intendiamo, in analogia colla definizione data pel piano semplice, il valore dell'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma v\,dz$ esteso, nel senso positivo, ad una curva chiusa σ che limiti l'intorno del punto. Come al §. 53, si vedrà che se il punto $z = a$ è un punto ordinario della superficie Riemanniana a distanza finita, il residuo di v in $z = a$ sarà il coefficiente di $\frac{1}{z-a}$ nello sviluppo di v; e se si tratta di un punto (ordinario per la superficie Riemanniana) all'infinito, il residuo sarà il coefficiente di $\frac{1}{z}$ cangiato di segno.

Sia ora $z = a$ un punto di diramazione a distanza finita, d'ordine $r-1$. Per calcolare il residuo, cioè il valore dell'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma v\,dz\,,$$

converrà in questo caso introdurre la variabile principale t (§. 87), ponendo

$$z - a = t^r\,,$$

e risulterà

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma v\,dz = r\,.\,\frac{1}{2\pi i}\int_s v\,t^{r-1}\,dt\,,$$

l'integrale del secondo membro essendo esteso ad una piccola curva chiusa s, che nel piano semplice t giri una volta attorno a $t = 0$. Se supponiamo adunque che nello sviluppo di v nell'intorno di $z = a$ per

potenze di $(z-a)^{\frac{1}{r}}$ sia B il coefficiente di $\frac{1}{z-a}$, pel valore del residuo avremo precisamente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma} v\,dz = r\mathrm{B}\,.$$

Affatto similmente si vedrà che, se il punto di cui si tratta è all'infinito ed è nello stesso tempo un punto di diramazione dell'ordine $r-1$, il residuo sarà dato da $-r\mathrm{B}$, indicando nuovamente B il coefficiente di $\frac{1}{z}$ nello sviluppo di v nell'intorno di quel punto.

Dopo queste considerazioni è manifesto che se in un'area della superficie Riemanniana avremo una funzione monodroma dappertutto regolare, salvo che in un numero finito di punti singolari, l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_s v\,dz$, esteso al contorno dell'area, sarà eguale alla somma dei residui nell'interno.

Si può facilmente estendere anche il teorema sull'indicatore logaritmico di Cauchy (§. 56), supponendo di considerare un'area della superficie Riemanniana ove la funzione uniforme non abbia nell'interno che singolarità polari (e per ciò in numero finito) e sul contorno non diventi nè zero nè infinita. Se consideriamo infatti il modo di comportarsi della derivata logaritmica $\frac{v'}{v}$, facilmente vediamo che essa ha singolarità polari del 1.° ordine dove la v diventa infinitesima o infinita e precisamente con residuo eguale all'ordine di infinitesimo di v o a quello dell'infinito, preso questa seconda volta col segno contrario. E infatti supponiamo p. e. che in $z=a$ la v diventi infinitesima d'ordine q e, per maggiore generalità, supponiamo che questo punto sia di diramazione dell'ordine $r-1$; avremo nell'intorno di a per v uno sviluppo della forma

$$v = (z-a)^{\frac{q}{r}}\left\{\alpha_0 + \alpha_1 (z-a)^{\frac{1}{r}} + \ldots\right\},$$

con $\alpha_0 \neq 0$, e perciò

$$\frac{v'}{v} = \frac{q}{r(z-a)} + \mathrm{P}\left((z-a)^{\frac{1}{r}}\right).$$

Il residuo di $\frac{v'}{v}$ in $z = a$ è adunque

$$r \frac{q}{r} = q,$$

come si è asserito. Affatto analogamente si procederà nel caso di un infinito e nel caso in cui l'infinitesimo o il polo di v sia all'infinito.

Ma qui è da notarsi che, a differenza delle funzioni uniformi sul piano semplice, la derivata logaritmica può avere singolarità polari anche in punti dove la funzione è regolare e non infinitesima; in tal caso però il residuo di $\frac{v'}{v}$ sarà ivi *nullo*. E infatti la circostanza notata può verificarsi solo in un punto di diramazione, sia p. e. $z = a$, a distanza finita; se esso è dell'ordine $r - 1$, avremo nell'intorno

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 (z - a)^{\frac{1}{r}} + \alpha_2 (z - a)^{\frac{2}{r}} + \ldots$$

con $\alpha_0 \neq 0$, e perciò

$$\frac{v'}{v} = (z - a)^{\frac{1}{r} - 1} \, \mathrm{P}\left((z - a)^{\frac{1}{r}}\right).$$

Come si vede, nello sviluppo di $\frac{v'}{v}$ vi sono anche, in generale, potenze negative di $(z - a)^{\frac{1}{r}}$, ma con esponente non eccedente $r - 1$ e per ciò il residuo è certamente nullo, c. d. d.

Dopo ciò è evidente che la formola dell'indicatore logaritmico:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{v' \, dz}{v} = \mathrm{N}_0 - \mathrm{N}_\infty$$

sarà applicabile anche sulla superficie Riemanniana.

§. 89.

Funzioni razionali sulla superficie Riemanniana.

Fra le funzioni uniformi sopra la sfera Riemanniana particolarmente notevoli sono quelle che offrono soltanto singolarità polari, e diconsi *funzioni razionali* sulla superficie Riemanniana perchè, come ora dimostreremo, *esse sono in ogni caso funzioni razionali delle due variabili* w, z,

legate fra loro dalla equazione fondamentale (1). Ad una tale funzione razionale, tenendo conto della (1) stessa, si potrà sempre dare la forma

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \ldots + \alpha_{m-1} w^{m-1}, \tag{4}$$

dove le α sono funzioni razionali di z. Che una funzione data dalla (4) sia uniforme sulla sfera Riemanniana ed abbia soltanto singolarità polari, risulta chiaramente da ciò che i punti singolari della funzione algebrica w sulla sfera Riemanniana sono appunto di natura polare (§. 79), e d'altronde le α, come funzioni razionali di z, hanno già soltanto singolarità polari nel piano z.

Ma la proposizione inversa enunciata risulta pure facilmente da quanto si è visto al §. 87. Supposto infatti la v uniforme su tutta la sfera Riemanniana, potremo scrivere la (4) e le α saranno funzioni uniformi di z nel piano z. Ora, se la v ha soltanto singolarità polari, nello sviluppo in serie degli m rami della v per potenze della variabile principale il numero delle potenze negative sarà in ogni caso finito, e la formola (3) pag. 229 per la α_r dimostra che nello sviluppo in serie di α_r per potenze di $z-c$ o di $\frac{1}{z}$, nell'intorno di un punto singolare $z=c$ o $z=\infty$, le potenze negative saranno sempre in numero finito. Dunque le α, essendo uniformi in tutto il piano complesso z e con sole singolarità polari, saranno appunto funzioni razionali di z, c. d. d.

Una funzione razionale v sulla superficie Riemanniana non può mancare affatto di poli, a meno che non si riduca ad una costante. In caso contrario infatti, se indichiamo con $v_1, v_2, \ldots v_m$ le m determinazioni di v, le loro funzioni simmetriche elementari

$$\sum v_i \ , \ \sum v_i v_k \ , \ \sum v_i v_k v_l \ldots$$

sarebbero funzioni razionali di z prive di poli e per ciò costanti, onde v stessa sarebbe costante. Una funzione razionale v sulla superficie Riemanniana ha quindi un certo numero (finito) di poli e se applichiamo le considerazioni stesse del §. 54 troviamo: *La somma di tutti i residui di una funzione razionale sulla superficie Riemanniana è nulla.*

Se si osserva ora che la derivata logaritmica di una funzione razionale è ancora una funzione razionale e si applica alla derivata logaritmica il teorema precedente, ricordando le proprietà osservate al §. 88, si trova il teorema:

Ogni funzione razionale sulla superficie Riemanniana diventa tante volte zero quante volte infinita.

Più in generale se, indicando con k una costante qualunque, consideriamo in luogo della v la funzione $v - k$ vediamo che: *Una funzione razionale sulla superficie Riemanniana riprende il medesimo numero di volte qualunque valore prefissato.*

Questo numero costante dicesi l'ordine od anche la *valenza* della funzione razionale v. Così, in particolare, se l'equazione fondamentale (1) sarà di grado m in w e di grado n in z, la funzione razionale w sarà di valenza n e la z di valenza m.

Si osservi che dalle osservazioni generali precedenti seguono le due proposizioni:

1.ª *Due funzioni razionali sulla superficie Riemanniana, che abbiano a comune gli infinitesimi e gli infiniti, non possono differire che per un fattore costante.*

2.ª *Due funzioni razionali, che abbiano a comune gli infiniti ed i termini d'infinito, non possono differire che per una costante additiva.*

Le proprietà delle funzioni razionali sopra una superficie Riemanniana fin qui sviluppate offrono, come si vede, la più completa analogia con quelle delle ordinarie funzioni razionali. Ma diciamo subito che, proseguendo questi studî, si manifestano altresì profonde differenze. Un fatto nuovo fondamentale si presenta allorquando, cercando di invertire le due proposizioni precedenti, si proponga di costruire una funzione razionale della superficie Riemanniana che abbia assegnati infinitesimi ed infiniti, ovvero infiniti assegnati con prescritti termini d'infinito. Come nel caso delle ordinarie funzioni razionali, la funzione cercata, *se esiste*, sarà determinata a meno di un fattore costante nel primo caso e a meno di una costante additiva nel secondo. Ma mentre per le ordinarie funzioni razionali quegli elementi possono darsi affatto ad arbitrio ed esiste sempre la corrispondente funzione, per una superficie Riemanniana al contrario fra questi elementi dovrà sussistere un certo numero di relazioni (dipendenti dalla connessione multipla della superficie) affinchè la funzione cercata esista. Così fra le posizioni dei poli e quelle degli infinitesimi di una funzione razionale debbono sussistere relazioni, che sono fornite da un celebre teorema d'Abel.

§. 90.

Nozioni sugli integrali Abeliani.

Diconsi *integrali Abeliani* gli integrali delle funzioni razionali sopra una superficie Riemanniana. Siccome ogni tale funzione razionale è alla sua volta una funzione algebrica di z, si possono anche definire gli integrali Abeliani come gli *integrali delle funzioni algebriche*. Nel presente §. ci proponiamo di dare le primissime nozioni su questi integrali considerati come funzioni (multiformi) sulla superficie Riemanniana, limitandoci a riconoscere la natura dei loro punti singolari e la loro classificazione in tre specie.

Essendo

$$f(w, z) = 0 \tag{1}$$

l'equazione fondamentale e

$$v = \varphi(w, z)$$

una funzione razionale qualsiasi di w, z, che potremo sempre ridurre alla forma (4) §. 89, l'espressione più generale di un integrale Abeliano corrispondente sarà

$$J = \int v\, dz.$$

Esaminiamo il modo di comportarsi di un integrale Abeliano nell'intorno di un punto qualsiasi della superficie Riemanniana. Sia dapprima $z = c$ un punto ordinario a distanza finita. La funzione razionale v sarà regolare in $z = c$, o al massimo vi avrà un polo di un certo ordine n, sicchè nell'intorno di $z = c$ avremo

$$v = \frac{A_0}{(z-c)^n} + \frac{A_1}{(z-c)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z-c} + P(z-c)$$

ed integrando avremo

$$J = \frac{A_0}{(1-n)(z-c)^{n-1}} + \frac{A_1}{(2-n)(z-c)^{n-1}} + \ldots - \frac{A_{n-2}}{z-c} +$$

$$+ A_{n-1} \log(z-c) + P_1(z-c).$$

Se manca il residuo A_{n-1}, l'integrale J sarà monodromo nell'intorno di $z=c$ e vi avrà un polo dell'ordine $n-1$. Quando sia $A_{n-1} \neq 0$, l'integrale J avrà inoltre in $z=c$ una *singolarità logaritmica* e sarà polidromo nell'intorno di $z=c$, col modulo di periodicità $2\pi i\, A_{n-1}$. Una conclusione affatto analoga si trae quando il punto ordinario $z=c$ è all'infinito. Avremo infatti allora nell'intorno di $z=\infty$:

$$v = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n + \frac{A}{z} + \frac{1}{z^2} P\left(\frac{1}{z}\right)$$

e però

$$J = \frac{a_0}{n+1} z^{n+1} + \frac{a_1}{n} z^n + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} z^2 + a_n z + C + A \log z + P_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

Anche qui adunque la singolarità dell'integrale in $z=\infty$ consiste in una singolarità polare (dell'ordine $n+1$) sovrapposta ad una singolarità logaritmica, la quale ultima manca se è nullo il residuo dell'integrando v.

Consideriamo ora un punto $z=c$, a distanza finita, che sia di diramazione dell'ordine $r-1$; avremo nell'intorno di esso

$$v = \frac{A_0}{(z-c)^{\frac{n}{r}}} + \frac{A_1}{(z-c)^{\frac{n-1}{r}}} + \ldots + \frac{A_n}{(z-c)^{\frac{1}{r}}} + P\left((z-c)^{\frac{1}{r}}\right),$$

e quindi integrando otterremo per J un'espressione della forma

$$J = R \log (z-c) + (z-c)^{-\frac{q}{r}} P_1\left((z-c)^{\frac{1}{r}}\right),$$

dove il termine col logaritmo, che rende l'integrale polidromo nell'intorno di $z=c$, si presenterà soltanto quando non sia nullo il residuo R di v. Quanto alle potenze negative di $(z-c)^{\frac{1}{r}}$, esse mancheranno affatto se si ha $n < r$, se cioè l'ordine d'infinito dell'integrando non supera l'ordine del punto di diramazione. In questo caso la singolarità dell'integrando sparisce nell'integrazione.

Se in fine il punto di diramazione dell'ordine r è all'infinito, avremo

$$v = a_0 z^{\frac{m}{r}} + a_1 z^{\frac{m-1}{r}} + \ldots + a_{m-1} z^{\frac{1}{r}} + a_m + \frac{b_1}{z^{\frac{1}{r}}} + \frac{b_2}{z^{\frac{2}{r}}} + \ldots$$

e nell'integrale avremo un termine col logaritmo se il residuo b_r non sarà nullo, ed inoltre un certo numero di potenze positive di $z^{\frac{1}{r}}$, per effetto delle quali l'integrale vi avrà inoltre una singolarità polare.

Mancherà nell'integrale ogni singolarità allora soltanto quando l'integrando si annulli nel punto $z = \infty$ considerato almeno d'ordine $r + 1$.

Riassumendo, vediamo che ogni integrale Abeliano ha sulla superficie Riemanniana un numero finito di singolarità polari o logaritmiche. Queste ultime mancano solo quando sono nulli tutti i residui della funzione razionale integranda. Una prima classificazione degli integrali Abeliani, corrispondente a queste proprietà generali, li divide in due categorie, assegnando alla *prima categoria* quelli che non hanno alcuna singolarità logaritmica, che hanno cioè soltanto singolarità polari, ed invece alla *seconda categoria*, od anche alla terza specie, quelli che presentano singolarità logaritmiche.

Un integrale di prima categoria nell'intorno di qualsiasi punto della superficie Riemanniana è monodromo; ma sarebbe erroneo il concluderne la monodromia sull'intera superficie Riemanniana. Tale conclusione è legittima soltanto quando la superficie Riemanniana, come più avanti diremo, è semplicemente connessa ossia di *genere zero*.

Gli integrali di prima categoria si distinguono poi in integrali di *prima specie* e integrali di *seconda specie*. Diconsi di prima specie quelli che non hanno singolarità alcuna, di seconda quelli che hanno qualche singolarità (polare). Perchè un integrale

$$J = \int v\, dz$$

sia di prima specie è necessario e sufficiente, per quanto sopra abbiamo osservato, che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

1.° *La funzione razionale v deve avere i suoi poli soltanto nei punti di diramazione e in ogni tale punto l'ordine del polo non deve superare l'ordine del punto di diramazione.*

2.° *In ogni punto all'infinito della superficie Riemanniana la v deve diventare infinitesima e precisamente almeno dell'ordine $r + 1$, se in quel punto sono congiunti ciclicamente r fogli.*

Osserviamo che se

$$J_1\,,\ J_2\,,\ \ldots\ J_s$$

sono altrettanti integrali di prima specie, anche qualunque loro combi-

nazione lineare a coefficienti costanti è un integrale di prima specie. Per ogni superficie Riemanniana il numero degli integrali linearmente *distinti* di prima specie è sempre un numero finito p. Questo numero dicesi il *genere* della superficie Riemanniana ed ha la massima importanza nella teorica generale di Riemann. Di altre definizioni del genere parleremo più avanti.

Osserviamo in fine di quale natura sarà la polidromia di un integrale Abeliano qualunque sulla superficie Riemanniana.

Poichè la derivata di un integrale Abeliano è una funzione monodroma (razionale), due diversi rami del medesimo integrale non possono differire che per una costante. Queste costanti, di cui aumenta un integrale Abeliano per un giro chiuso sulla R, diconsi i suoi *moduli di periodicità*. Un integrale di prima categoria ha precisamente $2p$ moduli di periodicità distinti, essendo p il genere. Per un integrale di seconda categoria (o terza specie) vi si aggiungono altrettanti nuovi moduli di periodicità quante sono le singolarità logaritmiche.

§. 91.

Caso iperellittico.

Per alcune delle proprietà considerate nei due §§. precedenti, come per le condizioni d'esistenza di una funzione razionale sulla R con assegnati elementi e per l'esistenza ed il numero degli integrali di prima specie, abbiamo dovuto limitarci al semplice enunciato, nè possiamo addentrarci in un tale studio generale. Vogliamo però in un caso particolare semplice, nel caso *iperellittico*, confermare ed illustrare le proposizioni enunciate. Prendiamo per ciò la superficie Riemanniana a due fogli del §. 84 costruita per l'equazione algebrica

$$w^2 = \mathrm{P}(z),$$

dove $\mathrm{P}(z)$ è un polinomio razionale intero in z di grado $2p+2$ o $2p+1$, e cerchiamo di costruire una funzione razionale sulla superficie Riemanniana che diventi infinita in un solo punto di questa superficie. Per fissare le idee, supponiamo che il grado del polinomio $\mathrm{P}(z)$ sia $2p+2$ talchè all'infinito non avremo diramazione, cioè i due fogli correranno isolati; ma si vedrà poi subito che considerazioni affatto analoghe valgono per l'altro caso. Distingueremo due punti sovrapposti sui due fogli per mezzo

dei valori $w_1 = \sqrt{P(z)}$, $w_2 = -\sqrt{P(z)}$ che vi ha il radicale. Ogni funzione razionale φ sulla superficie Riemanniana ha, secondo il §. 89, l'espressione:

$$\varphi = \frac{A(z) + B(z)\sqrt{P(z)}}{C(z)}, \tag{5}$$

dove A, B, C sono tre polinomii razionali interi di z, privi di un fattore comune.

Ora osserviamo che se z_0 è una radice di $C(z)$, nell'uno o nell'altro dei due punti sovrapposti della superficie Riemanniana

$$(\sqrt{P(z_0)}, z_0), \quad (-\sqrt{P(z_0)}, z_0)$$

la nostra funzione φ avrà necessariamente un polo. E infatti perchè ciò non accadesse bisognerebbe che si avesse simultaneamente

$$\begin{cases} A(z_0) + B(z_0)\sqrt{P(z_0)} = 0 \\ A(z_0) - B(z_0)\sqrt{P(z_0)} = 0; \end{cases} \tag{6}$$

ora ciò è assurdo se non è $P(z_0) = 0$, perchè si avrebbe allora

$$A(z_0) = 0, \quad B(z_0) = 0$$

e i tre polinomii $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, avrebbero un fattore comune. Se poi $P(z_0) = 0$, se cioè z_0 è un punto di diramazione, i due punti considerati coinciderebbero e coinciderebbero pure le due equazioni (6) nell'unica $A(z_0) = 0$. Ma, pure supposta questa soddisfatta, non cesserebbe di sussistere la proprietà enunciata poichè, soppresso il fattore $\sqrt{z - z_0}$ comune al numeratore ed al denominatore della φ, il numeratore non si annullerebbe più per $z = z_0$ e perciò φ diventerebbe ivi in ogni caso infinita.

Se vogliamo adunque che la funzione φ diventi infinita in un solo punto (w_0, z_0), che supponiamo dapprima a distanza finita e distinto da un punto di diramazione, dovrà manifestamente $C(z)$ differire da una potenza di $z - z_0$ solo per un fattore costante, sicchè potremo porre senz'altro

$$C(z) = (z - z_0)^r$$

e dovrà inoltre il numeratore annullarsi in $(-w_0, z_0)$ almeno dell'ordine r, dopo di che la φ avrà in (w_0, z_0) un polo d'ordine r. Poichè inoltre

la φ deve serbarsi finita all'infinito sopra ambedue i fogli della superficie Riemanniana, cioè nelle sue determinazioni

$$\frac{A(z)+B(z)\sqrt{P(z)}}{(z-z_0)^r}, \quad \frac{A(z)-B(z)\sqrt{P(z)}}{(z-z_0)^r},$$

lo stesso dovrà avvenire delle frazioni

$$\frac{A(z)}{(z-z_0)^r}, \quad \frac{B(z)\sqrt{P(z)}}{(z-z_0)^r}$$

e per ciò, indicando con m, n i rispettivi gradi di A, B, dovremo avere

$$m \leq r, \quad n+p+1 \leq r,$$

quindi in ogni caso sarà

$$r \geq p+1$$

Abbiamo dunqne il risultato:

Se una funzione razionale φ sulla nostra superficie Riemanniana ha un solo polo, distinto da un punto di diramazione, l'ordine di questo polo (cioè la valenza della funzione) non può essere inferiore a $p+1$.

Alla medesima conclusione si arriva se si suppone che l'unico polo di φ sia all'infinito. Allora la φ ha manifestamente la forma

$$\varphi = A(z) + B(z)\sqrt{P(z)},$$

la C essendo una costante, e se una delle determinazioni della φ all'infinito si serba finita, l'altra vi diventa infinita almeno dell'ordine di $\sqrt{P(z)}$ cioè dell'ordine $p+1$.

Possiamo dunque dire che fra le funzioni che diventano infinite in un solo punto della superficie, distinto da un punto di diramazione, mancano quelle degli ordini

$$1, 2, 3, \ldots p.$$

Esistono invece quelle di tutti gli altri ordini, poichè le condizioni a ciò necessarie si traducono pei coefficienti dei polinomii $A(z)$, $B(z)$ in equazioni lineari ed omogenee in numero inferiore al numero dei coefficienti disponibili.

Vediamo ora facilmente che anche nel caso in cui z_0 sia in un punto di diramazione vi sono sempre p ordini mancanti; soltanto non sono più gli ordini precedenti, ma invece i p ordini dispari

$$1\,,\ 3\,,\ 5\,,\ldots\ 2p-1\,.$$

Che tutti gli ordini pari $2r$ siano in questo caso ordini di funzioni effettivamente esistenti, con un solo polo in un punto di diramazione $z=e$, si vede immediatamente considerando la funzione razionale

$$\frac{1}{(z-e)^r}\,.$$

Ma se vogliamo costruire una funzione φ che diventi in $z=e_1$ infinita d'ordine impari $2r-1$, dovremo porre

$$\varphi=\frac{A(z)+B(z)\sqrt{P(z)}}{(z-e_1)^r}$$

colla condizione $A(e_1)=0$. Però, affinchè all'infinito la φ possa serbarsi finita, dovremo avere come prima $r\geq p+1$ e per ciò

$$2r-1\geq 2p+1\,,$$

il che dimostra appunto che in tal caso gli ordini mancanti sono

$$1\,,\ 3\,,\ldots\ 2p-1\,.$$

La circostanza qui ritrovata pel caso iperellittico si presenta affatto generalmente per una qualunque superficie Riemanniana e dà la definizione del *genere* p secondo Weierstrass. Fra gli ordini delle funzioni razionali, che diventano infinite in un solo e medesimo punto della superficie Riemanniana, vi è sempre un numero costante di lacune (onde il nome di *Lückensatz* di Weierstrass) e questo numero costante p è quello che dicesi il genere della superficie [1].

Così adunque vediamo in particolare che *il genere della superficie Riemanniana corrispondente alla equazione algebrica*

$$w^2=P(z)\,,$$

dove $P(z)$ *è un polinomio di grado* $2p+2$ o $2p+1$ *in* z, *è appunto* $=p$.

---

[1] Per un punto *generico* della superficie gli ordini mancanti sono sempre $1, 2, 3, \ldots p$. Solo per punti speciali della superficie (punti di Weierstrass) le p lacune sono rappresentate da altri numeri.

Abbiamo già notato al §. precedente un'altra definizione del genere, come numero degli integrali di 1.ª specie linearmente indipendenti, e vogliamo qui verificare la coincidenza delle due definizioni pel caso iperellittico, costruendo l'espressione generale di un integrale di 1.ª specie. L'integrale iperellittico

$$J = \int \frac{A(z) + B(z)\sqrt{P(z)}}{C(z)}\, dz \text{ [1]}$$

sarà 1.ª di specie allora e allora soltanto che siano soddisfatte le condizioni seguenti (§. 90):

1.° La funzione razionale φ sotto il segno abbia i suoi poli solo nei punti di diramazione, ed al massimo del 1.° ordine.

2.° In ciascuno dei due punti all'infinito, la φ si annulli del 2.° ordine almeno.

Per quanto si è visto sopra, $C(z)$ non potrà annullarsi che nei punti di diramazione

$$e_1\,,\ e_2 \ldots e_{2p+2}\,;$$

e se in $z = e_i$ si annulla effettivamente $C(z)$ d'ordine r, la φ vi avrà un polo d'ordine $2r$ se $A(e_i) \neq 0$, e d'ordine $2r-1$ se $A(e_i) = 0$.

Dunque avremo necessariamente $r = 1$, $A(e_i) = 0$; e poichè, per la condizione imposta nei punti all'infinito, deve $\frac{A(z)}{C(z)}$ annullarsi almeno del 2.° ordine per $z = \infty$, ne concludiamo che sarà identicamente $A(z) = 0$ e quindi, essendo $P(z)$ divisibile per $C(z)$, avremo:

$$J = \int \frac{Q(z)\, dz}{\sqrt{P(z)}}\,,$$

dove $Q(z)$ è un polinomio razionale intero in z, il cui grado non supererà $p-1$. L'espressione più generale di un integrale di 1.ª specie è adunque nel nostro caso

$$J = \int \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_i)\ldots(z-e_{2p+2})}}\, dz\,;$$

---

[1] Supponiamo anche qui, per fissare le idee, che $P(z)$ sia d'ordine pari $2p+2$ e non vi sia quindi diramazione all'infinito.

come si vede, esso contiene linearmente p costanti arbitrarie $a_0, a_1, .. a_{p-1}$, componendosi coi p integrali

$$J_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, \quad J_2 = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{P(z)}}, \quad J_3 = \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{P(z)}} \ldots J_p = \int \frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{P(z)}},$$

i quali sono evidentemente indipendenti.

§. 92.

Il genere p secondo Riemann.

Abbiamo già osservato due diverse definizioni del genere p, l'una come numero delle lacune negli ordini delle funzioni razionali con un unico polo in un punto fisso, l'altra come numero degli integrali distinti di prima specie. Vi ha ancora una terza definizione del genere, che è la prima in ordine storico, quella stabilita da Riemann e dipendente dall'*ordine di connessione* della superficie Riemanniana [1]. Noi non possiamo qui esporre la teoria della connessione, ma ci limiteremo ad enunciarne il concetto fondamentale e a far conoscere la formola Riemanniana colla quale si calcola il genere p, conoscendo il numero dei fogli della superficie R e la somma degli ordini dei suoi punti di diramazione.

Si perviene al concetto di *ordine di connessione* di una superficie nel modo seguente. Consideriamo dapprima una superficie qualunque [2] *dotata di contorno* e che sia connessa, cioè tale che due punti qualunque A, B di essa possano congiungersi con una linea tutta appartenente alla superficie. Se lungo una linea semplice, priva di nodi, che vada da un punto A del contorno ad un altro punto B del contorno, si taglia la superficie, si dice che si è eseguito un *taglio semplice* (Querschnitt di Riemann). Eseguito il taglio, i due orli di esso vengono ad aggiungersi al primitivo contorno, della qual cosa è da tenersi conto nell'eseguire i tagli successivi.

---

[1] È noto come il concetto di genere di un'equazione algebrica $f(w, z) = 0$, stabilito da Riemann, fu poi trasportato felicemente da Clebsch al campo geometrico, nella teoria delle curve algebriche.

[2] Per la validità dei teoremi relativi alla connessione è necessario imporre alle superficie che si considerano alcune condizioni restrittive, per le quali vedasi Neumann: *Theorie der Abel' schen Integrale*. Siebentes Capitel.

Diciamo semplicemente connessa una superficie quando qualunque taglio ne distrugga la connessione, ed invece *pluriconnessa*, nel caso contrario. Il grado, o l'ordine, di connessione si valuta nel modo seguente.

Supponiamo che $N-1$ tagli semplici, successivamente eseguiti, non tolgano la connessione ma rendano la superficie semplicemente connessa, talchè sia impossibile eseguire un N^{mo} taglio senza rompere la connessione. Si dimostra che questo numero $N-1$ è un *invariante;* cioè se altri $N'-1$ tagli, eseguiti sulla superficie primitiva, non ne rompono la connessione, ma la rendono semplicemente connessa, si ha necessariamente $N'=N$. Questo numero N dicesi l'ordine di connessione della superficie, cioè: *Una superficie connessa dotata di contorno, dicesi d'ordine* N *di connessione, se si possono eseguire sulla superficie* $N-1$ *tagli semplici, che non tolgono la connessione alla superficie, ma la rendono semplicemente connessa.*

In una superficie semplicemente connessa il contorno consta necessariamente di una sola linea chiusa [1] e, poichè per ogni taglio semplice il numero dei contorni di una superficie cresce o diminuisce di un'unità, ne segue che se una superficie con n contorni si rende semplicemente connessa con $N-1$ tagli, si ha necessariamente

$$N-1 \equiv n+1 \pmod 2$$

ossia: *L'ordine di connessione di una superficie connessa è pari o dispari, secondo che il numero dei suoi contorni è pari o dispari.*

Fino ad ora abbiamo supposto la superficie dotata di contorno. Se essa è chiusa, si immagina di darle *un* contorno asportandone l'intorno di un punto; la piccola curva chiusa che delimitava l'intorno forma allora il contorno (unico). L'ordine di connessione di questa superficie, necessariamente dispari, dicesi anche l'ordine di connessione della superficie chiusa. Indicandolo con $2p+1$, il numero p prende il nome di genere della superficie, cioè: *Una superficie chiusa connessa, d'ordine* $2p+1$ *di connessione, dicesi di genere* p. Si vede subito che il genere di una superficie chiusa non muta per deformazione continua (§. 83) della superficie.

---

[1] Si avverta che tale condizione necessaria per la connessione semplice è ben lungi dall'essere sufficiente. Così p. e. la superficie di un anello (toro), alla quale sia dato un contorno asportandone l'intorno di un punto, è triplamente connessa.

Si può dimostrare d'altronde che esso è l'unico invariante, cioè: *Fra i punti di due superficie chiuse connesse del medesimo genere può sempre stabilirsi una corrispondenza biunivoca e continua.*

Si può anche, come osserva il Klein, definire direttamente il genere p di una superficie chiusa, senza ridurla prima ad una superficie con contorno. Per questo si immagini di tracciare sulla superficie una curva chiusa che non intersechi sè medesima e lungo la linea si tagli la superficie; un tale taglio dicesi *taglio rientrante* (Rückerschnitt). Una superficie chiusa connessa è semplicemente connessa o di genere *zero*, se qualunque taglio rientrante ne distrugge la connessione. La definizione diretta del genere p è allora la seguente: *Il genere p di una superficie chiusa connessa è il massimo numero di tagli rientranti, che possono farsi sulla superficie senza romperne la connessione.* A fondamento di questa definizione del genere sta il teorema che tale numero massimo è un invariante, che cioè se due diversi sistemi di tagli rientranti in rispettivo numero di p, p' non tolgono, ciascuno per sè, la connessione ma ogni volta un ulteriore taglio rientrante distruggerebbe la connessione, si ha necessariamente $p = p'$.

Venendo ora al calcolo del genere p di una superficie Riemanniana, dimostra Riemann che esso dipende unicamente dal numero m dei fogli e dalla somma degli ordini

$$r_1 - 1 \ , \ r_2 - 1 \ , \ldots \ r_n - 1$$

dei rispettivi punti di diramazione, secondo la formola

$$\text{(A)} \qquad p = \frac{\Sigma (r-1)}{2} - m + 1 \ ^{(1)}.$$

Così p. e. per la superficie Riemanniana a due fogli del caso iperellittico con $2p+2$ punti di diramazione del 1.° ordine, la formola (A)

---

(1) Si osservi che la somma $\Sigma (r-1)$ è sempre necessariamente pari, perchè un giro attorno a *tutti* i punti di diramazione produce la sostituzione identica; e decomponendosi questa d'altronde nel prodotto delle singole sostituzioni circolari d'ordini

$$r_1 \ , \ r_2 \ldots r_n$$

attorno ai punti di diramazione, le quali equivalgono rispettivamente a

$$r_1 - 1 \ , \ r_2 - 1 \ , \ldots r_n - 1$$

trasposizioni, il numero totale $\Sigma (r-1)$ di queste trasposizioni deve essere necessariamente pari.

fa subito riconoscere che il genere è $=p$, come già abbiamo constatato al §. 91, riferendoci alle altre definizioni del genere. Al medesimo risultato si arriva riducendo la superficie con deformazione continua, secondo il §. 85, alla sfera con p anelli ed osservando che se si eseguiscono p tagli rientranti, uno per ciascuno anello, lungo p. e. un meridiano dell'anello, la superficie rimane ancora connessa; ma ogni altro $(p+1)^{mo}$ taglio rientrante rompe la connessione.

Insieme alla formola Riemanniana (A) pel calcolo del genere p, torna spesse volte utile nelle applicazioni la così detta formola d'Eulero generalizzata, che serve a calcolare il genere p di una qualunque superficie chiusa, sulla quale sia tracciata una rete poligonale, che ricopra l'intera superficie, e così formata che ciascun poligono della rete rappresenti un'area semplicemente connessa.

Se si indica allora con F il numero delle facce, con V il numero dei vertici e con C il numero delle costole della rete, si ha:

$$\text{(B)} \qquad F + V - C = 2 - 2p,$$

essendo p il genere della superficie chiusa.

PARTE SECONDA

Teoria delle funzioni ellittiche

Capitolo IX.

Le funzioni fondamentali σu, $\wp u$ di Weierstrass. — Le funzioni generali ellittiche espresse per la σu. — Equazione differenziale per la $\wp u$: $\wp'^2 u = 4\,\wp^3 u - g_2\,\wp u - g_3$.

§. 93.

Cenni storici.

Un problema di calcolo integrale ha dato origine alla teoria delle funzioni ellittiche. Denoti $f(x, y)$ una funzione razionale dei due argomenti x, y e si consideri l'integrale (Abeliano)

$$\int f(x, \sqrt{P(x)})\, dx, \tag{1}$$

dove $P(x)$ è un polinomio razionale intero in x. Se $P(x)$ è di primo o secondo grado, con note sostituzioni si riporta questa quadratura a quella di una funzione razionale di una variabile ausiliaria e l'integrale stesso si esprime per ordinarie funzioni, algebriche e logaritmiche. Ma appena $P(x)$ supera il secondo grado diventa, *in generale*, impossibile una simile riduzione e la funzione di x che nasce dall'integrazione rappresenta *una nuova trascendente*, non riducibile alle trascendenti ordinarie. Se in particolare il polinomio $P(x)$ è di terzo o quarto grado, l'integrale (1) dicesi un *integrale ellittico*. Quando il polinomio è di grado superiore al quarto, si hanno gli integrali *iperellittici* (§. 91). La denominazione di integrale ellittico ha un'origine geometrica, perchè appunto per un integrale di questa specie si esprime la lunghezza di un arco d'ellisse.

Una fondamentale scoperta nella teoria degli integrali ellittici è dovuta ad *Eulero*, che trovò il così detto *teorema d'addizione* per gli integrali di 1.ª specie, nel quale sono inclusi, come casi particolari, i risultati già prima trovati da *Fagnani* sugli archi di lemniscata di Bernoulli.

Ma Legendre fu il primo che costruì sistematicamente la teoria, classificando e riducendo a tre specie essenziali distinte gli integrali ellittici. Egli studiò le proprietà di queste nuove trascendenti, cui diede il nome di funzioni ellittiche, oggidì riserbato ad altre specie di funzioni che nascono, come ora diremo, da un problema d'inversione.

Le geniali ricerche di Abel e di Jacobi cangiarono totalmente l'aspetto della teoria di Legendre ed arricchirono l'analisi di nuove ed importanti conquiste.

Due sono le principali idee che guidarono Abel e Jacobi nelle loro scoperte. L'una consiste nell'estendere la considerazione dei nuovi enti analitici ai valori complessi delle variabili, l'altra nel sostituire allo studio diretto degli integrali ellittici quello delle funzioni che nascono dall'inversione degli integrali stessi (di 1.ª specie). S'intenderà facilmente l'importanza del *principio d'inversione*, ove si consideri, con Jacobi, in qual modo la teoria delle funzioni circolari, se già non fosse stata prima nota, si sarebbe introdotta in un problema analogo di calcolo integrale. Si consideri l'integrale

$$y = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

che porta alla funzione circolare inversa arc sen x. Seguendo il metodo di Legendre, dovremmo qui studiare la y come funzione della x. Ma ben più semplici ed importanti sono, come sappiamo, le proprietà della *funzione inversa:* $x = \operatorname{sen} y$; è la ragione principale sta in ciò che mentre y considerata come funzione della x è infinitiforme, la inversa $x = \operatorname{sen} y$ è invece una funzione *uniforme* e periodica del suo argomento.

Analogamente si consideri l'integrale ellittico di 1.ª specie della forma normale di Legendre:

$$y = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

essendo k una costante (modulo), e in luogo di considerare y come fun-

zione di x, si consideri il limite superiore x dell'integrale come funzione del valore y dell'integrale stesso. Servendoci delle nozioni acquistate nello studio generale delle funzioni di variabile complessa, possiamo esprimere il risultato fondamentale di Abel Jacobi, dicendo che la funzione x di y così definita è uniforme in tutto il piano y, con sole singolarità polari, e, partecipando ad un tempo della natura delle funzioni circolari ed esponenziali, possiede una *doppia periodicità*. È questa la prima funzione ellittica di Jacobi, da lui indicata col simbolo

$$\operatorname{sen} \operatorname{am} y \text{ (seno amplitudine).}$$

Della medesima natura sono le due altre funzioni ellittiche di Jacobi

$$\cos \operatorname{am} y = \sqrt{1 - \operatorname{sen} \operatorname{am}^2 y} \text{ (coseno amplitudine)}$$

$$\Delta \operatorname{am} y = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen} \operatorname{am}^2 y} \text{ (delta amplitudine).}$$

Oggi si indicano più brevemente queste tre funzioni coi simboli di Gudermann

$$\operatorname{sn} y \ , \ \operatorname{cn} y \ , \ \operatorname{dn} y .$$

Sotto il nome generale di *funzioni ellittiche* si comprendono ora tutte le funzioni uniformi, con sole singolarità polari, a distanza finita, dotate di una doppia periodicità; le funzioni ottenute per inversione dell'integrale ellittico di 1.ª specie ne offrono il primo esempio.

Un'altra idea di Jacobi, di cui si trova traccia anche nelle memorie di Abel, è di capitale importanza per la teoria. Le funzioni ellittiche di Jacobi

$$\operatorname{sn} y \ , \ \operatorname{cn} y \ , \ \operatorname{dn} y$$

essendo uniformi in tutto il piano, prive di singolarità essenziali, e diventando infinite nei medesimi punti, possono esprimersi (ciò che risulta per noi dal teorema di Weierstrass al Cap. VI §. 66) come quozienti di trascendenti intere, il denominatore essendo nei tre casi il medesimo. Queste trascendenti intere, senza essere doppiamente periodiche, offrono però evidentemente una doppia periodicità rispetto alla distribuzione dei loro infinitesimi. Esse sono le funzioni ϑ (theta) di Jacobi, che si riducono in sostanza ad una sola trascendente, mediante la quale possono esprimersi tutte le funzioni che si incontrano nella teoria delle funzioni e degli integrali ellittici.

Un perfezionamento notevole è stato portato alle teorie di Jacobi da Weierstrass. Alle tre funzioni di Jacobi

$$\operatorname{sn} y \ , \ \operatorname{cn} y \ , \ \operatorname{dn} y$$

egli ha sostituito un'unica funzione ellittica, che per molti riguardi si comporta più semplicemente. È questa la funzione indicata da Weierstrass col simbolo

$$\wp u$$

e per mezzo di questa e della sua derivata prima $\wp' u$ si possono esprimere razionalmente, come si vedrà, tutte le funzioni ellittiche dell'argomento u (coi medesimi periodi). Così pure alle funzioni ϑ di Jacobi Weierstrass ha sostituito un'unica trascendente intera, la funzione

$$\sigma u,$$

che gode di proprietà analoghe alle ϑ, ma più semplici e simmetriche. La funzione σu è appunto l'elemento col quale si possono esprimere tutte le funzioni e gli integrali ellittici nella teoria di Weierstrass.

Noi ci occuperemo principalmente in questo corso delle funzioni di Weierstrass σu, $\wp u$, senza trascurare lo studio delle funzioni di Jacobi e particolarmente delle ϑ, che oltre l'importanza storica offrono grande interesse per l'eleganza dei loro sviluppi in serie a rapidissima convergenza. Comincieremo dal costruire la funzione elementare σu e da essa dedurremo tutte le altre.

Questo modo di sviluppare la teoria, che procede in senso inverso all'effettivo sviluppo storico, ha per noi il vantaggio di essere semplice e rapido, senza esigere altre nozioni che quelle della teoria delle funzioni monodrome.

§. 94.

Costruzione della funzione σu di Weierstrass.

Nella funzione $\operatorname{sen} z$ abbiamo l'esempio di una trascendente intera, i cui infinitesimi sono distribuiti a regolari intervalli sopra una retta (asse reale).

La trascendente intera

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2\omega}\right),$$

dove ω è una costante complessa, ha similmente i suoi infinitesimi distribuiti a regolari intervalli sulla retta che unisce l'origine al punto 2ω; essi sono infatti nei punti

$$z_0 = m \,.\, 2\omega \,,$$

percorrendo m tutti i valori interi positivi e negativi.

La trascendente intera

$$\sigma u$$

di Weierstrass (dove ora indichiamo con u la variabile complessa argomento) ha proprietà simili, ma i suoi infinitesimi hanno una ricorrenza *doppiamente* periodica. Indichiamo con

$$\omega \,, \quad \omega'$$

due costanti fondamentali complesse e domandiamoci in primo luogo: È possibile costruire una trascendente intera che divenga infinitesima del primo ordine in tutti e soli i punti del piano dati dalla formola

$$u_0 = m\, 2\omega + n\, 2\omega' \,,$$

dove m, n percorrono tutti gli interi positivi e negativi? Osserviamo che, rispetto al gruppo lineare di sostituzioni paraboliche (Cap. II, §. 17):

$$u' = u + 2\, m\omega + 2\, n\omega' \,, \tag{2}$$

i punti in questione formano un sistema completo di punti equivalenti all'origine $u_0 = 0$. Le ricerche del citato §. ci portano subito ad escludere il caso in cui il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ sia reale. E infatti se $\frac{\omega'}{\omega}$ fosse reale commensurabile, i periodi 2ω, $2\omega'$ sarebbero multipli di un medesimo periodo fondamentale 2Ω e la trascendente domandata non potrebbe differire dalla funzione elementare

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\Omega}\right)$$

che per un fattore esponenziale, caso per noi senza importanza. Se poi $\frac{\omega'}{\omega}$ fosse reale ed incommensurabile, nell'intorno di ogni infinitesimo della funzione da costruirsi si addenserebbero infiniti altri infinitesimi, ciò che esclude la possibilità dell'esistenza per la funzione richiesta.

Il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ deve dunque essere una costante complessa

$$\frac{\omega'}{\omega} = \alpha + i\beta \ , \quad \beta \neq 0$$

e, siccome possiamo cangiare di segno l'uno o l'altro dei periodi, non alteriamo la generalità supponendo al coefficiente β dell'immaginario un segno determinato. E noi facciamo la convenzione fondamentale per il seguito: *Il coefficiente dell'immaginario nel rapporto dei periodi* $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ *deve essere positivo.*

Questa convenzione induce una conseguenza, che importa subito notare. Costruiamo la rete parallelogrammica (§. 17, pag. 52) relativa al gruppo (2) di traslazioni situando un vertice in $u_0 = 0$, sicchè i quattro vertici del parallelogrammo fondamentale saranno i punti

$$0 \ , \ 2\omega \ , \ 2\omega + 2\omega' \ , \ 2\omega' \ .$$

Il supporre $\mathrm{R}\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right) > 0$, [1] come abbiamo fatto, porta che percorrendo il contorno del parallelogrammo nel verso positivo si incontrino, a partire dall'origine, i vertici nell'ordine sopra scritto [2]. La trascendente intera da costruirsi deve avere i suoi infinitesimi, del primo ordine, nei vertici della nostra rete parallelogrammica e poichè le distanze fra questi punti non scendono al di sotto del minimo fra i moduli delle quattro quantità 2ω, $2\omega'$, $2\omega + 2\omega'$, $2\omega - 2\omega'$, il teorema del Cap. VI, §. 69 ci fornisce subito la trascendente cercata nel doppio prodotto infinito

$$u \prod_{m,n}{}' \left(1 - \frac{u}{2m\omega + 2n\omega'}\right) e^{\frac{u}{2m\omega + 2n\omega'} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{(2m\omega + 2n\omega')^2}}$$

---

[1] Col simbolo $\mathrm{R}(\Omega)$ indichiamo la parte reale di una quantità complessa Ω.

[2] Posto infatti $\omega = \rho e^{i\theta}$, $\omega' = \rho' e^{i\theta'}$, si ha

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\rho'}{\rho}\left\{\cos(\theta - \theta') + i \operatorname{sen}(\theta - \theta')\right\}$$

onde

$$\operatorname{sen}(\theta - \theta') > 0 \ ,$$

ciò che dimostra che per un osservatore collocato in 0, che guardi nella direzione da 0 a 2ω, la direzione da 0 a $2\omega'$ resta alla sinistra.

esteso a tutti i valori interi positivi e negativi di m, n, l'accento nel prodotto infinito indicando che viene esclusa la combinazione $m = 0$, $n = 0$. Questo prodotto infinito, in ogni campo finito, converge indipendentemente dall'ordine dei fattori ed in egual grado e rappresenta, senza alcuna aggiunta di fattore esponenziale esterno $e^{G(u)}$, appunto la funzione σu di Weierstrass. Ponendo per brevità

$$w = 2m\omega + 2n\omega',$$

notazione che conserveremo in seguito, abbiamo dunque per la σu la prima espressione analitica

$$\text{(I)} \qquad \sigma u = u \prod_{m,n}{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) . e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}} .$$

Questa trascendente intera dipende, oltre che dall'argomento u, anche dalle costanti fondamentali 2ω, $2\omega'$, rispetto alle quali è costruita, che si dicono i *periodi*. Volendo porre in evidenza anche i periodi coi quali la σu è costruita, si scriverà con Weierstrass:

$$\sigma(u \mid \omega, \omega').$$

§. 95.

Proprietà fondamentali della σu.

Una prima proprietà della σu si rileva subito dalla sua espressione analitica (I): *La σu è una funzione dispari, cioè si ha*

$$\text{(3)} \qquad \sigma(-u) = -\sigma u .$$

E infatti dalla (I) si ha

$$\sigma(-u) = -u \prod_{m,n}{}' \left(1 + \frac{u}{w}\right) e^{-\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}},$$

e poichè il prodotto infinito non cangia mutando m, n in $-m, -n$, cioè w in $-w$, ne risulta subito la formola scritta.

Similmente dalla (I) vediamo subito che si ha

$$\text{(3*)} \qquad \lim_{u=0} \frac{\sigma u}{u} = 1 ,$$

ossia $\sigma' 0 = 1$.

Ancora dalla espressione analitica risulta dimostrata una proprietà di *omogeneità* della σ, espressa dalla formola

$$\sigma(\lambda u \mid \lambda\omega, \lambda\omega') = \lambda\sigma(u \mid \omega, \omega'), \tag{4}$$

dove λ indica un fattore costante arbitrario.

Troviamo un'altra proprietà importantissima della funzione σu, proponendoci la questione seguente:

Possono due funzioni

$$\sigma(u \mid \omega, \omega'), \quad \sigma(u \mid \Omega, \Omega'),$$

costruite con periodi diversi, coincidere?

Poichè gli infinitesimi della prima debbono essere anche infinitesimi della seconda e viceversa, dovranno ω, ω' esprimersi linearmente ed omogeneamente, con coefficienti interi, per Ω, Ω' e inversamente Ω, Ω' per ω, ω' in modo analogo.

Si dovrà dunque avere

$$\begin{cases} \omega = \alpha\Omega + \beta\Omega' \\ \omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega' \end{cases} \qquad \begin{cases} \Omega = \alpha'\omega + \beta'\omega' \\ \Omega' = \gamma'\omega + \delta'\omega', \end{cases}$$

i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ essendo interi. Se sostituiamo nelle prime due formole i valori di Ω, Ω' dati dalle seconde, dobbiamo ottenere delle identità, poichè $\frac{\omega'}{\omega}$ non è reale. Ne deduciamo

$$\begin{cases} \alpha\alpha' + \beta\gamma' = 1, \quad \alpha\beta' + \beta\delta' = 0 \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' = 0, \quad \gamma\beta' + \delta\delta' = 1, \end{cases}$$

onde

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 1,$$

e però

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \text{ [1]}.$$

L'incertezza del segno si toglie osservando che, per ipotesi, i coefficienti dell'immaginario nei due rapporti

$$\frac{\omega'}{\omega}, \frac{\Omega'}{\Omega},$$

---

[1] Cf. Cap. II, §. 17, pag. 52 nota.

legati dalla relazione lineare

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\delta \dfrac{\Omega'}{\Omega} + \gamma}{\beta \dfrac{\Omega'}{\Omega} + \alpha},$$

debbono essere ambedue positivi, il che porta che si abbia

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = +1\,.$$

Inversamente, se supponiamo

$$\begin{cases} \omega = \alpha\,\Omega + \beta\,\Omega' \\ \omega' = \gamma\,\Omega + \delta\,\Omega' \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, risolvendo avremo

$$\begin{cases} \Omega = \delta\,\omega - \beta\,\omega' \\ \Omega' = -\gamma\,\omega + \alpha\,\omega'\,, \end{cases}$$

onde gli infinitesimi

$$w = 2\,m\,\omega + 2\,n\,\omega'$$

$$\overline{w} = 2\,m\,\Omega + 2\,n\,\Omega'$$

delle due σ coincideranno, salvo l'ordine, e le loro espressioni analitiche (I), a causa della convergenza assoluta del prodotto infinito, coincideranno altresì. Abbiamo dunque il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due funzioni σ, costruite con diversi periodi:

$$\sigma\,(u\,|\,\omega, \omega')\ ,\quad \sigma\,(u\,|\,\Omega, \Omega')$$

coincidano, è che i periodi siano legati da relazioni lineari, intere ed omogenee

$$\begin{cases} \omega = \alpha\,\Omega + \beta\,\Omega' \\ \omega' = \gamma\,\Omega + \delta\,\Omega' \end{cases}$$

a coefficienti interi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e a determinante

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = +1\,.$$

§. 96.

Le funzioni ζu e $\wp u$ e la doppia periodicità di $\wp u$, $\wp' u$.

Consideriamo la derivata logaritmica della σ, funzione indicata da Weierstrass col simbolo ζu, sicchè

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}. \tag{5}$$

L'espressione analitica della ζu risulta immediatamente dalla (I) per la σu, derivando logaritmicamente, e si ha

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum_{m,n}{}' \left\{ \frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right\}^{(1)}, \tag{II}$$

la serie del secondo membro essendo convergente in egual grado in ogni campo finito, dal quale siano esclusi i punti

$$u_0 = 2m\omega + 2n\omega',$$

che sono per ζu i punti singolari, e precisamente poli del 1.° ordine col residuo $+1$.

La funzione ζu è, come la σu, una funzione dispari:

$$\zeta(-u) = -\zeta u.$$

La funzione

$$\wp u$$

di Weierstrass si definisce semplicemente come la derivata della ζu, cangiata di segno:

$$\wp u = -\zeta' u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}. \tag{6}$$

La $\wp u$ è evidentemente una funzione pari, cioè:

$$\wp(-u) = \wp u. \tag{7}$$

---

(1) L'accento nella somma indica l'omissione del termine corrispondente a $m=0$, $n=0$.

La sua espressione analitica si ottiene per derivazione (Cap. IV §. 47) dalla (II); risulta così:

$$\text{(III)} \qquad \wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{m,n}{}' \left\{ \frac{1}{(u-2m\omega-2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2} \right\}.$$

Una nuova derivazione ci dà

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} - 2 \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(u-2m\omega-2n\omega')^3},$$

che si può anche scrivere semplicemente

$$\text{(IV)} \qquad \wp' u = -2 \sum_{m,n} \frac{1}{(u-2m\omega-2n\omega')^3},$$

attualmente con inclusione del termine corrispondente a $m=0$, $n=0$. La convergenza delle serie (III), (IV) è assoluta ed in egual grado in ogni campo finito, esclusi i punti

$$u_0 = 2m\omega + 2n\omega',$$

ove le $\wp u$, $\wp' u$ diventano rispettivamente infinite del 2.° e del 3.° ordine coi termini d'infinito

$$\frac{1}{(u-2m\omega-2n\omega')^2}, \quad \frac{-2}{(u-2m\omega-2n\omega')^3}.$$

Ma l'espressione (IV) della $\wp' u$ pone in evidenza una proprietà di capitale importanza, e cioè la sua *doppia periodicità*. Se cangiamo infatti nella (IV) u in $u+2\omega$, o in $u+2\omega'$, i termini della serie non fanno che cangiar di posto e si ha quindi

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} \wp'(u+2\omega) = \wp' u \\ \wp'(u+2\omega') = \wp' u, \end{cases}$$

e più in generale naturalmente

$$\wp'(u+2m\omega+2n\omega') = \wp' u,$$

essendo m, n interi qualunque. Anche la funzione $\wp u$ è doppiamente periodica, coi periodi fondamentali 2ω, $2\omega'$, sebbene la cosa non riesca su-

bito evidente dallo sviluppo (III) in serie. Integrando le precedenti (8), si ottiene infatti

$$\wp(u+2\omega) - \wp u = c$$
$$\wp(u+2\omega') - \wp u = c',$$

con c, c' costanti. Ma se in queste facciamo rispettivamente $u = -\omega$, $u = -\omega'$ (osservando che $\wp\omega$, $\wp\omega'$ non sono infinite) otteniamo subito, a causa della parità della $\wp u$:

$$c = 0 \ , \ c' = 0$$

e quindi

$$(9) \qquad \begin{cases} \wp(u+2\omega) = \wp u \\ \wp(u+2\omega') = \wp u. \end{cases}$$

Ne concludiamo: *La funzione $\wp u$ e tutte le sue successive derivate*

$$\wp' u \ , \ \wp'' u \ , \ \wp''' u \ldots$$

sono funzioni uniformi in tutto il piano complesso e sono doppiamente periodiche, coi periodi fondamentali 2ω, $2\omega'$.

I loro punti singolari si trovano unicamente nei punti $u_0 = 2m\omega + 2n\omega'$, vertici della rete parallelogrammica, ove hanno dei poli. Si noti poi che la $\wp u$ e tutte le sue derivate d'ordine pari $\wp'' u$, $\wp^{\text{IV}} u, \ldots$ sono funzioni pari, mentre le derivate d'ordine dispari $\wp' u$, $\wp''' u, \ldots$ sono tutte funzioni dispari.

§. 97.

Effetto dell'aggiunta di periodi all'argomento di σu.

Vediamo ora come si comporta la funzione σu, quando all'argomento u si aggiunga 2ω o $2\omega'$. Dalle (9), integrando, si ha

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)} = \dfrac{\sigma' u}{\sigma u} + 2\eta \\[2ex] \dfrac{\sigma'(u+2\omega')}{\sigma(u+2\omega')} = \dfrac{\sigma' u}{\sigma u} + 2\eta', \end{cases}$$

essendo η, η' due costanti d'integrazione.

Per determinarle si faccia nelle precedenti rispettivamente $u = -\omega$, $u = -\omega'$ e, rammentando che $\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u$ è una funzione dispari, si avrà subito

$$\eta = \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega} = \zeta\omega \ , \quad \eta' = \frac{\sigma'\omega'}{\sigma\omega'} = \zeta\omega' . \tag{11}$$

Integrando nuovamente le (10) e passando dai logaritmi ai numeri, deduciamo

$$\begin{cases} \sigma(u+2\omega) = C e^{2\eta u} \sigma u \\ \sigma(u+2\omega') = C' e^{2\eta' u} \sigma u , \end{cases}$$

con C, C' nuove costanti, che si determinano subito facendo in queste ultime formole rispettivamente $u = -\omega$, $u = -\omega'$; si trovano così le formole

$$\begin{cases} \sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)} . \sigma u \\ \sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')} . \sigma u . \end{cases} \tag{12}$$

Come si vede, aumentando l'argomento u della σ di un periodo, la funzione si riproduce, moltiplicata per un fattore esponenziale *con esponente di primo grado nella* u [1].

Le costanti 2η, $2\eta'$ si dicono anche i periodi di *seconda specie*, per distinguerli dai periodi 2ω, $2\omega'$, che si dicono di *prima specie*. Fra i periodi di prima e seconda specie ha luogo l'importante relazione:

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2} \ ^{(2)} , \tag{V}$$

che dimostriamo nel modo seguente.

Consideriamo nel piano complesso u il parallelogrammo A B C D, i cui vertici sono nei punti

$$A \equiv -(\omega+\omega') \ , \quad B \equiv \omega - \omega' \ , \quad C \equiv \omega + \omega' \ , \quad D \equiv -\omega + \omega' .$$

---

[1] Che si dovesse riprodurre a meno di un fattore esponenziale, risultava subito dall'osservare che $\sigma(u+2\omega)$, $\sigma(u+2\omega')$ hanno i medesimi infinitesimi di σu.

[2] Che debba essere $\eta\omega' - \eta'\omega$ un *multiplo* di $\frac{\pi i}{2}$ si riconosce anche subito così. Nella prima delle (12) si cangi u in $u+2\omega'$ e nella seconda u in $u+2\omega$ e si paragonino i risultati, che debbono essere eguali.

Sul contorno e nell'interno di esso la funzione $\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$ non ha alcuna singolarità, salvo in $u = 0$, ove ha un polo del primo ordine col residuo $+1$; si ha quindi

$$2\pi i = \int_{ABCD} \zeta u \, du ,$$

l'integrale essendo esteso al contorno nel senso positivo, che è appunto il senso A B C D (Cf. §. 94). Possiamo scrivere in altro modo, riunendo le parti dell'integrale estese ai tratti paralleli A B, C D; B C, D A, e cioè:

$$2\pi i = \int_{AB} \{\zeta u - \zeta(u+2\omega')\} \, du + \int_{DA} \{\zeta u - \zeta(u+2\omega)\} \, du ,$$

onde, per le formole fondamentali (10) essendo

$$\zeta(u+2\omega) = \zeta u + 2\eta \ , \quad \zeta(u+2\omega') = \zeta u + 2\eta' ,$$

ricaviamo

$$2\pi i = -\int_{AB} 2\eta' \, du + \int_{AD} 2\eta \, du = 4\eta\omega' - 4\eta'\omega ,$$

il che dimostra appunto la (V).

Ciò premesso, possiamo dalle (12) dedurre la formola generale che dà l'effetto sulla σu dell'aggiunta di un qualsiasi periodo $2m\omega + 2n\omega'$ all'argomento u.

Dalla prima delle (12) si ha intanto, per qualunque m intero e positivo, cangiandovi u in $u + 2(m-1)\omega$

$$\sigma(u+2m\omega) = -e^{2\eta[u+2(m-1)\omega+\omega]} . \sigma(u+2(m-1)\omega) .$$

Cangiando in questa successivamente m in $m-1$, $m-2, \ldots 2, 1$ e moltiplicando insieme tutte le formole, otteniamo:

$$(13) \qquad \sigma(u+2m\omega) = (-1)^m \, e^{2m\eta(u+m\omega)} . \sigma u .$$

Se in questa si cangia u in $u - 2m\omega$, si ottiene la formola stessa per m negativo. Similmente avremo per qualunque n intero:

$$(14) \qquad \sigma(u+2n\omega') = (-1)^n \, e^{2n\eta'(u+n\omega')} . \sigma u .$$

Cangiamo nella (13) u in $u+2n\omega'$, sostituendo nel secondo membro a $\sigma(u+2n\omega')$ il valore (14); troveremo

$$\sigma(u+2m\omega+2n\omega')=(-1)^{m+n}e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')+2mn(\eta'\omega-\eta\omega')}$$

ovvero per la (V):

$$\text{(VI)}\quad \sigma(u+2m\omega+2n\omega')=(-1)^{m+n+mn}.e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')}.\sigma u.$$

È questa la formola generale richiesta.

§. 98 [1].

Proprietà generali delle funzioni ellittiche.

Nella $\wp u$ e nelle sue derivate abbiamo riconosciuto delle funzioni uniformi in tutto il piano, aventi a distanza finita soltanto singolarità polari e dotate di due periodi indipendenti 2ω, $2\omega'$. In generale, come già si è detto al §. 93, si comprendono oggidì sotto il nome di *funzioni ellittiche* tutte le funzioni doppiamente periodiche, con sole singolarità polari a distanza finita. Se chiamiamo 2ω, $2\omega'$ i periodi della funzione, possiamo anche dire che le funzioni ellittiche rimangono invariate eseguendo sull'argomento tutte le sostituzioni lineari del gruppo parabolico

$$u'=u+2m\omega+2n\omega'.$$

Esse offrono, dopo le funzioni semplicemente periodiche, il più semplice esempio di quella classe generale di funzioni uniformi nel loro campo d'esistenza che si dicono *automorfe (Fuchsiane-Kleiniane* secondo Poincarè) e che godono della proprietà di riprodursi, quando sul loro argomento si eseguiscono le sostituzioni lineari di un gruppo fondamentale. È chiaro che, nel campo d'esistenza della funzione, il gruppo deve essere *propriamente discontinuo* (Cap. II §. 14). E, per restare al caso nostro speciale, i due periodi 2ω, $2\omega'$ di ogni funzione ellittica debbono essere in rapporto complesso; altrimenti, se fossero indipendenti, nell'intorno di ogni punto del piano si addenserebbero infiniti punti equi-

---

[1] Le proprietà generali delle funzioni ellittiche, che si studiano nel presente § e nel seguente, non sono che un caso particolare delle proprietà delle funzioni razionali sopra una superficie Riemanniana di cui abbiamo trattato al §. 89, e corrispondono precisamente al caso ellittico $p=1$.

valenti, nei quali la funzione ellittica dovrebbe riprendere il medesimo valore, ciò che è incompatibile coll'uniformità della funzione. Si osservi ancora che le nostre ricerche sui gruppi di traslazioni (Cap. II §. 17) ci assicurano che: *non esistono funzioni uniformi con tre o più periodi indipendenti.*

Cominciamo lo studio delle proprietà generali delle funzioni ellittiche colla dimostrazione del seguente teorema:

Ogni funzione ellittica deve ammettere dei poli a distanza finita. In caso contrario infatti, se consideriamo un parallelogrammo fondamentale dei periodi, il cui primo vertice collochiamo in un punto arbitrario a del piano, ivi il modulo della nostra funzione, che sarebbe una trascendente intera, si manterrebbe inferiore ad un numero fisso K e lo stesso avverrebbe quindi, a causa della doppia periodicità, in qualunque campo finito. Il teorema dimostrato al Cap. VI §. 59 ci assicura allora che la funzione si ridurrebbe ad una costante.

Da questo teorema seguono due corollarii importanti, di continuo uso nella teoria, e cioè:

1.° *Se due funzioni ellittiche $f(u)$, $f_1(u)$ coi medesimi periodi 2ω, $2\omega'$ hanno i medesimi punti di infinito e di infinitesimo, coi medesimi ordini, non possono differire che per un fattore costante.*

E infatti il quoziente $\frac{f(u)}{f_1(u)}$ sarebbe ancora una funzione ellittica coi periodi 2ω, $2\omega'$ e non diventerebbe più infinito (nè zero), onde sarebbe una costante.

2.° *Se due funzioni ellittiche $f(u)$, $f_1(u)$, coi medesimi periodi, hanno a comune i poli e i relativi termini d'infinito, l'una non può differire dall'altra che per una costante additiva.*

E infatti la differenza $f_1(u) - f(u)$ sarebbe doppiamente periodica e senza poli, e perciò una costante.

§. 99.

Ordine di una funzione ellittica e teorema d'Abel.

Sia $f(u)$ una funzione ellittica coi periodi $(2\omega, 2\omega')$ e consideriamo un parallelogrammo fondamentale A B C D dei periodi coi vertici nei punti

$$A \equiv a \ , \quad B \equiv a+2\omega \ , \quad C \equiv a+2\omega+2\omega' \ , \quad D \equiv a+2\omega' \ ,$$

essendo a un punto arbitrario del piano, scelto però in guisa che sul contorno A B C D la $f(u)$ non diventi infinita, ciò che evidentemente è sempre possibile, gli infiniti di $f(u)$ in un campo finito essendo in numero finito. Allora la $f(u)$ diventerà certamente infinita in qualche punto interno del parallelogrammo e noi vogliamo dimostrare l'importante teorema:

La somma dei residui di una funzione ellittica nell' interno del parallelogrammo dei periodi è nulla.

Questa somma è data infatti da

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ABCD} f(u)\,du\,;$$

e se riuniamo nell'integrale le parti relative ai lati paralleli, ricordando che $f(u+2\omega)=f(u)$, $f(u+2\omega')=f(u)$, vediamo subito che l'integrale stesso è nullo (Cf. §. 97).

Supponiamo ora di più che il parallelogrammo fondamentale dei periodi sia collocato in guisa da non contenere sul contorno nemmeno infinitesimi della $f(u)$, come è lecito ammettere. Se applichiamo il teorema precedente alla derivata logaritmica $\frac{f'(u)}{f(u)}$, che è anch'essa manifestamente una funzione ellittica, e ricordiamo che la somma dei residui di $\frac{f'(u)}{f(u)}$ è data da

$$N_0 - N_\infty\,,$$

indicando con N_0 il numero degli infinitesimi e con N_∞ il numero degli infiniti [1] della $f(u)$ nel parallelogrammo, ne risulta

$$N_0 = N_\infty\,,$$

cioè il teorema: *Ogni funzione ellittica diventa nel parallelogrammo dei periodi tante volte zero quante volte infinita.* Possiamo intendere che questo teorema valga anche quando capitino infinitesimi o poli sul contorno, purchè dei due infinitesimi o poli equivalenti sui lati se ne conti uno solo Ed ora se osserviamo che, essendo c una costante qualunque, anche $f(u)-c$ è una funzione ellittica, possiamo enunciare il teorema generale:

---

[1] Ben' inteso, computando ciascun infinitesimo o infinito tante volte quante unità sono nel suo ordine.

Una funzione ellittica prende nel parallelogrammo dei periodi ogni valore fissato ad arbitrio sempre lo stesso numero di volte.

Questo numero fisso, che dice quante volte una funzione ellittica riprende in un parallelogrammo dei periodi ogni suo valore, si chiama l'*ordine* della funzione ellittica. Si vede subito che *non esistono funzioni ellittiche di primo ordine.* Una tale funzione dovrebbe invero possedere un solo polo del 1.° ordine con residuo nullo, ciò che è assurdo. Dunque: *Le funzioni ellittiche di minimo ordine sono quelle di secondo ordine.* Tale è per esempio la funzione elementare di Weierstrass $\wp u$.

Per una funzione ellittica $f(u)$ d'ordine n siano

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots \alpha_n$$

i punti di infinitesimo, e

$$\beta_1 , \beta_2 , \ldots \beta_n \text{ [1]}$$

i poli nel parallelogrammo fondamentale dei periodi A B C D, che supponiamo nuovamente non contenga sul contorno nè punti α nè punti β. Fra le posizioni degli zeri α e degli infiniti β passa una relazione, che è un caso particolare di un celebre *teorema d'Abel* e che consiste nella formola

$$(15) \qquad \sum \alpha - \sum \beta = 2m\omega + 2n\omega' \quad (m, n \text{ interi}) ,$$

o, come si suol scrivere anche più semplicemente:

$$\sum \alpha \equiv \sum \beta , (2\omega, 2\omega') .$$

Per dimostrare la (15), si estenda al contorno A B C D del parallelogrammo l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{ABCD} u \frac{f'(u)}{f(u)} du ,$$

il cui valore sarà la somma dei residui della funzione sotto il segno, cioè appunto $\Sigma\alpha - \Sigma\beta$. D'altra parte, decomponendo l'integrale come al

[1] Se vi sono infinitesimi o poli d'ordine superiore, intendiamo che atrettante α o altrettante β coincidono.

§. 97, abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ABCD} u\,\frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\left\{u\,\frac{f'(u)}{f(u)} - (u+2\omega')\,\frac{f'(u+2\omega')}{f(u+2\omega')}\right\}du$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{DA}\left\{u\,\frac{f'(u)}{f(u)} - (u+2\omega)\,\frac{f'(u+2\omega)}{f(u+2\omega)}\right\}du =$$

$$= -\frac{2\omega'}{2\pi i}\int_{AB}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du + \frac{2\omega}{2\pi i}\int_{AD}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du.$$

Ora l'integrale indefinito $\int\frac{f'(u)}{f(u)}\,du$ è $\log f(u)$ e poichè in B, D la $f(u)$ ha lo stesso valore che in A, i due valori ottenuti in B, D per $\log f$ lungo i cammini rettilinei AB, AD non possono differire da $\log f_A$ che per multipli interi di $2\pi i$, ciò che dimostra la (15).

§. 100.

Espressione di una funzione ellittica con infinitesimi ed infiniti assegnati.

Procediamo ora alla effettiva costruzione delle più generali funzioni ellittiche. Riferendoci ai teoremi dimostrati alla fine del §. 98, risolveremo successivamente i due problemi:

A) *costruire una funzione ellittica, assegnati nel parallelogrammo fondamentale i suoi infinitesimi ed i suoi poli.*

B) *costruire una funzione ellittica, assegnati i suoi poli ed i suoi termini d'infinito.*

Nel presente capitolo ci occupiamo del primo problema, esprimendo la funzione ellittica cercata per mezzo della σ. Siano nel parallelogrammo fondamentale

$$\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \ldots\ \alpha_n$$

gli infinitesimi, e

$$\beta_1\,,\ \beta_2\,,\ \ldots\ \beta_n$$

i poli della funzione ellittica cercata dove, al solito, se si avranno infinitesimi o poli d'ordine superiore al primo, altrettante α o β dovranno coincidere fra loro.

Pel teorema d'Abel, l'esistenza della funzione è subordinata al verificarsi della relazione

$$(15^*) \qquad \sum \alpha - \sum \beta = 2r\omega + 2s\omega' \quad (r, s \text{ interi});$$

ma ora dimostreremo che, soddisfatta questa condizione, esiste effettivamente la funzione ellittica cercata $f(u)$.

Consideriamo la funzione

$$(16) \qquad \frac{\sigma(u-\alpha_1)\,\sigma(u-\alpha_2)\ldots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\,\sigma(u-\beta_2)\ldots\sigma(u-\beta_n)},$$

che è uniforme in tutto il piano ed ha a comune colla $f(u)$ da costruirsi gli infinitesimi ed i poli. La $f(u)$ richiesta non può dunque differire dalla (16) che per un fattore esponenziale

$$e^{G(u)},$$

il cui esponente $G(u)$ sia una trascendente intera. Avremo dunque:

$$f(u) = e^{G(u)}\,\frac{\sigma(u-\alpha_1)\,\sigma(u-\alpha_2)\ldots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\,\sigma(u-\beta_2)\ldots\sigma(u-\beta_n)}$$

e resterà da determinare, se sarà possibile, la $G(u)$ in guisa che il secondo membro ammetta i periodi 2ω, $2\omega'$. Servendoci delle formole fondamentali (12) §. 97, troviamo che $G(u)$ deve soddisfare le condizioni seguenti

$$(17) \qquad \begin{cases} G(u+2\omega) - 2\eta\left[\sum\alpha - \sum\beta\right] = G(u) + 2k\pi i \\ G(u+2\omega') - 2\eta'\left[\sum\alpha - \sum\beta\right] = G(u) + 2k'\pi i, \end{cases}$$

dove k, k' debbono essere interi. Da queste derivando segue che la trascendente intera $G'(u)$ deve ammettere i periodi 2ω, $2\omega'$, onde sarà una costante (§. 98) ed avremo

$$G(u) = Au + B$$

con A, B costanti. Le (17) diventano

$$(18) \qquad \begin{cases} A\omega - \eta(2r\omega + 2s\omega') = k\pi i \\ A\omega' - \eta'(2r\omega + 2s\omega') = k'\pi i \end{cases}$$

da cui

$$A(\eta\omega' - \eta'\omega) = (k'\eta - k\eta')\pi i .$$

Ma, per la (V) pag. 261, è $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}$ e però

$$A = 2k'\eta - 2k\eta' .$$

Sostituendo nella prima delle (18), abbiamo

$$(2k'\eta - 2k\eta')\omega - \eta(2r\omega + 2s\omega') = k\pi i$$

ovvero, poichè $\eta'\omega = \eta\omega' - \frac{\pi i}{2}$:

$$2(k' - r)\eta\omega - 2(k+s)\eta\omega' = 0 ,$$

e similmente dalla seconda delle (18): $2(k' - r)\eta'\omega - 2(k+s)\eta'\omega' = 0$.

Non potendo essere $\eta = \eta' = 0$, ne deduciamo

$$k' = r \quad , \quad k = -s ,$$

e però

$$A = 2r\eta + 2s\eta'$$

e con questo valore di A le (18) sono effettivamente soddisfatte.

Per la funzione ellittica cercata $f(u)$ avremo dunque l'espressione analitica

$$\text{(VI)} \qquad f(u) = C\, e^{(2r\eta + 2s\eta')u} \frac{\sigma(u-\alpha_1)\,\sigma(u-\alpha_2)\ldots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\,\sigma(u-\beta_2)\ldots\sigma(u-\beta_n)} ,$$

restando C costante arbitraria. Ne concludiamo: *Dati ad arbitrio nel parallelogrammo dei periodi gli infinitesimi α e gli infiniti β di una funzione ellittica da determinarsi, purchè sia soddisfatta la condizione*

$$\text{(15*)} \qquad \sum\alpha - \sum\beta = 2r\omega + 2s\omega' \quad (r, s \text{ interi}) ,$$

la funzione esiste ed è data, a meno di un fattore costante, dalla (VI).

Osserviamo che nella (VI) non importa che i punti α, β siano tutti in un medesimo parallelogrammo, ma basta che le α formino un sistema *completo* di infinitesimi non equivalenti e le β similmente un sistema

completo di poli della funzione. In particolare potremo alterare le α e le β di periodi, in guisa che risulti

$$\sum \alpha = \sum \beta ,$$

e allora la (VI) diventerà più semplicemente:

$$\text{(VI*)} \qquad f(u) = C \cdot \frac{\sigma(u-\alpha_1)\,\sigma(u-\alpha_2)\ldots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\,\sigma(u-\beta_2)\ldots\sigma(u-\beta_n)} , \quad \left(\sum \alpha = \sum \beta\right) .$$

§. 101.

Funzioni doppiamente periodiche di 1ª, 2ª e 3ª categoria.

Per mezzo della σ si esprimono, come si è visto, tutte le funzioni ellittiche, mediante la (VI) o (VI*). Ma insieme a queste funzioni, che offrono una doppia periodicità assoluta, possiamo esprimere più generalmente per la σ tutte quelle funzioni uniformi, senza singolarità essenziali tranne in $u = \infty$, *i cui infinitesimi ed infiniti sono distribuiti in modo doppiamente periodico nel piano, senza che lo siano gli altri valori* [1].

Dati infatti ad arbitrio un sistema completo di infinitesimi

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots \alpha_n ,$$

ed un sistema completo di poli

$$\beta_1 , \beta_2 , \ldots \beta_m ,$$

per la funzione cercata $\varphi(u)$, questa non potrà differire dal quoziente

$$\frac{\sigma(u-\alpha_1)\,\sigma(u-\alpha_2)\ldots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\,\sigma(u-\beta_2)\ldots\sigma(u-\beta_m)}$$

che per un fattore esponenziale

$$e^{G(u)},$$

nel quale la trascendente $G(u)$ resterà affatto arbitraria, sicchè

$$\varphi(u) = e^{G(u)} \frac{\sigma(u-\alpha_1)\ldots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\ldots\sigma(u-\beta_m)} .$$

---

[1] La σ stessa offre il più semplice esempio di una tale specie di funzioni.

Si avrà allora

$$\frac{\varphi(u+2\omega)}{\varphi(u)} = e^{G(u+2\omega) - G(u) + 2\eta(n-m)u + 2\eta'(\Sigma\beta - \Sigma\alpha) + (n-m)\pi i}$$

$$\frac{\varphi(u+2\omega')}{\varphi(u)} = e^{G(u+2\omega') - G(u) + 2\eta'(n-m)u + 2\eta'(\Sigma\beta - \Sigma\alpha) + (n-m)\pi i}.$$

Possiamo determinare $G(u)$ in guisa che i fattori esponenziali, per cui $\varphi(u+2\omega)$, $\varphi(u+2\omega')$ differiscono da $\varphi(u)$, abbiano esponenti lineari in u, come accade per la σu. Sarà perciò necessario e sufficiente che $G(u)$ sia un polinomio di 2.° grado in u:

$$G(u) = au^2 + bu + c,$$

dopo di che per la funzione

$$\text{(VII)} \qquad \varphi(u) = e^{au^2+bu+c}\,\frac{\sigma(u-\alpha_1)\ldots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\ldots\sigma(u-\beta_m)}$$

risulterà:

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} \varphi(u+2\omega) = e^{Au+B}\,.\,\varphi(u) \\ \varphi(u+2\omega') = e^{A'u+B'}\,.\,\varphi(u), \end{cases}$$

dove si è posto

$$A = 4a\omega + 2\eta(n-m)\ ,\quad A' = 4a\omega' + 2\eta'(n-m)$$

$$\begin{cases} B = 4a\omega^2 + 2b\omega + 2\eta\left(\sum\beta - \sum\alpha\right) + (n-m)\pi i \\ B' = 4a\omega'^2 + 2b\omega' + 2\eta'\left(\sum\beta - \sum\alpha\right) + (n-m)\pi i. \end{cases}$$

Si noti che fra le costanti A, A' ha luogo la relazione

$$\text{(20)} \qquad A\omega' - A'\omega = (n-m)\pi i.$$

Diremo funzioni periodiche di 1.ª categoria quelle $\varphi(u)$ date dalla (VII), per le quali si possono determinare a, b in guisa che ne risulti

$$A = A' = B = B' = 0,$$

cioè in modo da avere una funzione ellittica. Per ciò è necessario e sufficiente che si abbia insieme

$$\text{(21)} \qquad n = m\ ,\ \sum\alpha \equiv \sum\beta.$$

Le funzioni periodiche di 1.ª categoria coincideranno dunque colle ordinarie funzioni ellittiche, o ne differiranno soltanto per un fattore esponenziale con esponente di 2.° grado.

Diremo periodiche di 2.ª categoria quelle $\varphi(u)$ per le quali possiamo determinare a, b in guisa che risultino ancora

$$A = A' = 0\,,$$

ma non simultaneamente $B = B' = 0$. In tal caso delle due condizioni (21) sarà soddisfatta solo la prima, e la funzione $\varphi(u)$ acquisterà fattori costanti per aggiunta di periodi all'argomento.

Attribuiamo in fine alla terza categoria tutte le altre funzioni $\varphi(u)$, per le quali adunque non è possibile determinare a, b in guisa da rendere $A = A' = 0$. Per le funzioni di 3.ª categoria sarà quindi $n \neq m$.

§. 102.

Formola $\wp u - \wp v = \dfrac{\sigma(v+u)\,\sigma(v-u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}$ ed equazione ai tre termini per la σ.

Applichiamo subito i risultati generali del §. 100 alla ricerca di alcune formole fondamentali. Sia v un punto fisso nel primo parallelogrammo dei periodi $(0, 2\omega, 2\omega+2\omega', 2\omega')$ e si consideri la differenza

$$\wp u - \wp v\,.$$

Considerata come funzione di u, è questa una funzione ellittica di 2.° ordine con un unico infinito in $u = 0$ e col termine d'infinito $\dfrac{1}{u^2}$. Essa avrà dunque due infinitesimi nel parallelogrammo, che sono evidentemente nei punti

$$u_0 = v\ ,\quad u_0 = 2\omega + 2\omega' - v\ ^{(1)};$$

questi infinitesimi saranno del 1.° ordine salvo quando siano equivalenti,

---

(1) A causa di $\wp(-v) = \wp v$.

il che accade soltanto per

$$v = \omega\ ,\ \omega'\ ,\ \omega+\omega'\ ^{(1)}\ .$$

La (VI*) ci dà quindi subito

$$\wp u - \wp v = C\,\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)}\ ,$$

essendo C una costante rispetto ad u, cioè una funzione di v.

Per determinare C basta moltiplicare per u^2 e passare al limite per $u=0$, osservando che

$$\lim_{u=0} u^2\,\wp u = 1\ ,\ \lim_{u=0}\frac{\sigma u}{u} = 1$$

e si trova $C = -\sigma^2 v$. Abbiamo così la formola fondamentale:

$$\text{(VIII)}\qquad \wp u - \wp v = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(v-u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}\ .$$

Di qui possiamo dedurre un'altra formola importante per la σ. Essendo

$$a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d$$

quattro valori qualsiasi dell'argomento u, e posto

$$A = \wp a\ ,\ B = \wp b\ ,\ C = \wp c\ ,\ D = \wp d\ ,$$

si ha l'identità

$$(A-B)(C-D) + (A-C)(D-B) + (A-D)(B-C) = 0\ ^{(2)}\ ,$$

---

(1) Che le differenze

$$\wp u - \wp\omega\ ,\ \wp u - \wp\omega'\ ,\ \wp u - \wp(\omega+\omega')$$

abbiano rispettivamente in $u = \omega, \omega', \omega+\omega'$ un infinitesimo del 2.° ordine risulta anche da ciò che ivi si annulla $\wp'$. Infatti, essendo $\wp'$ dispari, si ha p. e.

$$\wp'(2\omega - u) = -\wp' u\ ,$$

indi $\wp'\omega = -\wp'\omega = 0$ e così $\wp'\omega' = 0$, $\wp'(\omega+\omega') = 0$.

(2) Basta sviluppare il determinante identicamente nullo

$$\begin{vmatrix} A & A & A \\ B & C & D \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & A-C & A-D \\ B & C & D \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\ .$$

ossia

$$(\wp a - \wp b)(\wp c - \wp d) + (\wp a - \wp c)(\wp d - \wp b) + (\wp a - \wp d)(\wp b - \wp c) = 0 .$$

Se alle differenze $\wp a - \wp b$, $\wp c - \wp d$ ecc. sostituiamo le loro espressioni date dalla (VIII), e togliamo i denominatori, otteniamo la formola domandata:

$$\text{(IX)} \quad \sigma(a-b)\,\sigma(a+b)\,\sigma(c-d)\,\sigma(c+d) + \sigma(a-c)\,\sigma(a+c)\,\sigma(d-b)\,\sigma(d+b) + \\ + \sigma(a-d)\,\sigma(a+d)\,\sigma(b-c)\,\sigma(b+c) = 0 ,$$

che si dice l'*equazione ai tre termini* per la σ.

§. 103.

Equazione differenziale per la $\wp u$: $\wp'^2 = 4\,\wp^3 - g_2\,\wp - g_3$.

Un'altra formula importantissima otteniamo esprimendo la derivata $\wp' u$ per la σ. Si osservi che la $\wp' u$ è una funzione ellittica di 3.° ordine, che diventa infinita nell'origine come $-\frac{2}{u^3}$ ed infinitesima del 1.° ordine nei tre punti non equivalenti

$$\omega \;,\; \omega' \;,\; -(\omega+\omega')\ ^{(1)} .$$

Per la (VI*) pag. 270 avremo dunque

$$\wp' u = C\,\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma^3 u} .$$

Per determinare la costante C si moltiplichi per u^3 e si passi al limite per $u = 0$; troviamo

$$C = -\frac{2}{\sigma\omega\,\sigma\omega'\,\sigma(\omega+\omega')} ,$$

indi

$$\text{(X)} \qquad \wp' u = -2\,\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma\omega\,\sigma\omega'\,\sigma(\omega+\omega')\,\sigma^3 u} .$$

---

(1) Si prende $-(\omega+\omega')$ in luogo di $\omega+\omega'$, perchè sia $\Sigma\alpha = 0$ come $\Sigma\beta$. (Cf. §. 100).

Cangiando in questa u in $-u$ e moltiplicando le due formole fra loro, si ha:

$$\wp'^2 u = 4\,\frac{\sigma(\omega-u)\,\sigma(\omega+u)}{\sigma^2\omega\,\sigma^2 u}\cdot\frac{\sigma(\omega'-u)\,\sigma(\omega'+u)}{\sigma^2\omega'\,\sigma^2 u}\cdot\frac{\sigma(\omega+\omega'-u)\,\sigma(\omega+\omega'+u)}{\sigma^2(\omega+\omega')\,\sigma^2 u},$$

ossia per la (VIII)

$$\text{(XI)}\qquad \wp'^2 u = 4\,(\wp u-\wp\omega)\,(\wp u-\wp\omega')\,(\wp u-\wp(\omega+\omega')),$$

formola che potremmo anche stabilire direttamente, osservando che le due funzioni ellittiche dei due membri hanno a comune infinitesimi e poli.

Da questa formola (XI) deriviamo importanti conseguenze, cercando di determinare i coefficienti del polinomio di 3.° grado in $\wp u$ del secondo membro. Possiamo a tale scopo servirci degli sviluppi di $\wp u$, $\wp' u$ nell'intorno dell'origine $u=0$. La formola (III) pag. 259 ci dà per lo sviluppo di $\wp u$ nell'intorno dell'origine

$$\text{(22)}\qquad \wp u = \frac{1}{u^2}+\sum_{m,n}{}' \left\{\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right\}$$
$$(w=2m\omega+2n\omega').$$

Secondo i teoremi sulle serie di funzioni analitiche (Cap. IV, §. 47, 48), si può sviluppare la serie del secondo membro in una serie di potenze di u nel modo seguente. Abbiamo

$$\frac{1}{(u-w)^2}=\frac{1}{w^2}\left(1-\frac{u}{w}\right)^{-2}$$

e quando $|u|<|w|$ (per il che basta che $|u|$ sia minore della più piccola delle quantità $2|\omega|$, $2|\omega'|$, $2|\omega+\omega'|$, $2|\omega-\omega'|$), sviluppando colla serie binomiale, abbiamo

$$\left(1-\frac{u}{w}\right)^{-2}=\sum_{r=0}^{r=\infty}(r+1)\,\frac{u^r}{w^r},$$

indi

$$\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}=\sum_{r=1}^{r=\infty}(r+1)\,\frac{u^r}{w^{r+2}}$$

e sostituendo nella (22):

$$\wp u = \frac{1}{u^2}+\sum_{m,n}{}'\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(r+1)\,u^r}{w^{r+2}}.$$

Ordiniamo la serie tripla per le potenze di u, osservando che tutte le somme doppie

$$\sum_{m,n}' \frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^{r+2}}$$

per r dispari sono nulle [1]. Ponendo

$$c_r = \sum_{m,n}' \frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^{2r+2}} \quad (r=1,2,3..), \tag{23}$$

avremo per lo sviluppo domandato

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{r=1}^{r=\infty} (2r+1)\, c_r\, u^{2r}, \tag{24}$$

quindi

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + 2\sum_{r=1}^{r=\infty} r\,(2r+1)\, c_r\, u^{2r-1}. \tag{24*}$$

Ora, facendo uso con Weierstrass delle notazioni

$$e_1 = \wp\omega\ ,\quad e_2 = \wp(\omega+\omega')\ ,\quad e_3 = \wp\omega', \tag{25}$$

e ponendo

$$g_1 = 4\,(e_1+e_2+e_3)\ ,\quad g_2 = -4\,(e_1 e_2+e_2 e_3+e_3 e_1)\ ,\quad g_3 = 4\, e_1 e_2 e_3, \tag{26}$$

potremo scrivere la (XI) così:

$$\wp'^2 u = 4\,\wp^3 u - g_1\,\wp^2 u - g_2\,\wp u - g_3.$$

Moltiplichiamo questa per u^6 e sostituendo ad $u^3\,\wp' u$, $u^2\,\wp u$ i loro sviluppi, dati dalla (24), (24*):

$$u^3\,\wp' u = -2 + 6\, c_1\, u^4 + 20\, c_2\, u^6 + \dots$$
$$u^2\,\wp u = 1 + 3\, c_1\, u^4 + 5\, c_2\, u^6 + \dots,$$

avremo l'identità:

$$(-2+6\,c_1\,u^4+20\,c_2\,u^6+..)^2 = 4\,(1+3\,c_1\,u^4+5\,c_2\,u^6+..)^3 -$$
$$- g_1\,u^2\,(1+3\,c_1\,u^4+..) - g_2\,u^4\,(1+3\,c_1\,u^4+..) - g_3\,u^6,$$

---

[1] Ciò risulta anche dalla parità di $\wp u$.

e paragonando da una parte e dall'altra i coefficienti di u^2, u^4, u^6, otteniamo

$$g_1 = 0\ ,\quad g_2 = 60\, c_1 = 60 \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(2\,m\omega + 2\,n\omega')^4}\ ,$$

$$g_3 = 140\, c_2 = 140 \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(2\,m\omega + 2\,n\omega')^6}\ .$$

Di qui vediamo intanto che si ha

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0\ , \tag{27}$$

cioè

$$\wp\omega + \wp\omega' + \wp\,(\omega+\omega') = 0$$

e per ciò

$$\left\{\begin{aligned} g_2 &= -4\,(e_1\,e_2 + e_2\,e_3 + e_3\,e_1) = 2\,(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \\ g_3 &= 4\,e_1\,e_2\,e_3\ . \end{aligned}\right. \tag{38}$$

La relazione fra $\wp' u$ e $\wp u$ resta dunque

$$\wp'^2 u = 4\,\wp^3 u - g_2\,\wp u - g_3. \tag{XII}$$

§. 104.

Gli invarianti g_2, g_3 e gli sviluppi di $\wp u$, ζu, σu nell'intorno di $u = 0$.

Le costanti g_2, g_3, che dipendono dai periodi 2ω, $2\omega'$ nel modo trascendente espresso dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} g_2 &= 60 \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(2\,m\omega + 2\,n\omega')^4} \\ g_3 &= 140 \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(2\,m\omega + 2\,n\omega')^6}\ , \end{aligned}\right. \tag{XIII}$$

diconsi gli *invarianti* della funzione $\wp u$. Una prima ragione di tale denominazione la troviamo in questo che, comunque si cangino i periodi, purchè la $\wp u$ rimanga la stessa, le costanti g_2, g_3 non cangiano. È evidente infatti che, come per la σu (§. 95), così per la $\wp u$, *condizione ne-*

cessaria e sufficiente perchè due $\wp u$ costruite con diversi periodi

$$\wp(u \mid \omega, \omega') \ , \quad \wp(u \mid \Omega, \Omega')$$

coincidano, è che i loro periodi siano legati da una sostituzione lineare omogenea

$$\begin{cases} \omega = \alpha\,\Omega + \beta\,\Omega' \\ \omega' = \gamma\,\Omega + \delta\,\Omega' \end{cases}$$

a coefficienti interi e determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. In conseguenza i punti (poli) $2m\omega + 2n\omega'$ coincidono, salvo l'ordine, cogli altri $2m\Omega + 2n\Omega'$ e perciò, secondo le (XIII), i corrispondenti invarianti sono identici.

Osserviamo poi che dalla espressione analitica (22) della $\wp u$ discende immediatamente la formola di omogeneità

$$\wp(\lambda u \mid \lambda\omega, \lambda\omega') = \frac{1}{\lambda^2}\,\wp(u \mid \omega, \omega') .$$

Si vedrà poi più tardi che la denominazione di invarianti, data a g_2, g_3, corrisponde anche ad una proprietà algebrica.

Ritorniamo ora allo sviluppo di $\wp u$ nell'intorno di $u = 0$:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{r=1}^{r=\infty} (2r+1)\,c_r\,u^{2r} = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}\,u^2 + \frac{g_3}{28}\,u^4 + \ldots$$

per dimostrare l'importante teorema:

Tutti i coefficienti di questa serie sono funzioni razionali intere, a coefficienti razionali, degli invarianti g_2, g_3.

Per dimostrarlo osserviamo che, derivando la (XII), si ottiene

$$\wp'' u = 6\,\wp^2 u - \frac{1}{2}\,g_2 \tag{29}$$

e, se sostituiamo da una parte e dall'altra gli sviluppi di $\wp u$, $\wp'' u$ nell'intorno di $u = 0$, otterremo delle formole ricorrenti per i coefficienti, che porranno in evidenza la proprietà enunciata.

Pongasi per brevità $u^2 = v$ e inoltre

$$a_0 = 1 \ , \quad a_1 = 0 \ , \quad a_n = (2n-1)\,c_{n-1} \quad (\text{per } n > 1);$$

avremo

$$\wp u = \frac{1}{v} \sum_0^\infty a_n\,v^n$$

e quindi

$$\wp^2 u = \frac{1}{v^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\sum_{r=0}^{r=n} a_r \, a_{n-r} \right) . \, v^n$$

$$\wp'' u = \frac{1}{v^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n-2)\,(2n-3)\, a_n \, v^n .$$

Sostituendo nella (29) e paragonando da una parte e dall'altra i coefficienti di v^{n-2} (per $n > 2$), otteniamo

$$(2n-2)\,(2n-3)\, a_n = 6\,(a_0\, a_n + a_1\, a_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, a_1 + a_n\, a_0)$$

ovvero, supposto $n > 3$:

$$(30) \qquad (n-3)\,(2n+1)\, a_n = 3 \sum_{r=2}^{r=n-2} a_r \, a_{n-r} .$$

Da questa formola ricorrente a coefficienti interi potremo calcolare successivamente

$$a_4 \, , \; a_5 \, , \; a_6 \ldots$$

per funzioni razionali ed intere, a coefficienti razionali, di a_2, a_3, ossia di g_2, g_3. Per i primi termini dello sviluppo si trova così:

$$(31) \qquad \wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 . 3 . 5^2} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{2^4 . 5 . 7 . 11} u^8 +$$

$$+ \frac{1}{2^4 . 13} \left(\frac{g_3^2}{7} + \frac{g_2^3}{2 . 3 . 5^3} \right) u^{10} + \frac{g_2^2 g_3}{2^5 . 3 . 5^2 . 7 . 11} u^{12} + \ldots$$

Risulta dal teorema dimostrato che due funzioni $\wp u$, le quali abbiano i medesimi invarianti, coincidono, giacchè coincidendo i loro sviluppi (31) nell'intorno dell'origine, le due funzioni sono identiche. Siccome la $\wp u$ resta individuata dagli invarianti g_2, g_3, come dai periodi, si scriverà

$$\wp(u \, ; \; g_2 , \; g_3) \, ,$$

quando si vogliano porre in evidenza gli invarianti.

Con ciò però non è ancora dimostrato che *agli invarianti g_2, g_3 si possano dare valori arbitrarii*. Questa proprietà importante effettivamente sussiste; ma nel nostro metodo di esposizione della teoria non lo potremo dimostrare che più tardi (V. Cap. XI).

Dallo sviluppo (31) di $\wp u$ facilmente si deduce integrando quello di ζu:

$$(32) \qquad \zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{20}\frac{u^3}{3} - \frac{g_3}{28}\frac{u^5}{5} - \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}\frac{u^7}{7} + \ldots,$$

i cui coefficienti sono evidentemente funzioni razionali intere, a coefficienti razionali, di

$$g_2 \ , \ g_3 \, .$$

Osserviamo in fine che, anche per la trascendente intera σu, nello sviluppo in serie

$$\sigma u = u + au^3 + bu^5 + cu^7 + \ldots$$

i coefficienti $a, b, c \ldots$ saranno della medesima natura. E infatti poichè

$$\sigma u \, . \, \zeta u = \sigma' u \, ,$$

avremo

$$1 + 3au^2 + 5bu^4 + 7cu^6 + \ldots =$$

$$= \left(\frac{1}{u} - \frac{g_2}{20}\frac{u^3}{3} - \frac{g_3}{28}\frac{u^5}{5} + \ldots\right)(u + au^3 + bu^5 + cu^7 + \ldots) \, ,$$

e paragonando dall'una parte e dall'altra i coefficienti delle medesime potenze di u, ne risulta subito la proprietà enunciata. Si avrà in particolare

$$a = 0 \ , \ b = -\frac{g_2}{240} \ , \ c = -\frac{g_3}{840} \ldots$$

$$\sigma u = u - \frac{g_2}{240}u^5 - \frac{g_3}{840}u^7 + \ldots$$

Capitolo X.

Decomposizione di una funzione ellittica in elementi semplici. — Teorema d'addizione per la ζu e la $\wp u$. — Le funzioni ellittiche espresse razionalmente per $\wp u$, $\wp' u$. — Moltiplicazione e divisione dell'argomento nella $\wp u$.

§. 105.

Costruzione di una funzione ellittica con poli e termini d'infinito assegnati.

Ritornando alle funzioni generali ellittiche, occupiamoci ora di risolvere il secondo problema B) enunciato al §. 100: *costruire una funzione ellittica, di cui siano assegnati nel parallelogrammo dei periodi i poli ed i termini d'infinito.* Sia $u=\beta$ uno qualunque dei poli assegnati e siano

$$(1) \qquad \frac{A_0}{u-\beta}+\frac{A_1}{(u-\beta)^2}+\frac{A_2}{(u-\beta)^3}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{(u-\beta)^n}$$

i relativi termini d'infinito. La somma dei residui

$$\sum A_0 ,$$

estesa a tutti i poli nel parallelogrammo, o ad un sistema completo qualunque di poli, dovrà essere nulla (§. 99); viceversa, soddisfatta questa condizione, esiste una corrispondente funzione ellittica, come ora dimostreremo costruendola effettivamente.

Per ciò cominciamo dall'osservare che le funzioni

$$\zeta u=\frac{\sigma' u}{\sigma u} , \quad \wp u , \quad \wp' u , \quad \wp'' u \ldots \wp^{(n-2)} u$$

diventano infinite in $u=0$ e nei punti equivalenti coi termini rispettivi di infinito

$$\frac{1}{u} , \quad \frac{1}{u^2} , \quad -\frac{2}{u^3} , \quad \frac{2.3}{u^4} \ldots (-1)^n \frac{\pi(n-1)}{u^n} .$$

L'espressione

$$(2)\quad A_0\,\zeta(u-\beta)+A_1\,\wp(u-\beta)-\frac{1}{2}A_2\,\wp'(u-\beta)+\frac{A_3}{2\,.\,3}\wp''(u-\beta)+\ldots$$
$$+\frac{(-1)^n A_{n-1}}{\pi(n-1)}\wp^{(n-2)}(u-\beta)$$

diventa quindi infinita in $u=\beta$ precisamente coi termini d'infinito (1).

Se facciamo la somma delle espressioni (2), estesa ai punti β nel parallelogrammo dei periodi, ovvero ad un sistema completo di poli della funzione ellittica cercata $f(u)$, ed osserviamo che la somma

$$\sum A_0\,\zeta(u-\beta)$$

ammette i periodi 2ω, $2\omega'$ a causa di

$$\sum A_0=0\,,$$

avremo subito

$$(\mathrm{I})\qquad f(u)=C+\sum\Big\{A_0\,\zeta(u-\beta)+A_1\,\wp(u-\beta)-\frac{A_2}{2}\wp'(u-\beta)+$$
$$+\frac{A_3}{2\,.\,3}\wp''(u-\beta)+\ldots+\frac{(-1)^n A_{n-1}}{\pi(n-1)}\wp^{(n-2)}(u-\beta)\Big\}\,,$$

essendo C una costante additiva arbitraria. Il secondo membro è effettivamente una funzione ellittica coi periodi 2ω, $2\omega'$, coi poli e i termini d'infinito assegnati. Dunque vediamo che: *Di una funzione ellittica $f(u)$ si possono assegnare ad arbitrio un sistema completo di poli e i loro termini d'infinito, purchè sia nulla la somma dei residui; e la funzione cercata è data, a meno di una costante additiva, dalla* (I).

§. 106.

Formole d'addizione degli argomenti nella ζu e nella $\wp u$.

Il secondo membro della formola (I) si può cangiare, come ci proponiamo di dimostrare, in una funzione razionale di $\wp u$, $\wp' u$. A questo si arriva trasformando la (I) mediante le così dette *formole d'addizione* degli argomenti.

Cominciamo dallo stabilire la formola d'addizione per la funzione ζu. Perciò prendiamo la formola (§. 102):

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = \wp v - \wp u$$

e derivandola logaritmicamente rapporto ad u otteniamo

$$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u = \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v},$$

da cui, permutando u con v e sommando, abbiamo:

$$\text{(II)} \qquad \zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

Questa esprime, come si vede, la ζ della somma di due argomenti per la ζ, la $\wp$ e la $\wp'$ degli argomenti semplici e dicesi la *formola d'addizione* per la ζ.

Deduciamo subito dalla (II) una conseguenza che importa notare. Facendovi

$$u = \omega\ ,\quad v = \omega'$$

e ricordando che $\wp'\omega = 0$ $\wp'\omega' = 0$, ne risulta

$$\zeta(\omega+\omega') = \zeta\omega + \zeta\omega' = \eta + \eta'$$

Più in generale se r, s sono due interi che non siano ambedue pari, ne risulta

$$\zeta(r\omega + s\omega') = r\eta + s\eta'.$$

Ciò posto, supponiamo di cangiare i periodi fondamentali 2ω, $2\omega'$ in altri due fondamentali $2\bar{\omega}$, $2\bar{\omega}'$ colla sostituzione lineare (§. 95)

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \alpha\omega + \beta\omega' \\ \bar{\omega}' = \gamma\omega + \delta\omega', \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, e chiamiamo $2\bar{\eta}$, $2\bar{\eta}'$ i nuovi periodi di 2.ª specie. Siccome la nuova funzione ζ è eguale all'antica, pel mede-

simo valore dell'argomento, avremo

$$\begin{cases} \bar{\eta} = \zeta(\bar{\omega}) = \zeta(\alpha\omega + \beta\omega') = \alpha\eta + \beta\eta' \\ \eta' = \zeta(\bar{\omega}') = \zeta(\gamma\omega + \delta\omega') = \gamma\eta + \delta\eta'. \end{cases}$$

Se ne conclude il teorema: *Se i periodi di 1.ª specie subiscono una sostituzione lineare* $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ *a coefficienti interi e a determinante* $= 1$, *anche i periodi di 2.ª specie subiscono la medesima sostituzione.*

Ritorniamo alla formola generale (II) d'addizione per la ζ e deriviamola rapporto ad u; otteniamo:

$$\text{(III)} \qquad \wp(u+v) = \wp u - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

che è una prima forma del *teorema d'addizione per la* $\wp$.

Se eseguiamo nel secondo membro della (III) la derivazione, e sostituiamo a

$$\wp'^2 u \quad , \quad \wp'' u$$

i loro rispettivi valori

$$4\,\wp^3 u - g_2\,\wp u - g_3 \quad , \quad 6\,\wp^2 u - \frac{1}{2}\,g_2 \,,$$

la poniamo sotto l'altra forma

$$\wp(u+v) = \frac{2\,(\wp u\,\wp v - \frac{1}{4}\,g_2)\,(\wp u + \wp v) - g_3 - \wp' u\,\wp' v}{2\,(\wp u - \wp v)^2},$$

mediante la quale esprimiamo $\wp(u+v)$ razionalmente per $\wp u$, $\wp' u$, $\wp v$, $\wp' v$. Compendiando la formola precedente con quella che se ne ottiene cangiando v in $-v$, possiamo scrivere

$$\text{(IV)} \qquad \wp(u \pm v) = \frac{2\,(\wp u\,\wp v - \frac{1}{4}\,g_2)\,(\wp u + \wp v) - g_3 \mp \wp' u\,\wp' v}{2\,(\wp u - \wp v)^2}.$$

Notiamo altre forme semplici ed utili del teorema d'addizione per la $\wp$. Dalla (III) si ha

$$\wp(u+v) = \wp u - \frac{6\,\wp^2 u - \frac{1}{2}\,g_2}{2(\wp u - \wp v)} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'^2 u - \wp' u\,\wp' v}{(\wp u - \wp v)^2}.$$

Permutando in questa u con v, sommando e dividendo per 2, abbiamo la formola equivalente

$$\text{(V)} \qquad \wp(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 - \wp u - \wp v$$

e perciò anche

$$\wp(u-v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 - \wp u - \wp v,$$

da cui

$$\text{(VI)} \qquad \wp(u+v) - \wp(u-v) = -\frac{\wp' u\, \wp' v}{(\wp u - \wp v)^2}.$$

Meritano speciale menzione quei casi particolari del teorema d'addizione in cui l'argomento v è un *semiperiodo* ω, ω' ovvero $\omega+\omega'$, perchè allora il secondo membro si esprime per una funzione lineare della sola $\wp u$. Se facciamo p. es. nella (V) $v=\omega$, otteniamo

$$\wp(u+\omega) = -\wp u - e_1 + \frac{1}{4}\,\frac{\wp'^2 u}{(\wp u - e_1)^2} = -(\wp u + e_1) + \frac{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}{\wp u - e_1}.$$

Ora si ha, eseguendo la divisione:

$$\frac{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}{\wp u - e_1} = \wp u + e_1 - e_2 - e_3 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp u - e_1}$$

$$= \wp u + 2\,e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp u - e_2}$$

e quindi:

$$\wp(u+\omega) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp u - e_1}.$$

Con un calcolo analogo per $v=\omega+\omega'$, $v=\omega'$, otteniamo le formole

richieste

$$
\text{(VII)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
\wp(u+\omega) &= e_1 + \frac{(e_1-e_2)\,(e_1-e_3)}{\wp u - e_1} \\
\wp(u+\omega+\omega') &= e_2 + \frac{(e_2-e_3)\,(e_2-e_1)}{\wp u - e_2} \\
\wp(u+\omega') &= e_3 + \frac{(e_3-e_1)\,(e_3-e_2)}{\wp u - e_3}
\end{aligned}
\right. \text{ (1)}.
$$

§. 107.

Espressione di ogni funzione ellittica in funzione razionale di $\wp u$, $\wp' u$.

Trovate nel §. precedente le formole d'addizione per la $\wp u$, facilmente ne deduciamo quelle per le successive derivate, osservando che si ha

$$
\begin{aligned}
\wp'^2 u &= 4\,\wp^3 u - g_2\,\wp u - g_3 \\
\wp'' u &= 6\,\wp^2 u - \frac{1}{2}\,g_2 \\
\wp''' u &= 12\,\wp u\,\wp' u \\
\wp^{\text{IV}} u &= 12\left(10\,\wp^3 u - \frac{3}{2}\,g_2\,\wp u - g_3\right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}
$$

e in generale che ogni derivata d'ordine pari è un polinomio razionale intero in $\wp u$, mentre ogni derivata d'ordine impari è il prodotto di $\wp' u$

---

(1) Queste formole si possono anche stabilire direttamente così. Le funzioni ellittiche

$$\wp(u+\omega) - \wp\omega\ ,\quad \wp(u+\omega+\omega') - \wp(\omega+\omega')\ ,\quad \wp(u+\omega') - \wp\omega'$$

hanno rispettivamente per infinitesimi ed infiniti gli infiniti ed infinitesimi delle differenze

$$\wp u - \wp\omega\ ,\quad \wp u - \wp(\omega+\omega')\ ,\quad \wp u - \wp\omega'\ ,$$

dalle cui inverse differiscono quindi solo per fattori costanti. Questi si determinano subito facendo successivamente, nelle tre formole

$$u = \omega'\ ,\quad u = \omega\ ,\quad u = \omega.$$

per un tale polinomio [1]. Ne segue che in generale

$$\wp^{(n)}(u+v)$$

si esprime razionalmente per

$$\wp u \ , \ \wp v \ , \ \wp' u \ , \ \wp' v \, .$$

Ciò posto, riprendiamo la formola generale (I) §. 195, che dà la decomposizione di una qualsiasi funzione ellittica $f(u)$ in elementi semplici e modifichiamo il secondo membro, servendoci del teorema d'addizione. Abbiamo in primo luogo

$$\zeta(u-\beta) = \zeta u - \zeta\beta + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u + \wp'\beta}{\wp u - \wp\beta}$$

onde, a causa di $\Sigma A_0 = 0$

$$C + \sum A_0\,\zeta(u-\beta) = C' + \frac{1}{2}\sum A_0\,\frac{\wp' u + \wp'\beta}{\wp u - \wp\beta}\,.$$

La (I) può quindi scriversi anche così

$$\text{(VIII)} \qquad f(u) = C' + \frac{1}{2}\sum A_0\,\frac{\wp' u + \wp'\beta}{\wp u - \wp\beta} +$$

$$+ \sum\left\{ A_1\,\wp(u-\beta) - \frac{A_2}{2}\,\wp'(u-\beta) + \ldots + \frac{(-1)^n A_{n-1}}{\pi(n-1)}\,\wp^{(n-2)}(u-\beta)\right\}.$$

Però è da osservarsi che se uno dei poli della $f(u)$ fosse in $\beta = 0$, il corrispondente termine nella prima somma del secondo membro deve essere tralasciato. Se nessun polo di $f(u)$ è in $u = 0$, il termine apparente d'infinito in $u = 0$ nella (VIII) sparisce in effetto, a causa di $\Sigma A_0 = 0$.

Ora è evidente che nella (VIII) possiamo, colle formole d'addizione, cangiare anche gli altri termini della somma in altrettante funzioni razionali di $\wp u$, $\wp' u$. Perveniamo così all'importante teorema:

---

[1] Supposto infatti verificata la legge fino alle derivate

$$\wp^{(2n-2)} u \ , \ \wp^{(2n-1)} u \, ,$$

facilmente si vede che vale per le successive

$$\wp^{(2n)} u \ , \ \wp^{(2n+1)} u \, .$$

Qualunque funzione ellittica coi periodi 2ω, $2\omega'$ *è esprimibile razionalmente per la* $\wp u$, $\wp' u$ *costruite coi medesimi periodi.*

La funzione $\wp u$ e la sua derivata $\wp' u$ sono dunque le funzioni elementari ellittiche, colle quali si possono comporre razionalmente tutte le altre.

Osserviamo poi che, siccome il quadrato di $\wp'$ è esprimibile razionalmente per la $\wp$, potremo porre ogni funzione ellittica $f(u)$ sotto la forma

$$f(u) = \mathrm{A}(\wp u) + \wp' u\, \mathrm{B}(\wp u),$$

essendo A, B funzioni razionali di $\wp u$. Così ogni funzione ellittica $f(u)$ risulta decomposta in due parti l'una pari, l'altra dispari. Mancherà la seconda parte se $f(u)$ è pari, la prima se $f(u)$ è dispari.

Segue inoltre che: *per ogni funzione ellittica* $f(u)$ *si avrà un teorema d'addizione e cioè fra*

$$f(u)\ ,\ f(v)\ ,\ f(u+v)$$

sussisterà, qualunque siano gli argomenti u, v *una relazione algebrica*

$$\mathrm{G}(f(u)\ ,\ f(v)\ ,\ f(u+v)) = 0\,, \tag{3}$$

dove G *è un polinomio razionale intero nei suoi tre argomenti.*

E infatti, se dalle formole

$$\begin{cases} f(u) = \mathrm{A}(\wp u) + \wp' u\ \mathrm{B}(\wp u) \\ f(v) = \mathrm{A}(\wp v) + \wp' v\ \mathrm{B}(\wp v) \\ f(u+v) = \mathrm{A}(\wp(u+v)) + \wp'(u+v)\ \mathrm{B}(\wp(u+v))\,, \end{cases}$$

mediante le formole d'addizione e le formole

$$\wp'^2 u = 4\,\wp^3 u - g_2\,\wp u - g_3$$
$$\wp'^2 v = 4\,\wp^3 v - g_2\,\wp v - g_3\,,$$

eliminiamo $\wp u$, $\wp' u$, $\wp v$, $\wp' v$, otterremo appunto fra $f(u)$, $f(v)$, $f(u+v)$ una relazione della forma (3).

Se consideriamo due funzioni ellittiche $f(u)$ $f_1(u)$ coi medesimi periodi, avremo

$$f(u) = \mathrm{A}(\wp u) + \wp' u\ \mathrm{B}(\wp u)$$
$$f_1(u) = \mathrm{A}_1(\wp u) + \wp' u\ \mathrm{B}_1(\wp u)$$

e fra queste due e la

$$\wp'^2 u = 4\,\wp^3 u - g_2\,\wp u - g_3\,,$$

eliminando $\wp u$, $\wp' u$, ne segue una relazione algebrica fra $f(u)$, $f_1(u)$. Abbiamo dunque il teorema: *Due funzioni ellittiche coi medesimi periodi sono sempre legate da un'equazione algebrica.*

§. 108.

Nuovo modo di stabilire i risultati dei due §§. precedenti.

I risultati stabiliti nei due §§. precedenti sono d'importanza così fondamentale per la teoria delle funzioni ellittiche che sarà bene darne una seconda dimostrazione. Cominciamo per ciò dallo stabilire in altro modo semplicissimo la formola (V) d'addizione, della quale tutte le altre sono conseguenze.

Indichiamo con u_1, u_2 due valori fissi dell'argomento, che non siano però multipli di periodi, nè congrui fra loro, e supponiamo di più che *non* sia

$$u_1 + u_2 \equiv 0\,.$$

Il determinante

$$\psi(u) = \begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u \\ 1 & \wp u_1 & \wp' u_1 \\ 1 & \wp u_2 & \wp' u_2 \end{vmatrix}$$

è una funzione ellittica del 3.° ordine con un polo del 3.° ordine in $u=0$ ed avrà quindi tre infinitesimi non equivalenti, due dei quali sono evidentemente in $u=u_1$, $u=u_2$ e il terzo u_0 sarà quindi in

$$u_0 \equiv -(u_1+u_2)\,.$$

Avremo dunque l'identità

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1+u_2) & -\wp'(u_1+u_2) \\ 1 & \wp u_1 & \wp' u_1 \\ 1 & \wp u_2 & \wp' u_2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

formola che contiene appunto l'indicato teorema d'addizione. Sviluppando abbiamo

$$\wp u_1 \wp' u_2 - \wp u_2 \wp' u_1 + \wp (u_1+u_2) (\wp' u_1 - \wp' u_2) = \wp' (u_1+u_2) (\wp u_2 - \wp u_1)$$

ed elevando al quadrato col porre $\wp (u_1 + u_2) = x$, otterremo

$$(4) \quad (4 x^3 - g_2 x - g_3) (\wp u_1 - \wp u_2)^2 - \{(\wp' u_1 - \wp' u_2) x + \wp u_1 \wp' u_2 - \wp u_2 \wp' u_1\}^2 = 0 .$$

Le radici di questa equazione del 3.° grado sono, oltre $x = \wp (u_1 + u_2)$, le $x = \wp u_1$, $x = \wp u_2$, giacchè il determinante $\psi (u)$ si annulla per $u = u_1$, $u = u_2$. Il primo membro della (4) sarà dunque identicamente eguale al prodotto

$$4 (\wp u_1 - \wp u_2)^2 (x - \wp (u_1+u_2)) (x - \wp u_1) (x - \wp u_2)$$

e, se paragoniamo i coefficienti di x^2, troviamo precisamente la formola (V)

$$\wp (u_1+u_2) + \wp u_1 + \wp u_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2} \right)^2 .$$

Dimostriamo ora nuovamente il teorema che: *Ogni funzione ellittica coi periodi* 2ω, $2\omega'$ *è una funzione razionale di* $\wp u$, $\wp' u$.

Per questo cominciamo dall'osservare che dalla formola fondamentale (I) pag. 282 risulta subito il teorema: *Ogni funzione ellittica d'ordine* n, *che diventa infinita solo nell'origine (e nei punti equivalenti), è una funzione lineare intera di*

$$\wp u \ , \ \wp' u \ , \ \wp'' u \ldots \wp^{(n-2)} u$$

e quindi esprimibile sotto la forma

$$f (u) = \alpha (\wp u) + \wp' u \, \beta (\wp u) ,$$

dove α, β *sono polinomii razionali interi in* $\wp u$.

Ora è ben facile vedere che qualsiasi funzione ellittica $\psi (u)$ è sempre il quoziente di due tali funzioni speciali $f_1 (u)$, $f (u)$.

Siano infatti $a_1, a_2 \ldots a_n$ gli infinitesimi (non equivalenti) di $\psi (u)$ e $b_1, b_2 \ldots b_n$ i poli; avremo $\Sigma a \equiv \Sigma b$. Supposto dapprima che sia $\Sigma b \equiv 0$, potremo costruire una funzione ellittica d'ordine n, sia $f (u)$, che diventi infinitesima in $b_1, b_2 \ldots b_n$ ed infinita (d'ordine n) nell'origine, onde il prodotto $f (u) \, . \, \psi (u)$ diventerà infinito solo nei vertici della rete e sarà per-

ciò una funzione $f_1(u)$ della specie voluta, c. d. d. Se poi $\Sigma b \not\equiv 0$, prendasi $b_{n+1} \equiv -\Sigma b$ e si costruisca la $f(u)$ d'ordine $n+1$ cogli infinitesimi $b_1, b_2 \ldots b_n, b_{n+1}$ e un infinito d'ordine $n+1$ nell'origine e si proceda come sopra.

§. 109.

Funzioni uniformi che ammettono un teorema d'addizione.

Le funzioni ellittiche sono, come abbiamo dimostrato, funzioni uniformi che ammettono un teorema d'addizione.

Queste proprietà caratterizzano perfettamente le funzioni ellittiche e due altre classi di funzioni, che possono del resto riguardarsi come casi limiti delle ellittiche. Sussiste infatti il seguente teorema, dovuto a Weierstrass:

Se una funzione $f(u)$, uniforme in tutto il piano complesso, possiede un teorema d'addizione, in guisa che, essendo u, v due valori qualunque dell'argomento, fra $f(u)$, $f(v)$, $f(u+v)$ abbia luogo l'equazione algebrica

$$(a) \qquad G(f(u), f(v), f(u+v)) = 0,$$

la $f(u)$ potrà presentare i tre casi seguenti: 1.° la $f(u)$ è una funzione razionale di u, 2.° la $f(u)$ è una funzione razionale dell'esponenziale $e^{\alpha u}$ (α costante), 3.° $f(u)$ è una funzione ellittica e quindi razionale nelle due funzioni elementari $\wp u$, $\wp' u$ [1].

Questo importante teorema è per Weierstrass il punto di partenza per la sua trattazione della teoria delle funzioni ellittiche (Cf. Lezioni manoscritte).

Dimostreremo il teorema enunciato seguendo il metodo di Phragmèn (l. c. in nota). In primo luogo se la $f(u)$, uniforme in tutto il piano complesso, non ha alcuna singolarità essenziale sarà una funzione razionale di u (Cap. VI §. 61). Che inversamente ogni funzione razionale di u possegga un teorema d'addizione è subito evidente.

Abbia ora la $f(u)$ almeno una singolarità essenziale; dimostreremo allora in primo luogo che la $f(u)$ dovrà essere almeno una volta perio-

---

[1] Per le generali funzioni analitiche sussiste un teorema analogo, sostituendo alla qualifica di funzione *razionale* quella di funzione *algebrica* (vedi la dimostrazione di Phragmèn. *Acta Mathematica,* Bd. 7, pag. 33).

dica e per ciò partiremo dal fatto che, essendo N un numero intero grande quanto si voglia, vi sarà qualche valore che la $f(u)$ riprenderà N volte o più. Utilizzando un teorema di Picard, enunciato al Cap. VI §. 60, la cosa riesce di immediata evidenza; ma possiamo facilmente dimostrare il nostro lemma riferendoci soltanto ai risultati di Weierstrass, relativi alle singolarità essenziali, dimostrati al citato §. 60. Sia b un valore preso da $f(u)$ un certo numero m di volte in m punti regolari

$$u_1 \, , \; u_2 \ldots u_m .$$

Se consideriamo m intorni sufficientemente piccoli di $u_1, u_2, \ldots u_m$, sappiamo che $f(u)$ prenderà in questi intorni *tutti* i valori sufficientemente prossimi a b.

D'altronde, in vicinanza di una singolarità essenziale, la $f(u)$ prende *dei* valori prossimi a b più di qualunque quantità assegnabile. Se ne conclude che esisterà qualche valore c prossimo a b, che $f(u)$ riprenderà almeno $m+1$ volte, e cioè una volta nell'intorno di ciascun punto $u_1, u_2 \ldots u_m$ ed una volta nell'intorno della singolarità essenziale. Partendo ora da c troveremo almeno un valore d, che $f(u)$ dovrà riprendere almeno $m+2$ volte e così di seguito.

Ciò premesso, supponiamo che, nella supposta formola d'addizione

$$(a) \qquad G(f(u) \, , \; f(v) \, , \; f(u+v)) = 0 \, ,$$

la funzione razionale intera G sia di grado m in $f(u+v)$ e sia b un valore che $f(u)$ riprenda almeno $m+1$ volte nei punti distinti

$$v_1 \, , \; v_2 \ldots v_{m+1} .$$

L'equazione

$$G(f(u) \, , \; b \, , \; x) = 0$$

ammetterà le $m+1$ radici in x

$$f(u+v_1) \, , \; f(u+v_2) \ldots f(u+v_{m+1})$$

e fra queste ve ne saranno quindi almeno due eguali, p. e. sarà *con qualunque* u:

$$f(u+v_1) = f(u+v_2) \, ,$$

od anche

$$f(u+v_1-v_2) = f(u) \, ,$$

ossia, posto $v_1 - v_2 = 2\omega$:

$$f(u+2\omega) = f(u).$$

Dunque intanto: *la $f(u)$ è almeno una volta periodica.* Supponiamo dapprima che sia semplicemente periodica e sia 2ω il periodo di modulo minimo, del quale adunque tutti gli altri saranno multipli. Se poniamo

$$z = e^{\frac{\pi i u}{\omega}},$$

e consideriamo $f(u)$ come funzione di z

$$f(u) = \varphi(z),$$

sarà $\varphi(z)$ funzione uniforme di z, poichè, per ogni cammino chiuso descritto da z,

$$u = \frac{\omega}{\pi i} \log z$$

aumenta di un multiplo di 2ω ed $f(u)$ si riproduce. Ora se $\varphi(z)$ non ha, rispetto a z, alcuna singolarità essenziale sarà una funzione razionale di z, diciamo $R(z)$, quindi

$$f(u) = R\left(e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right).$$

Che viceversa ogni funzione razionale dell'esponenziale possegga un teorema d'addizione è subito evidente.

Se poi $\varphi(z)$ possiede qualche singolarità essenziale, dovrà, per quanto si è visto sopra, riprendere il medesimo valore per $m+1$ valori distinti di z e quindi per $m+1$ valori di u incongrui rispetto al periodo 2ω. La $f(u)$ ammetterà dunque un secondo periodo distinto.

Resta in fine che consideriamo il caso in cui la $f(u)$ possegga due periodi distinti 2ω, $2\omega'$ (in rapporto necessariamente complesso) e possiamo supporre 2ω, $2\omega'$ già scelti in guisa che ogni altro periodo, non indipendente da questi, sia un loro aggregato lineare omogeneo a coefficienti interi. Se proviamo che $f(u)$ non può avere singolarità essenziali a distanza finita, sarà provato che è una funzione ellittica, quindi razionale in $\wp u$, $\wp' u$. Ora, se vi fosse nel parallelogrammo $(2\omega, 2\omega')$ una singolarità essenziale, dalla formola supposta d'addizione seguirebbe,

come sopra, che per due certi punti v_1, v_2 situati nel parallelogrammo dei periodi $(2\omega, 2\omega')$ si avrebbe per qualunque valore dell'argomento u

$$f(u+v_1) = f(u+v_2)$$

e però $v_1 - v_2$ sarebbe un *nuovo* periodo, indipendente da 2ω, $2\omega'$, ciò che è impossibile (§. 98). Così l'enunciato teorema di Weierstrass è completamente dimostrato.

§. 110.

Formole di moltiplicazione dell'argomento per la $\wp u$.

Passiamo ora a studiare le *formole di moltiplicazione* dell'argomento per la $\wp u$. Essendo n un numero intero qualunque, la funzione $\wp(nu)$ è evidentemente una funzione ellittica coi periodi 2ω, $2\omega'$ ed è una funzione pari, come la $\wp u$, onde avremo (§. 95): *La $\wp(nu)$, per qualunque valore del numero intero n, è una funzione razionale di $\wp u$.* Si tratta ora di studiare più da vicino la composizione di questa funzione razionale $F(\wp u)$. Ricorriamo per ciò alle formole di addizione (§. 106) e dalla (IV) deduciamo

$$\wp(u+v) + \wp(u-v) = \frac{2(\wp u\, \wp v - \frac{1}{4} g_2)(\wp u + \wp v) - g_3}{(\wp u - \wp v)^2}.$$

Se cangiamo in questa u in $(n-1)u$ e v in u, otteniamo la formola ricorrente:

$$(5) \quad \wp(nu) + \wp((n-1)u) = \frac{2[\wp((n-1)u)\, \wp u - \frac{1}{4} g_2](\wp(n-1)u + \wp u) - g_3}{(\wp(n-1)u - \wp u)^2},$$

mediante la quale, facendovi successivamente

$$n = 3, 4, 5, \ldots,$$

si calcoleranno successivamente

$$\wp(3u), \quad \wp(4u), \quad \wp(5u) \ldots$$

in funzione razionale di $\wp u$, $\wp(2u)$. Se poi nella formola (V) pag. 285:

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 - \wp u - \wp v,$$

poniamo $u = v$, osservando che, al limite per $u = v$,

$$\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}$$

diventa

$$\frac{\wp'' u}{\wp' u} = \frac{6\,\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2}{\wp' u},$$

otteniamo

$$\wp(2u) = \frac{(6\,\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2)^2}{4\,\wp'^2 u} - 2\,\wp u.$$

È utile dare a questa formola l'altra forma

$$\wp(2u) - \wp u = \frac{-3\,\wp^4 u + \frac{3}{2} g_2 \wp^2 u + 3\, g_3 \wp u + \frac{1}{16} g_2^2}{\wp'^2 u}. \tag{6}$$

Dalle (5), (6) risulta che: *nella funzione razionale* $F(\wp u) = \wp(nu)$ *il numeratore ed il denominatore sono polinomii a coefficienti interi nelle quantità* g_3, $\frac{1}{4} g_2$.

§. 111.

La funzione $\psi_n(u) = \dfrac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2} u}$.

Il calcolo successivo di $\wp(2u)$, $\wp(3u)$, $\wp(4u)\ldots$ dalla formola ricorrente (5) riuscirebbe molto complicato. Si ottiene una notevole semplificazione del processo introducendo una funzione ellittica ausiliaria $\psi_n(u)$, che definiamo ponendo:

$$\psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2} u}. \tag{6*}$$

Le formole fondamentali per la σu (§. 97) dimostrano subito che la $\psi_n(u)$ è effettivamente una funzione ellittica coi periodi 2ω, $2\omega'$. Essa diventa infinita d'ordine $n^2 - 1$ in $u = 0$; i suoi $n^2 - 1$ infinitesimi nel parallelogrammo dei periodi sono nei punti

$$\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n},$$

dove r, s percorrono tutti i valori $0, 1, 2 \ldots ; n-1$, *esclusa la combinazione* $(r, s) = (0, 0)$. Ne segue che, se si considera il prodotto

$$\prod_{r,s}{}' \left(\wp u - \wp \left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n} \right) \right),$$

ove r, s percorrono gli indicati valori, questa funzione avrà a comune con $\psi_n^2(u)$ periodi, infiniti ed infinitesimi e sarà quindi

$$(7) \qquad \psi_n^2(u) = C \prod_{r,s}{}' \left(\wp u - \wp \left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n} \right) \right).$$

Ora, se osserviamo che

$$\wp \left(\frac{2(n-r)\omega + 2(n-s)\omega'}{n} \right) = \wp \left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n} \right)$$

e che le coppie *opposte* (r, s) $(n-r, n-s)$ sono sempre distinte *se n è dispari*, vediamo che per n dispari il secondo membro della (7) è il quadrato perfetto di un polinomio in $\wp u$ e si ha per ciò

$$(8) \qquad \wp(nu) = C' \prod_{r,s}{}'' \left(\wp u - \wp \left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n} \right) \right), \text{ per } n \equiv 1 \pmod 2,$$

ove nel prodotto Π'' i numeri r, s percorrono $\frac{n^2-1}{2}$ coppie incongrue di valori (mod n) tali che colle opposte $(-r, -s)$ formino un sistema completo (mod n), con esclusione della coppia $(0, 0)$. Per queste $\frac{n^2-1}{2}$ coppie si potranno prendere p. e. le combinazioni seguenti

$$\begin{cases} r = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}, \text{ con } s = 0 \\ r = 0, 1, 2, \ldots n-1, \text{ con } s = 1, 2, 3 \ldots \frac{n-1}{2}. \end{cases}$$

Per determinare infine la costante C' in (8) si moltiplichi dall'una parte e dall'altra per u^{n^2-1} e si passi al limite per $u = 0$, osservando che

$$\lim_{u=0} (u^2 \wp u) = 1, \quad \lim_{u=0} \{u^{n^2-1} \psi_n(u)\} = n;$$

si avrà così la formola definitiva

$$(9) \qquad \psi_n(u) = n \prod_{r,s}'' \left(\wp u - \wp \left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n} \right) \right), \quad (n \equiv 1 \pmod 2).$$

Se n è pari, vi sono soltanto le tre coppie

$$\left(\frac{n}{2}, 0\right), \left(0, \frac{n}{2}\right), \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

che coincidono colle proprie opposte, e i corrispondenti fattori in (7) si riuniscono in

$$(\wp u - \wp\omega)(\wp u - \wp\omega')(\wp u - \wp(\omega+\omega')) = \frac{1}{4}\wp'^2 u,$$

mentre le residue $n^2 - 4$ coppie (r, s) si distribuiscono nuovamente due a due in coppie opposte; si avrà quindi

$$\psi_n(u) = C' \wp' u \prod_{r,s} \left(\wp u - \wp \left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n} \right) \right) \quad (n \equiv 0 \pmod 2),$$

ove nel prodotto Π le coppie r, s percorrono p. e. i valori seguenti:

$$\begin{cases} r = 1, 2, 3, \ldots \frac{n}{2} - 1, \text{ con } s = 0, s = \frac{n}{2} \\ r = 0, 1, 2, \ldots n - 1, \text{ con } s = 1, 2, 3 \ldots \frac{n}{2} - 1 \end{cases}$$

e determinando in fine la C' col solito processo avremo

$$(10) \qquad \psi_n(u) = -\frac{n}{2} \wp' u \prod_{r,s} \left(\wp u - \wp \frac{2r\omega + 2s\omega'}{n} \right), \quad (n \equiv 0 \pmod 2).$$

Per mezzo delle funzioni $\psi_n(u)$ possiamo esprimere le formole di moltiplicazione dell'argomento per la $\wp u$, partendo dalla formola (§. 102)

$$\wp(nu) - \wp u = -\frac{\sigma(n-1)u \,.\, \sigma(n+1)u}{\sigma^2(nu) \,.\, \sigma^2 u},$$

che scriviamo

$$\wp(nu) - \wp u = -\frac{\dfrac{\sigma(n-1)u}{\sigma^{(n-1)^2}u} \cdot \dfrac{\sigma(n+1)u}{\sigma^{(n+1)^2}u}}{\left(\dfrac{\sigma nu}{\sigma^{n^2}u}\right)^2}$$

od anche per la (6*)

$$\wp(nu) - \wp u = -\frac{\psi_{n-1}(u)\,\psi_{n+1}(u)}{\psi_n^2(u)}\,. \tag{11}$$

Si osserverà poi che, secondo le formole (9), (10): *La funzione* $\psi(u)$ *per* n *dispari è un polinomio di grado* $\frac{n^2-1}{2}$ *in* $\wp u$ *e per* n *pari è il prodotto di* $\wp' u$ *per un polinomio di grado* $\frac{n^2-4}{2}$ *in* $\wp u$.

§. 112.

Calcolo delle funzioni $\psi_n(u)$ per mezzo di formole ricorrenti.

La formola (11) riduce la costruzione delle formole di moltiplicazione dell'argomento della $\wp u$ al calcolo delle funzioni $\psi_n(u)$. Dalla (6*) abbiamo subito intanto

$$\psi_1(u) = 1$$

e dalla (10)

$$\psi_2(u) = -\wp' u\,.$$

Poi, dal confronto della (C) §. 110 colla formola

$$\wp(2u) - \wp u = -\frac{\psi_1\,\psi_3}{\psi_2^2}\,,$$

deduciamo

$$\psi_3(u) = -3\,\wp^4 u + \frac{3}{2}\,g_2\,\wp^2 u + 3\,g_3\,\wp u + \frac{1}{16}\,g_2^2\,.$$

Per calcolare anche $\psi_4(u)$, ricorriamo alla (5) pag. 294, facendovi $n = 3$, e ne deduciamo:

$$\wp(3u) + \wp u = \frac{(2\,\wp(2u)\,\wp u - \frac{1}{2}\,g_2)\,(\wp(2u) + \wp u) - g_3}{(\wp(2u) - \wp u)^2}\,;$$

sottraendo dai due membri $2\wp u$ e sostituendo per $\wp(2u)$ il suo valore $\wp u - \frac{\psi_3(u)}{\wp'^2 u}$, troviamo

$$\wp(3u) - \wp u = \frac{\wp'^2 u\,(\wp'^4 u - \psi_3(u)\,\wp'' u)}{\psi_3^2(u)}$$

e paragonando questa colla

$$\wp(3u) - \wp u = -\frac{\psi_2 \psi_4}{\psi_3^2},$$

che segue dalla (11), abbiamo in fine:

$$\psi_4(u) = \wp' u\,(\wp'^4 u - \psi_3 \wp'' u) =$$

$$= \wp' u \left\{ -2\wp^6 u + \frac{5}{2} g_2 \wp^4 u + 10 g_3 \wp^3 u + \frac{1}{2} g_2 g_3 \wp u + g_3^2 + \frac{1}{32} g_2^3 \right\}.$$

Calcolate così le prime funzioni ψ_n:

$$(12) \quad \psi_1 = 1\,,\ \psi_2 = -\wp' u\,,\ \psi_3 = -3\wp^4 u + \frac{3}{2} g_2 \wp^2 u + 3 g_3 \wp u + \frac{1}{16} g_2^2\,,$$

$$\psi_4 = \wp' u\,(\wp'^4 u - \psi_3 \wp'' u)\,,$$

possiamo calcolare le successive

$$\psi_5\,,\ \psi_6\,,\ \psi_7 \ldots.$$

per mezzo di due formole ricorrenti, che ora andiamo a stabilire.

Partiamo per ciò dall'equazione ai tre termini per la σu (§. 102):

$$\sigma(a-b)\,\sigma(a+b)\,\sigma(c-d)\,\sigma(c+d) + \sigma(a-c)\,\sigma(a+c)\,\sigma(d-b)\,\sigma(d+b) +$$
$$+ \sigma(a-d)\,\sigma(a+d)\,\sigma(b-c)\,\sigma(b+c) = 0$$

e facciamo in questa

$$a = mu\,,\quad b = nu\,,\quad c = u\,,\quad d = 0\,,$$

onde avremo

$$\sigma(m+n)u\,.\,\sigma(m-n)u\,.\,\sigma^2 u = \sigma(m-1)u\,.\,\sigma(m+1)u\,.\,\sigma^2 nu -$$
$$- \sigma(n-1)u\,.\,\sigma(n+1)u\,.\,\sigma^2 mu\,.$$

Dividendo per

$$\sigma^{2m^2+2n^2+2}u = \sigma^{(m+n)^2+(m-n)^2+2}u = \sigma^{(m-1)^2+(m+1)^2+2n^2} = \sigma^{(n-1)^2+(n+1)^2+2m^2},$$

otteniamo

$$(\alpha) \qquad \psi_{m+n}\,\psi_{m-n} = \psi_{m-1}\,\psi_{m+1}\,\psi_n^2 - \psi_{n-1}\,\psi_{n+1}\,\psi_m^2\,.$$

Se facciamo in questa $m = n + 1$ coll'osservare che $\psi_1(u) = 1$, abbiamo

$$\psi_{2n+1} = \psi_{n+2}\,\psi_n^3 - \psi_{n-1}\,\psi_{n+1}^3 . \tag{13}$$

Cangiando nella (α) n in $n - 1$ ed m in $n + 1$ e ricordando che $\psi_2 = -\wp' u$ risulterà

$$\psi_{2n} = \frac{\psi_n}{\wp' u}\,(\psi_{n-2}\,\psi_{n+1}^2 - \psi_{n+2}\,\psi_{n-1}^2) . \tag{13*}$$

Le (13), (13*) sono le formole ricorrenti richieste. La prima a partire da $n = 2$, e la seconda da $n = 3$, esprimono ψ_{2n+1}, ψ_{2n} per le ψ con indice inferiore e risolvono quindi la questione proposta.

§. 113.

Divisione dell'argomento nella $\wp u$.

Data $\wp u$, la $\wp(nu)$ si calcola razionalmente. Se supponiamo invece data $\wp(nu)$ e cerchiamo $\wp u$, dalla (11) abbiamo per determinare $\wp u$ l'equazione

$$\wp(nu) \,.\, \psi_n^2 - \wp u\,\psi_n^2 + \psi_{n-1}\,\psi_{n+1} = 0 . \tag{14}$$

Tenendo conto dei gradi in $\wp u$ di ψ_n, ψ_{n-1}, ψ_{n+1} si vede che in ogni caso questa equazione è del grado n^2 in $\wp u$, poichè il termine di questo più alto grado ha un coefficiente non nullo, come risulta subito dalle (9), (10). La (14) è irriducibile, perchè il polinomio ψ_n non ha fattori comuni nè con ψ_{n-1}, nè con ψ_{n+1}.

Cangiando nella (14) u in $\frac{u}{n}$ e ponendo

$$x = \wp u \;,\; y = \wp\left(\frac{u}{n}\right) ,$$

le ψ_n^2, $\psi_{n-1}\,\psi_{n+1}$ diventeranno polinomii in y; e per determinare y dato x, avremo l'equazione di grado n^2

$$x\,\psi_n^2 - y\,\psi_n^2 + \psi_{n-1}\,\psi_{n+1} = 0 , \tag{15}$$

che è *l'equazione per la divisione dell'argomento della $\wp u$.*

Dimostriamo ora l'importante teorema: *L'equazione* (15) *per la divisione dell'argomento è risolubile per radicali.*

Cominciamo per ciò dall'esprimere tutte le radici in y della (15), osservando che questa relazione fra $\wp u$, $\wp\left(\frac{u}{n}\right)$ sussiste qualunque sia u e per ciò anche mutando u in $u + 2r\omega + 2s\omega'$, con r, s interi qualunque. Con ciò $x = \wp u$ non muta; ma $y = \wp\left(\frac{u}{n}\right)$ si cangia in

$$\wp\left(\frac{u+2r\omega+2s\omega'}{n}\right);$$

e poichè si ha

$$\wp\left(\frac{u+2r\omega+2s\omega'}{n}\right) = \wp\left(\frac{u+2r_1\omega+2s_1\omega'}{n}\right)$$

solo quando sia

$$r \equiv r_1\ ,\quad s \equiv s_1 \pmod{n},$$

ciò che esprimiamo più brevemente scrivendo

$$(r, s) \equiv (r_1, s_1) \pmod{n},$$

così vediamo che: *Le n^2 radici della equazione* (15) *per la divisione dell'argomento sono date dalle espressioni*

$$y_{r,s} = \wp\left(\frac{u+2r\omega+2s\omega'}{n}\right),$$

percorrendo (r, s) un sistema completo di n^2 coppie incongrue (mod n).

Ora, per le formole d'addizione

$$y_{r,s} = \wp\left(\frac{u+2r\omega+2s\omega'}{n}\right)$$

si esprime razionalmente per

$$\wp\left(\frac{u}{n}\right),\ \wp'\left(\frac{u}{n}\right),\ \wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}\right),\ \wp'\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}\right)$$

e d'altronde per le formole di moltiplicazione

$$\wp u = \mathrm{F}\left(\wp\left(\frac{u}{n}\right)\right),$$

dove F è il simbolo di una funzione razionale, e quindi derivando si ha:

$$\wp'\left(\frac{u}{n}\right) = \wp' u \, \Phi\left(\wp\left(\frac{u}{n}\right)\right),$$

essendo Φ razionale. Vediamo quindi che se, oltre $x = \wp u$, consideriamo come nota anche $\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3} = \wp' u$, ogni radice $y_{r,s}$ della (15) è una funzione razionale della prima radice $y_{00} = \wp\left(\frac{u}{n}\right)$ i cui coefficienti, oltre g_2, g_3, contengono razionalmente i valori delle $\wp, \wp'$ per le parti aliquote dei periodi

$$\wp\left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n}\right), \quad \wp'\left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n}\right).$$

Ora, se si pone

$$y_{r,s} = \psi(y_{00}), \quad \text{cioè} \quad \wp\left(\frac{u + 2r\omega + 2s\omega'}{n}\right) = \psi\left(\wp\left(\frac{u}{n}\right)\right)$$

$$y_{r_1,s_1} = \psi_1(y_{00}), \quad \text{cioè} \quad \wp\left(\frac{u + 2r_1\omega + 2s_1\omega'}{n}\right) = \psi_1\left(\wp\left(\frac{u}{n}\right)\right),$$

essendo ψ, ψ_1 simboli di due funzioni razionali della specie indicata, e si osserva che queste relazioni sussistono *qualunque sia* u, cangiando nella prima u in $u + 2r_1\omega + 2s_1\omega'$ e nella seconda u in $u + 2r\omega + 2s\omega'$, ne dedurremo

$$\psi(\psi_1(y_{00})) = \psi_1(\psi(y_{00})).$$

Di più si vede che ove uno almeno dei due numeri r, s sia primo con n, il *periodo* della corrispondente operazione ψ è precisamente n e se ne conclude:

L'equazione (15) *per la divisione dell'argomento è un'equazione Abeliana composta di grado* n^2, *che si risolve coll'estrazione di due radicali d'indice* n.

A questo risultato possiamo pervenire anche direttamente ricercando il *gruppo di monodromia* (§. 81) della (15). Per ciò dobbiamo far percorrere ad $x = \wp u$, nel suo piano complesso, un cammino chiuso qualunque, cioè cangiare u in

$$\pm u + 2\mu\omega + 2\nu\omega' \quad (\mu, \nu \text{ interi})$$

ed esaminare la sostituzione indotta sulle radici

$$y_{r,s} = \wp\left(\frac{u+2r\omega+2s\omega'}{n}\right).$$

Si vede subito che la $y_{r,s}$ si porta per tale sostituzione nella $y_{r',s'}$, dove gli indici r', s' sono determinati dalle congruenze

$$(16) \qquad \begin{cases} r' \equiv \pm r + \mu \\ s' \equiv \pm s + \nu \end{cases} \pmod{n}.$$

Queste sostituzioni (16) formano appunto il gruppo di monodromia per la nostra equazione. Il gruppo (16) contiene evidentemente $2n^2$ sostituzioni e in esso è contenuto, come sottogruppo invariante d'indice 2, il gruppo

$$(16^*) \qquad \begin{cases} r' \equiv r + \mu \\ s' \equiv s + \nu \end{cases} \pmod{n},$$

corrispondente ai segni superiori. Il gruppo di monodromia (16) si abbassa a (16*) coll'aggiunta di un radicale quadratico, che si vede subito essere

$$\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3} = \wp' u,$$

giacchè le sostituzioni (16) corrispondenti ai segni inferiori lasciano bensì invariato $\wp u$, ma cangiano $\wp' u$ in $-\wp' u$.

Se consideriamo dunque come data anche $\wp' u$, il gruppo di monodromia è il gruppo (16) d'ordine n^2, generato dalle due sostituzioni elementari

$$(r', s') \equiv (r+1, s) \pmod{n}$$

$$(r', s') \equiv (r, s+1) \pmod{n}.$$

Anche di qui vediamo, come sopra, che l'equazione si risolve coll'estrazione di due radicali d'indice n.

Ma il primo metodo ha il vantaggio di farci riconoscere quali sono gli irrazionali numerici (rispetto agli invarianti g_2, g_3 supposti dati), la cui aggiunta fa scendere il gruppo algebrico al gruppo di monodromia. Sono questi i valori della $\wp, \wp'$ per le parti aliquote dei periodi.

§. 114.

Equazione per la divisione dei periodi.

Esaminiamo ora l'equazione da cui dipende la ricerca degli irrazionali

$$\wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}\right), \quad \wp'\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}\right).$$

Basterà che ci occupiamo di determinare $\wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}\right)$, perchè $\wp'\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}\right)$ si otterrà successivamente estraendo una radice quadrata. Osserviamo poi che, se n è un numero composto $n = q \cdot q'$, basta saper risolvere l'equazione proposta pei divisori q, q' dopo di che, per quanto si è visto al §. precedente, si otterrà $\wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{qq'}\right)$ con estrazione di radicali. *Ci possiamo dunque limitare al caso di n numero primo.*

Ora per $n = 2$ i corrispondenti valori

$$\wp\omega, \quad \wp\omega', \quad \wp(\omega+\omega')$$

sono le radici e_1, e_2, e_3 dell'equazione di 3° grado

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0.$$

Consideriamo dunque il caso di n numero primo dispari. Siccome

$$\wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}\right) = \wp\left(\frac{-2r\omega-2s\omega'}{n}\right),$$

basterà far percorrere a (r, s) $\frac{n^2-1}{2}$ coppie incongrue (mod n), tali che colle opposte $(-r, -s)$ formino un sistema completo (mod n) esclusa $(0, 0)$.

Questi $\frac{n^2-1}{2}$ valori $\wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}\right)$ sono le radici della equazione

$$\psi_n(y) = 0, \tag{17}$$

che è appunto di grado $\frac{n^2-1}{2}$, ed ha coefficienti razionali interi in $g_3, \frac{1}{4}g_2$ con coefficienti numerici interi. Per ciò *l'equazione* (17) $\psi_n(y) = 0$ *si dice l'equazione per la divisione dei periodi.*

Osserviamo ora che tutte le radici della (17) in cui $s=0$ si ordinano nella serie

$$\text{(A)} \qquad \wp\left(\frac{2\omega}{n}\right), \quad \wp\left(2\,.\,\frac{2\omega}{n}\right), \quad \wp\left(3\,.\,\frac{2\omega}{n}\right)\ldots\wp\left(\frac{n-1}{2}\,.\,\frac{2\omega}{n}\right)$$

e, per le formole di moltiplicazione dell'argomento, tutte le radici di questa serie sono funzioni razionali della prima $\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)$ con coefficienti razionali in g_2, g_3. Le rimanenti radici della (17) possono egualmente ordinarsi in serie, contenenti ciascuna $\frac{n-1}{2}$ radici, e dotate delle proprietà stesse della serie (A). E infatti, per $s \not\equiv 0 \pmod{n}$, possiamo determinare un numero ν dalla congruenza

$$s\nu \equiv r \pmod{n}$$

e scrivere

$$\wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}\right)=\wp\left(s\,\frac{2\nu\omega+2\omega'}{n}\right).$$

Tenendo fermo ν e ponendo

$$s=1\,,\,2\,,\ldots\frac{n-1}{2}\,,$$

abbiamo una nuova serie di radici

$$\text{(B)} \qquad \wp\left(\frac{2\nu\omega+2\omega'}{n}\right), \quad \wp\left(2\,.\,\frac{2\nu\omega+2\omega'}{n}\right)\ldots\wp\left(\frac{n-1}{2}\,.\,\frac{2\nu\omega+2\omega'}{n}\right),$$

dotata delle proprietà della serie (A). Ora se diamo successivamente a ν i valori

$$\nu=0\,,\,1\,,\,2\,,\ldots,n-1$$

le n serie (B), insieme colla serie (A), contengono una ed una sola volta tutte le radici della (17), come subito si vede.

Poniamo per semplicità

$$\tilde{\omega}_\nu=\frac{2\nu\omega+2\omega'}{n}$$

e introducendo l'indice ∞ per ν nel primo caso di $s=0$, poniamo altresì

$$\tilde{\omega}_\infty=\frac{2\omega}{n}\,;$$

le $\frac{n^2-1}{2}$ radici della (17) si ordineranno così nel quadro:

$$\left.\begin{array}{l}
\wp\,\tilde{\omega}_\infty\ ,\ \wp\,(2\,\tilde{\omega}_\infty)\ ,\ \wp\,(3\,\tilde{\omega}_\infty)\ \ldots\ \wp\left(\frac{n-1}{2}\,\tilde{\omega}_\infty\right)\\
\wp\,\tilde{\omega}_0\ ,\ \wp\,(2\,\tilde{\omega}_0)\ ,\ \wp\,(3\,\tilde{\omega}_0)\ \ldots\ \wp\left(\frac{n-1}{2}\,\tilde{\omega}_0\right)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\wp\,(\tilde{\omega}_{n-1})\ ,\ \wp\,(2\,\tilde{\omega}_{n-1})\ ,\ \wp\,(3\,\tilde{\omega}_{n-1})\ \ldots\ \wp\left(\frac{n-1}{2}\,\tilde{\omega}_{n-1}\right)
\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\tilde{\omega}_\infty = \frac{2\,\omega}{n}\\ \tilde{\omega}_\nu = \frac{2\,\nu\,\omega + 2\,\omega'}{n}\end{array}$$

contenente $n+1$ orizzontali di $\frac{n-1}{2}$ radici ciascuna. In ogni orizzontale possiamo poi ordinare in modo più conveniente le radici così. Sia g una radice primitiva (mod n), e con r_s si indichi il resto di g^s (mod n), o il suo complemento a n, secondo che il resto stesso è $\leq \frac{n-1}{2}$ ovvero $> \frac{n-1}{2}$; talchè i numeri $r_0, r_1, r_2 \ldots r_{\frac{n-1}{2}}$ saranno in altro ordine i numeri

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3 \ldots \frac{n-1}{2}\ ^{(1)}.$$

Se ordiniamo le radici della (17) nel nuovo quadro:

$$\text{(C)}\quad \left.\begin{array}{l}
\wp\,(\tilde{\omega}_\infty)\ ,\ \wp\,(g\,\tilde{\omega}_\infty)\ ,\ \wp\,(g^2\tilde{\omega}_\infty)\ \ldots\ \wp\left(g^{\frac{n-1}{2}-1}\,\tilde{\omega}_\infty\right)\\
\wp\,(\tilde{\omega}_0)\ ,\ \wp\,(g\,\tilde{\omega}_0)\ ,\ \wp\,(g^2\tilde{\omega}_0)\ \ldots\ \wp\left(g^{\frac{n-1}{2}-1}\,\tilde{\omega}_0\right)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\wp\,(\tilde{\omega}_{n-1})\ ,\ \wp\,(g\,\tilde{\omega}_{n-1})\ ,\ \wp\,(g^2\tilde{\omega}_{n-1})\ \ldots\ \wp\left(g^{\frac{n-1}{2}-1}\,\tilde{\omega}_{n-1}\right)
\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\tilde{\omega}_\infty = \frac{2\,\omega}{n}\\ \tilde{\omega}_\nu = \frac{2\,\nu\,\omega + 2\,\omega'}{n}\end{array}$$

vediamo che, per le formole di moltiplicazione si ha:

$$\wp\,(g\,u) = \Theta\,(\wp u)\,,$$

---

(1) E infatti da $g^s \equiv \pm g^{s_1}$ seguirebbe $g^{s-s_1} \equiv \pm 1$ quindi $s - s_1$ multiplo di $\frac{n-1}{2}$.

dove Θ è il simbolo di una funzione razionale con coefficienti razionali in g_2, g_3; si avrà quindi:

$$\wp(g\tilde{\omega}_\nu) = \Theta(\wp\tilde{\omega}_\nu) \ , \quad \wp(g^2\tilde{\omega}_\nu) = \Theta(\Theta(\wp\tilde{\omega}_\nu)) = \Theta^2(\wp\tilde{\omega}_\nu)\ldots$$

$$\wp\left(g^{\frac{n-1}{2}-1}\tilde{\omega}_\nu\right) = \Theta^{\frac{n-1}{2}-1}(\wp\tilde{\omega}_\nu),$$

indi

$$\wp\left(g^{\frac{n-1}{2}}\tilde{\omega}_\nu\right) = \wp(\tilde{\omega}_\nu) = \Theta^{\frac{n-1}{2}}(\wp\tilde{\omega}_\nu).$$

Dunque: *Le radici di una medesima orizzontale nel quadro* (C) *sono tutte funzioni razionali della prima e formano, così ordinate, un unico periodo.*

§. 115.

Risolventi di grado $n+1$ dell'equazione per la divisione dei periodi e loro gruppo.

Dal risultato precedente, pei teoremi generali della teoria delle equazioni secondo Galois, segue l'importante teorema: *L'equazione per la divisione dei periodi possiede nel caso di n primo (dispari) risolventi di grado $n+1$.*

Prendasi infatti una funzione razionale (intera) e simmetrica delle radici di una medesima orizzontale del quadro (C) e sia

$$z_\nu = \Phi\left(\wp\tilde{\omega}_\nu\,,\ \wp(g\tilde{\omega}_\nu)\ldots\wp\left(g^{\frac{n-1}{2}-1}\tilde{\omega}_\nu\right)\right) \qquad \nu = \infty, 0, 1, \ldots n-1.$$

Gli $n+1$ valori di z

$$z_\infty\ ,\ z_0\ ,\ z_2\ldots z_{n-1}$$

sono radici di una equazione risolvente di grado $n+1$ in z

$$\text{(18)} \qquad F_{n+1}(z) = 0\,,$$

con coefficienti razionali in g_2, g_3. Quando sia risoluta la risolvente (18), la proposta (17) si risolve con estrazioni di radicali d'indice $\frac{n-1}{2}$. Anzi

basta nel nostro caso l'estrazione di due tali radicali che ci diano $\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)$ $\wp\left(\frac{2\omega'}{n}\right)$, e dei due radicali quadratici che danno $\wp'\left(\frac{2\omega}{n}\right)$, $\wp'\left(\frac{2\omega'}{n}\right)$, le altre radici $\wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}\right)$ potendosi poi calcolare razionalmente mediante le formole d'addizione.

La risoluzione dell'equazione per la divisione dei periodi si riduce dunque in sostanza a quella della (18) e ad estrazioni di radicali. Resta dunque che esaminiamo la risolvente (18) e ne determiniamo il gruppo di Galois. La equazione (18) contiene razionalmente nei coefficienti le quantità g_2, g_3 che riguardiamo come parametri [1] e vogliamo innanzi tutto determinare il gruppo di monodromia della (18) rispetto a g_2, g_3. Per ciò dobbiamo far variare i periodi 2ω, $2\omega'$ per tali cammini che g_2, g_3 riprendano alla fine i medesimi valori ed esaminare la sostituzione indotta sulle radici

$$z_\infty \ , \ z_0 \ , \ z_1 \ldots z_{n-1} .$$

Dal §. 104 sappiamo che, a fine di riprodurre i medesimi valori di g_2, g_3, dobbiamo far subire ad ω, ω' la sostituzione lineare

$$\begin{pmatrix} \alpha\omega+\gamma\omega' & \beta\omega+\delta\omega' \\ \omega & \omega' \end{pmatrix}$$

a coefficienti interi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e a determinante $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Per tale sostituzione una radice qualunque della (17)

$$\wp(k\tilde{\omega}_\nu) = \wp\left(k\,\frac{2\nu\omega+2\omega'}{n}\right), \quad \text{per } \nu \text{ finito},$$

si trasporta nella radice

$$\wp\left(k\,\frac{2\nu(\alpha\omega+\gamma\omega')+2(\beta\omega+\delta\omega')}{n}\right) = \wp\left(k(\gamma\nu+\delta)\,\frac{2\nu'\omega+2\omega'}{n}\right),$$

posto

$$\nu' \equiv \frac{\alpha\nu+\beta}{\gamma\nu+\delta} \pmod{n}, \tag{19}$$

cioè in una radice $\wp(r\tilde{\omega}_{\nu'})$ e la medesima formola vale per $\nu=\infty$, giacchè

$$\wp(k\tilde{\omega}_\infty) = \wp\left(k\,\frac{2\omega}{n}\right)$$

---

[1] In ciò facciamo uso della proprietà, che si dimostrerà nel seguente Capitolo, che gli invarianti g_2, g_3 della $\wp$ possono darsi affatto arbitrariamente.

si trasporta in

$$\wp\left(k\gamma\,\frac{2\,\frac{\alpha}{\gamma}\,\omega+2\,\omega'}{n}\right)=\wp\left(r\,\frac{2\,\nu'\omega+2\,\omega'}{n}\right)$$

con $\nu'\equiv\frac{\alpha}{\gamma}$ (mod n). Tutte le radici di una orizzontale nel quadro (C) si trasportano dunque nelle radici di un'altra orizzontale, colla legge espressa dalla (19) e per ciò ogni radice z_ν della (18) si cangia nella radice $z_{\nu'}$ secondo la sostituzione lineare (19) sull'indice.

Ne concludiamo: *Il gruppo di monodromia della equazione* (18) *è il gruppo di* $\frac{n(n^2-1)}{2}$ *sostituzioni, rappresentato analiticamente dalla formola*

$$\nu'\equiv\frac{\alpha\nu+\beta}{\gamma\nu+\delta}\quad(\text{mod } n)\,,\quad \alpha\delta-\beta\gamma\equiv 1\,. \tag{19}$$

Si sa che questo gruppo (gruppo semimodulare) è *semplice* appena $n>3$ e per ciò l'equazione (18) non è ulteriormente riducibile ad equazioni più semplici; in particolare *essa non è risolubile per radicali.*

Il gruppo algebrico dell'equazione (18), dovendo contenere come sotto gruppo invariante il gruppo semimodulare (19), non può essere che il gruppo stesso o il gruppo totale lineare di $n(n^2-1)$ sostituzioni

$$\nu'\equiv\frac{\alpha\nu+\beta}{\gamma\nu+\delta}\,,\quad \alpha\delta-\beta\gamma\not\equiv 0\quad(\text{mod } n)\,.$$

Ritornando più tardi, nella teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche, su queste risolventi di grado $n+1$ dell'equazione per la divisione dei periodi, vedremo che è quest'ultimo caso che si presenta e l'irrazionalità numerica che si deve aggiungere per ridurre il gruppo algebrico al gruppo di monodromia è precisamente la radice quadrata

$$\sqrt{(-1)^{\frac{n-n}{2}}\,.\,n}\,.$$

§. 116.

Risolubilità per radicali della equazione per la divisione dei periodi nelle funzioni lemniscatiche.

Ciò che abbiamo detto nel §. precedente, relativamente al gruppo di Galois dell'equazione per la divisione dei periodi suppone che gli inva-

rianti g_2, g_3 (o i periodi 2ω, $2\omega'$) abbiano valori arbitrarii. Ma per valori particolari dei periodi, o degli invarianti, può darsi benissimo che il gruppo si abbassi ad un suo sottogruppo fino anche ad ottenere un gruppo risolubile ed allora per queste speciali funzioni ellittiche l'equazione per la divisione dei periodi risulterà risolubile per radicali.

Un esempio semplice di una tale classe di funzioni ellittiche si ha nelle *funzioni lemniscatiche*. Portano questo nome le funzioni ellittiche nelle quali il rapporto dei periodi $\frac{\omega'}{\omega}$ è $= i$ [1]. Per la funzione lemniscatica $\wp(u \mid \omega, i\omega)$ ha luogo la formola di *moltiplicazione complessa*

$$\wp(iu) = -\wp u\,, \tag{20}$$

che si deduce come caso particolare dalla formola d'omogeneità (§. 104)

$$\wp(\lambda u \mid \lambda\omega, \lambda\omega') = \frac{1}{\lambda^2}\wp(u \mid \omega, \omega')\,,$$

ove si faccia

$$\omega' = i\omega\ ,\ \lambda = i\ ^{(2)}.$$

Confrontando nella (20) gli sviluppi di $\wp(iu)$, $\wp u$ nell'intorno dell'origine si vede subito che: *per la funzione lemniscatica $\wp u$ il secondo invariante g_3 è nullo.*

Dimostriamo ora che per la nostra speciale $\wp u$ sussiste una formola generale di moltiplicazione complessa

$$\wp(mu) = \mathrm{R}(\wp u)\,, \tag{21}$$

dove m è un numero qualunque intero complesso di Gauss, cioè della forma $a + bi$ (a, b interi reali) ed R è il simbolo di una funzione razionale con coefficienti razionali in g_2. Siccome la (21) è vera per $m = 1$ e per $m = i$, basterà provare che se sussiste per m, sussiste anche per

$$m + i^\varepsilon \quad (\varepsilon = 0, 1, 2, 3)\,.$$

---

[1] Il nome di lemniscatiche proviene da ciò che la rettificazione di un arco di lemniscata dipende appunto da funzioni di questa specie.

[2] La (20) si stabilisce anche subito osservando che le due funzioni ellit- $\wp(iu)$, $-\wp u$ hanno a comune periodi ed infiniti coi termini d'infinito.

Ora per la formola d'addizione (IV) pag. 284, essendo $g_3 = 0$, si ha

$$\wp((m+i^\varepsilon)u) = \frac{2\{\wp(mu)\,\wp(i^\varepsilon u) - \frac{1}{4}g_2\}\,.\,\{\wp(mu) + \wp(i^\varepsilon u)\} - \wp'(mu)\,\wp'(i^\varepsilon u)}{2\{\wp(mu) - \wp(i^\varepsilon u)\}^2}\,.$$

Ma per la (20) si ha

$$\wp(i^\varepsilon u) = (-1)^\varepsilon\,\wp u\ ,\quad \wp'(i^\varepsilon u) = i^\varepsilon\,\wp' u$$

e dalla (21) derivando si ottiene

$$\wp'(mu) = \frac{1}{m}\,\mathrm{R}'(\wp u)\,.\,\wp' u\,,$$

onde

$$\wp'(mu)\,\wp'(i^\varepsilon u) = \mathrm{R}_1(\wp u)$$

e ne risulta la proprietà asserita.

Ciò premesso, se ritorniamo per la $\wp u$ lemniscatica alla equazione (18) per la divisione dei periodi, vediamo che qualunque sua radice

$$\wp\left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n}\right) = \wp\left((r+is)\,\frac{2\omega}{n}\right)$$

è una funzione razionale della prima $\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)$ e poichè, ponendo

$$\wp\left((r+is)\,\frac{2\omega}{n}\right) = \psi\left(\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)\right)$$

$$\wp\left((r_1+is_1)\,\frac{2\omega}{n}\right) = \psi_1\left(\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)\right),$$

si vede subito che si ha

$$\wp\left((r+is)\,(r_1+is_1)\,\frac{2\omega}{n}\right) = \psi\left(\psi_1\left(\frac{2\omega}{n}\right)\right) = \psi_1\left(\psi\left(\frac{2\omega}{n}\right)\right),$$

ne concludiamo che l'equazione per la divisione dei periodi è nel caso attuale un'equazione Abeliana ed è quindi risolubile per radicali.

Le funzioni lemniscatiche non sono del resto che un caso particolare di una intera classe di funzioni ellittiche, considerate da Abel, che ammettono formole di moltiplicazione complessa, e per le quali l'equazione per la divisione dei periodi è risolubile per radicali, come si vedrà nei due ultimi capitoli.

Capitolo XI.

Proprietà fondamentali della prima funzione modulare $J(\tau)$ (invariante assoluto). — La funzione $\wp(u; g_2, g_3)$ con assegnati invarianti. — Integrali ellittici di prima specie e loro inversione. — Integrali ellittici generali.

§. 117.

L'invariante assoluto $J = \dfrac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}$, considerato come funzione del rapporto $\tau = \dfrac{\omega'}{\omega}$ dei periodi.

Nel presente capitolo cominciamo dal trattare la quistione, già posta al §. 194: *Possono gli invarianti g_2, g_3 di una funzione ellittica $\wp u$ assumere valori arbitrari?* La risolveremo affermativamente, per una via invero alquanto indiretta, ma che ha il vantaggio di procurarci la conoscenza della funzione fondamentale di una nuova ed importante classe di funzioni, *la classe delle funzioni modulari ellittiche.*

Cominciamo dal ricordare che, secondo le formole (XIII) pag. 277, gli invarianti g_2, g_3 si esprimono per i periodi 2ω, $2\omega'$ colle formole

$$g_2 = \frac{15}{4} \sum{}' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^4}\ , \quad g_3 = \frac{35}{16} \sum{}' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^6}$$

e sono per ciò funzioni omogenee di gradi -4, -6 rispettivamente di ω, ω'. È facile quindi formare delle espressioni razionali in g_2, g_3, che dipendano soltanto dal rapporto $\tau = \dfrac{\omega'}{\omega}$ dei periodi. Ricordiamo che

$$e_1 = \wp\omega\ , \quad e_2 = \wp(\omega + \omega^7)\ , \quad e_3 = \wp\omega'$$

sono le radici della equazione di 3.° grado

$$4\, e^3 - g_2\, e - g_3 = 0\,.$$

Indicando con $\dfrac{\Delta}{16}$ il discriminante

$$(e_1 - e_2)^2\, (e_2 - e_3)^2\, (e_3 - e_1)^2$$

di questa equazione, avremo

$$\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2 .$$

Ora poniamo

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}$$

e J sarà funzione omogenea di grado zero in ω, ω', cioè dipenderà soltanto dal rapporto $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ dei periodi. Questa espressione J dicesi l'*invariante assoluto* e primo oggetto della nostra ricerca sarà di provare che J *è funzione uniforme della variabile complessa* τ, *nel semipiano positivo* τ.

Consideriamo nel piano complesso τ un campo finito qualunque C che rimanga, anche col suo contorno, tutto nell'interno del semipiano positivo. Le due serie

$$(1) \qquad \begin{cases} G_2 = g_2\, \omega^4 = \dfrac{15}{4} \sum' \dfrac{1}{(m+n\tau)^4} \\[2ex] G_3 = g_3\, \omega^6 = \dfrac{35}{16} \sum' \dfrac{1}{(m+n\tau)^6} \end{cases}$$

convergono in egual grado, come ora dimostreremo, in tutto il campo C e rappresentano per ciò, in tutto C, delle funzioni finite, continue e monodrome di τ. Osserviamo intanto che, restando $\tau = \alpha + i\beta$ in C, l'ordinata β si mantiene superiore ad una quantità fissa positiva β_0 e perciò

$$|m+n\tau| = \sqrt{(m+n\alpha)^2 + n^2\beta^2}$$

si mantiene superiore o eguale alla più piccola d delle due quantità

$$\beta_0 \ , \ 1 \ .$$

Per la medesima ragione la distanza δ fra due punti $m+n\tau$, $m'+n'\tau$:

$$\delta = \sqrt{\{(m-m')+(n-n')\,\alpha\}^2 + (n-n')^2\,\beta^2}$$

non scende, essa stessa, al disotto di d.

Fissato quindi un numero positivo $k < d$, se, procedendo come al §. 69 (Cap. VI), dividiamo il piano in una rete di quadrati con lato $= \frac{k}{\sqrt{2}}$, potremo paragonare i moduli dei termini delle nostre serie con

quelli delle due serie seguenti, indipendenti da τ, ed assolutamente convergenti

$$\sum_{r,s}' \frac{1}{(r^2+s^2)^2 \frac{k^4}{2^2}}, \quad \sum_{r,s}' \frac{1}{(r^2+s^2)^3 \frac{k^6}{2^3}},$$

onde risulta subito la convergenza in egual grado in tutto C delle serie (1).

Ne segue che la formola

$$\text{(I)} \qquad J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}$$

ci definisce una funzione della variabile complessa τ, continua e monodroma in tutto il semipiano positivo, l'asse reale escluso. Facilmente vediamo inoltre che $J(\tau)$ è anche sempre *finita* a qualunque distanza finita, escluso sempre l'asse reale. E infatti, se $\tau = \alpha + i\beta$ è finito e $\beta > 0$, non può essere nullo il denominatore

$$g_2^3 - 27\, g_3^2 = 16\,(\wp\omega - \wp\omega')^2\,(\wp\omega - \wp(\omega+\omega'))^2\,(\wp\omega' - \wp(\omega+\omega'))^2,$$

giacchè le funzioni ellittiche di secondo ordine

$$\wp u - \wp\omega\ , \quad \wp u - \wp\omega'\ , \quad \wp u - \wp(\omega+\omega')$$

hanno già infinitesimi di 2.° ordine in

$$u = \omega\ , \quad u = \omega'\ , \quad u = \omega+\omega'$$

rispettivamente e non possono quindi annullarsi in punti non equivalenti a questi.

Facciamo ancora l'osservazione, che ci tornerà utile fra breve: *L'invariante assoluto* $J(\tau)$ *in due punti*

$$\tau = \alpha + i\beta\ , \quad \tau = -\alpha + i\beta,$$

simmetrici rispetto all'asse immaginario, assume valori coniugati. Ciò accade infatti, come subito si vede, delle due serie

$$\sum' \frac{1}{(m+n\tau)^4}\ , \quad \sum' \frac{1}{(m+n\tau)^6}\ .$$

§. 118.

L'invariante $J(\tau)$ come funzione automorfa rispetto al gruppo modulare.

La funzione $J(\tau)$ è regolare, come si è visto, in tutto il semipiano positivo, l'asse reale escluso. Stabiliamo ora la proprietà fondamentale di questa funzione, ricercando quando accadrà che in due punti τ, τ' del semipiano positivo $J(\tau)$ riprenda il medesimo valore, cioè si abbia

$$J(\tau) = J(\tau').$$

Consideriamo per ciò le due funzioni $\wp$:

$$\wp(u \mid 1, \tau), \quad \wp(u \mid 1, \tau'),$$

coi rispettivi rapporti dei periodi τ, τ', e indichiamone gli invarianti rispettivamente con

$$g_2, g_3 \; ; \; g'_2, g'_3.$$

Si ha per ipotesi

$$\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2} = \frac{g'^3_2}{g'^3_2 - 27\, g'^2_3},$$

ossia indicando con λ un fattore di proporzionalità

$$g_2^3 = \lambda\, g'^3_2, \quad g_3^2 = \lambda\, g'^2_3.$$

Se con μ indichiamo un conveniente valore di $\sqrt[6]{\lambda}$, potremo scrivere

$$g_2 = \mu^2 g'_2, \quad g_3 = \mu^3 g'_3.$$

Costruiamo ora una terza funzione ellittica

$$\wp(u \mid \Omega, \Omega\tau')$$

per la quale il rapporto dei periodi sia ancora τ'; i suoi invarianti γ_2, γ_3 saranno quindi (§. 117)

$$\gamma_2 = \Omega^{-4} g'_2, \quad \gamma_3 = \Omega^{-6} g'_3,$$

onde, prendendo $\Omega^2 = \frac{1}{\mu}$, avremo

$$\gamma_2 = g_2, \quad \gamma_3 = g_3$$

e però

$$\wp(u \mid \Omega, \Omega\tau') = \wp(u \mid 1, \tau).$$

Per quanto si è visto al §. 104, avremo quindi

$$(2) \qquad \begin{cases} \Omega\tau' = \alpha\tau + \beta \\ \Omega = \gamma\tau + \delta, \end{cases}$$

cioè

$$(3) \qquad \tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta},$$

essendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ numeri interi e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Viceversa se τ' è legata a τ dalla (3), cioè da una sostituzione del *gruppo modulare* (Cap. II), ne seguirà

$$J(\tau') = J(\tau).$$

E infatti, indicando con Ω un fattore di proporzionalità, potremo sostituire le (2) alla (3) e le due funzioni coincidenti

$$\wp(u \mid 1, \tau) \ , \ \wp(u \mid \Omega, \Omega\tau')$$

avranno i medesimi invarianti g_2, g_3 e però anche il medesimo invariante assoluto.

Riepilogando, abbiamo dunque: *condizione necessaria e sufficiente affinchè sia* $J(\tau') = J(\tau)$ *è che gli argomenti* τ, τ' *siano legati da una sostituzione del gruppo modulare*

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}.$$

Nella funzione $J(\tau)$ abbiamo così un nuovo esempio di funzioni automorfe (Vedi §. 98), il gruppo corrispondente di sostituzioni lineari essendo nel caso attuale il gruppo modulare. Questa funzione $J(\tau)$ non è che la prima e più semplice fra le *funzioni modulari*, delle quali in seguito tratteremo più diffusamente.

Se invece di considerare soltanto le sostituzioni del gruppo modulare, consideriamo anche quelle di 2.ª specie

$$\tau' = \frac{\alpha\tau_0 - \beta}{\gamma\tau_0 - \delta}$$

appartenenti al gruppo modulare ampliato (Cap. II §. 18), per l'osser-

vazione alla fine del §. precedente, vediamo che in due tali punti τ, τ' la funzione modulare J (τ) assumerà valori coniugati, sicchè: *In due punti* τ, τ' *del semipiano positivo, equivalenti rispetto al gruppo modulare ampliato,* J (τ) *assume valori eguali o valori coniugati, secondo che la sostituzione del gruppo che fa passare da* τ a τ′ *è di prima o di seconda specie.*

§. 119.

Distribuzione dei valori di J (τ) nella rete modulare.

Se ricordiamo ora la rappresentazione geometrica del gruppo modulare, che abbiamo stabilito nel Cap. II, e in particolare la divisione del semipiano positivo nella *rete modulare* (pag. 91), questa figura acquisterà un corrispondente significato per la distribuzione dei valori dell'invariante assoluto. Intanto in ogni triangolo T′ della rete J (τ) ripeterà i valori che prende nel primo triangolo fondamentale T, o i coniugati di questi, secondo che T′ deriva dal fondamentale per un numero pari o dispari di riflessioni e basterà quindi che esaminiamo la distribuzione dei valori di J (τ) nel triangolo fondamentale. In primo luogo osserviamo che *su tutto il contorno del triangolo fondamentale, come sopra ogni circolo di riflessione del gruppo,* J (τ) *è reale.* E invero se C è un tale circolo e A, B due punti corrispondenti per la riflessione su C, i valori di J in a e b

$$J(a) \ , \ J(b)$$

sono coniugati; ma quando a cade sulla circonferenza C allora b coincide con a e però J (a) è coniugato di sè stesso, cioè reale. Invece nell'interno del triangolo fondamentale J (τ) non è mai reale; poichè, altrimenti, nel punto simmetrico rispetto all'asse immaginario J (τ) dovrebbe riprendere il medesimo valore e i due punti sarebbero equivalenti rispetto al gruppo modulare (non ampliato) Γ, ciò che non è. Segue di qui che in tutti i punti *interni* di T il coefficiente dell'immaginario in J (τ) serba sempre lo stesso segno. Vediamo ora quali valori J (τ) assume nei vertici

$$\tau = i \ , \ \tau = \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

di T; dico che si ha

$$J(i) = 1 \ , \ J(\varepsilon) = 0 .$$

La prima cosa risulta da ciò che per la funzione lemniscatica $\wp(u \mid \omega, i\omega)$ si ha $g_3 = 0$ come si è visto al §. 116. E similmente per la funzione $\wp$ (equianarmonica)

$$\wp(u \mid \omega, \varepsilon\omega)$$

avendo luogo, come risulta dalla formola d'omogeneità, la formola di moltiplicazione complessa

$$\wp(\varepsilon u) = \varepsilon \wp u$$

il confronto dei primi termini degli sviluppi di $\wp(\varepsilon u)$, $\varepsilon \wp u$ nell'intorno di $u = 0$ dà subito $g_2 = 0$ [1]. Siccome $J(\tau)$ sul contorno di T è sempre reale e non può mai riprendere due volte lo stesso valore, vediamo che nel tratto circolare da $\tau = \varepsilon$ a $\tau = i$ $J(\tau)$ andrà costantemente crescendo da 0 a 1, nel tratto rettilineo dell'asse immaginario da $\tau = i$ a $\tau = i\infty$ è sempre positivo e crescente a partire da $J = 1$ e nel tratto rettilineo $R(\tau) = -\frac{1}{2}$ da $\tau = \varepsilon$ a $\tau = -\frac{1}{1} + i\infty$ è sempre negativo e decrescente a partire da $J = 0$.

Volendo in fine esaminare come si comporta $J(\tau)$ in prossimità del vertice $\tau = \infty$, facciamo uso delle considerazioni seguenti.

Poichè $J(\tau)$ è funzione periodica di τ col periodo 1, $J(\tau + 1) = J(\tau)$, se poniamo

$$z = e^{2\pi i \tau}, \quad \tau = \frac{1}{2\pi i} \log z,$$

sarà

$$J(\tau) = w(z)$$

una funzione di z esistente per tutti i valori di z di modulo $|z| < 1$ e

---

[1] La medesima cosa, senza ricorrere alle proprietà della $\wp$ lemniscatica ed equianarmonica, risulta direttamente dalla considerazione delle serie

$$\sum' \frac{1}{(m + n\tau)^6}, \quad \sum' \frac{1}{(m + n\tau)^4}$$

la prima delle quali si annulla per $\tau = i$ e la seconda per $\tau = \varepsilon$, come si vede associando nel primo caso i numeri di Gauss quattro a quattro nel gruppo di numeri (associati)

$$m + ni, \quad i(m + ni), \quad i^2(m + ni), \quad i^3(m + ni)$$

e nel secondo i numeri $m + n\varepsilon$ tre a tre nel gruppo di numeri associati

$$m + n\varepsilon, \quad \varepsilon(m + n\varepsilon), \quad \varepsilon^2(m + n\varepsilon).$$

sarà inoltre monodroma e regolare in tutti i punti della corrispondente area circolare, salvo che in $z = 0$. Quale specie di singolarità avrà $w(z)$ in $z = 0$? Non può essere una singolarità essenziale perchè nell'intorno di $z = 0$ $w(z)$ prenderebbe allora valori prossimi p. e. a 1 di tanto poco quanto si vuole e J (τ), allontanandosi τ all'infinito entro la striscia

$$\alpha = -\frac{1}{2}\ , \quad \alpha = +\frac{1}{2}\ ,$$

prenderebbe valori che J (τ) avrebbe già preso in prossimità di $\tau = i$, ciò che è assurdo.

Non può nemmeno $z = 0$ essere per $w(z)$ un polo d'ordine superiore al primo, giacchè allora in prossimità di $z = 0$ $w(z)$ riprenderebbe due o più volte il medesimo valore e lo stesso accadrebbe per J (τ) entro la detta striscia a distanza grandissima. In fine non può darsi che $z = 0$ sia un punto regolare di $w(z)$ perchè allora J (τ), al crescere all'infinito dell'ordinata di τ, dovrebbe convergere verso un unico valore finito, ciò che è impossibile essendo J (τ), come si è visto, positivo e crescente sull'un lato rettilineo del triangolo fondamentale e negativo decrescente sull'altro. Se ne conclude che $w(z)$ si svilupperà per tutti i valori di z di modulo $|z| < 1$ così:

$$w(z) = \frac{A}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \ (A \neq 0)$$

e corrispondentemente avremo per J (τ) un'espressione analitica della forma

$$J(\tau) = A\, e^{-2\pi i \tau} + a_0 + a_1 e^{2\pi i \tau} + a_2 e^{4\pi i \tau} + \ldots,$$

valevole per tutti i valori di τ d'ordinata positiva, cioè in tutto il campo di esistenza della funzione [1]. Nell'intorno di $\tau = \infty$ J (τ) si comporta dunque come $e^{-2\pi i \tau}$ e per ciò diciamo che J (τ) ha in $\tau = \infty$ una *singolarità logaritmica*. Una singolarità della medesima natura ha J (τ) in tutti i punti equivalenti, cioè nei punti razionali dell'asse reale, il che fa vedere appunto come il campo d'esistenza di questa funzione analitica sia il semipiano positivo, l'asse reale essendo il limite del campo.

---

[1] Ritorneremo più tardi su questo sviluppo di J (τ) per precisare la natura dei suoi coefficienti (vedi §. 182).

§. 120.

Rappresentazione conforme del triangolo fondamentale sul semipiano.

Abbiamo già visto che, mentre τ percorre l'area del triangolo fondamentale T, il coefficiente dell'immaginario in $J(\tau)$ conserva sempre lo stesso segno, cioè, interpretando i valori di J nel suo piano complesso, $J(\tau)$ si muove in un semipiano. Per distinguere in quale, basta osservare che, percorrendo il contorno di T in verso positivo a partire p. e. da $\tau = \varepsilon$, s'incontrano successivamente i vertici $\tau = \varepsilon$, $\tau = i$, $\tau = \infty$ e corrispondentemente $J(\tau)$ si muove sul suo asse reale in senso positivo. Dunque: *in tutto il triangolo fondamentale* $J(\tau)$ *ha sempre il coefficiente dell'immaginario positivo.*

Ora facilmente vediamo, per ragioni di continuità, che inversamente, fissato per J un valore qualunque J_0 di ordinata positiva (o nulla), vi è sempre uno (ed un solo) punto τ_0 di T ove $J(\tau)$ assume il valore prefissato J_0. Per dimostrare la cosa in tutto rigore possiamo usare le considerazioni seguenti. Per abbreviare diciamo valori α i valori J_0 che J prende effettivamente e valori β quei valori J_0 (se ne esistono) che J non può prendere. Vediamo subito che se J_0 è un valore α, un intorno sufficientemente piccolo di J_0 contiene tutti valori α (§. 57). Medesimamente dico che, se J_0 è un valore β, un intorno sufficientemente piccolo di J_0 conterrà tutti valori β. E infatti se, comunque piccolo si prendesse questo intorno, vi si trovassero sempre dei valori α, a ciascuno di questi punti corrisponderebbe un punto τ in T e questi infiniti punti τ addensantisi in T, con ordinate minori di una quantità fissa, avrebbero almeno un punto limite τ_0, ove $J(\tau)$ assumerebbe, a causa della continuità, precisamente il valore J_0, che sarebbe dunque un valore α. Ora sia J_0 se è possibile, un valore β_1 e J_1 un valore α p. e. lo zero; segniamo nel semipiano J il tratto rettilineo [1] che unisce J_1 con J_0 e dividiamo i punti di questo tratto in due classi A, B attribuendo alla prima classe A quei punti J tali che il tratto da J_1 a J contenga tutti punti α, alla seconda B quelli tali che nel tratto $J_1 J$ vi siano anche punti β. Questa divisione in due classi soddisfa alle condizioni fondamentali [2] che assi-

---

[1] Prendiamo per semplicità un tratto rettilineo che unisca J_0 con J_1 ma si potrebbe adoperare egualmente qualunque altra linea continua.

[2] Dini. *Fondamenti,* pag. 11.

curano l'esistenza di un punto limite $\bar{J}$ di separazione fra le due classi. Questo punto $\bar{J}$ sarebbe manifestamente un punto α; e allora, prolungando il tratto $J_1 \bar{J}$ per un nuovo piccolo tratto, questo conterrebbe ancora tutti punti α, ciò che è assurdo.

Ne concludiamo: *Nell'interno del triangolo fondamentale* T *l'invariante assoluto* $J(\tau)$ *assume una ed una sola volta tutti i valori* J_0 *di ordinata positiva, e sul contorno tutti i valori reali da* $-\infty$ *a* $+\infty$.

Osserviamo inoltre che nell'interno del triangolo fondamentale ed anche sul contorno, i vertici esclusi, la derivata $\frac{dJ}{d\tau}$ non può mai annullarsi (nè diventare infinita); poichè nell'intorno di ogni punto, che non sia un vertice della rete modulare, $J(\tau)$ non prende che una sola volta i propri valori. Invece nell'intorno di $\tau = i$ e di tutti i punti equivalenti $J(\tau)$ riprende *due* volte i valori prossimi ad 1, e per ciò $J-1$ diventa in $\tau = i$ infinitesimo del 2.° ordine e $\frac{dJ}{d\tau}$ del primo. Similmente nell'intorno di $\tau = \varepsilon$, e dei vertici equivalenti, $J(\tau)$ riprende *tre* volte i valori prossimi a zero e perciò $J(\tau)$ diventa in $\tau = \varepsilon$ infinitesima del 3.° ordine e $\frac{dJ}{d\tau}$ del secondo.

Dunque: *La funzione* $J(\tau)$ *dà la rappresentazione biunivoca conforme del triangolo fondamentale sul semipiano. Punti eccezionali della rappresentazione sono soltanto i vertici, ove gli angoli di* $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, 0 *vengono cangiati in angoli piatti.*

Associando al triangolo fondamentale T il suo simmetrico rispetto all'asse immaginario, abbiamo il triangolo T fondamentale pel gruppo modulare Γ (§. 21); in esso $J(\tau)$ prende una *ed una sola volta* tutti i valori possibili e soltanto in punti simmetrici del contorno riprende lo stesso valore. Questo modo di comportarsi della funzione automorfa $J(\tau)$ nel suo campo fondamentale è quindi, in un certo senso, più semplice di quello che offrono le funzioni ellittiche, le quali debbono nel parallelogrammo fondamentale riprendere due volte *almeno* il medesimo valore [1].

---

[1] L'intima ragione di questa differenza sta in ciò che il campo fondamentale di $J(\tau)$, quando s'immaginano saldati fra loro i lati corrispondenti in guisa da far coincidere i punti equivalenti, diventa una superficie chiusa di genere *zero,* mentre il parallelogrammo delle funzioni ellittiche dà una superficie chiusa di genere *uno* (toro).

§. 121.

La funzione inversa $\tau(J)$ e il teorema di Picard sulle trascendenti intere.

Consideriamo ora la funzione inversa dell'invariante assoluto $J(\tau)$, che si ottiene considerando τ come funzione di J. Nell'intorno di ogni valore J, differente da 0, 1, a ∞, si può, per quanto si è detto sopra, eseguire *univocamente* l'inversione, una volta scelto il valore τ_1 di τ, poichè lo sviluppo di $J - J_1$ per potenze di $\tau - \tau_1$ contiene effettivamente il termine colla prima potenza di $\tau - \tau_1$. Se $J_1 = 0$, allora τ_1 deve essere un vertice della rete equivalente a $\tau = \varepsilon$, e $\tau - \tau_1$ si sviluppa in serie di potenze di $J^{\frac{1}{3}}$ e così per $J_1 = 1$ in serie di potenze di $(J-1)^{\frac{1}{2}}$. (Cf. §. 58).

La rete modulare ci rappresenta chiaramente le proprietà fondamentali di questa funzione inversa $\tau(J)$, permettendoci di seguire, senza ambiguità, ogni suo prolungamento analitico. Fissiamo invero un valore iniziale J_1 di J, p. e. nel semipiano positivo, al quale corrisponderà in ogni triangolo non tratteggiato della rete modulare (Cap. II, §. 20) un punto. Scegliamo p. e. quello τ_1 appartenente al triangolo fondamentale 1 e prendiamo

$$\text{per } J = J_1 \ , \ \tau = \tau_1 .$$

Partendo da J_1, descriviamo con J un cammino chiuso qualunque, che, senza passare pei punti singolari $J = 0, J = 1, J = \infty$, ritorni in J_1. Lungo di esso potremo prolungare analiticamente la funzione senza alcuna ambiguità. Finchè il cammino considerato, partendo da J_1, rimane nel semipiano positivo, τ rimarrà sempre nel primo triangolo; ma appena J traversa l'asse reale τ entrerà in uno determinato dei tre triangoli tratteggiati aderenti al fondamentale e precisamente nel triangolo A, B o C (fig. pag. 60), secondo che J traversa l'asse reale nel tratto 1∞ o nel tratto 0∞, o in fine nel tratto 01. Fino ad un nuovo traversamento dell'asse reale, che riconduca J nel semipiano positivo, τ rimarrà nell'interno del nuovo triangolo; entrerà poi in un nuovo triangolo della rete perfettamente determinato al nuovo traversamento. Così seguitando si vede che, lungo tutto il cammino chiuso, τ avrà sempre un unico valore e, ritornato J in J_1, τ ritornerà o in τ_1 stesso, o in uno degli infiniti punti equivalenti $\frac{\alpha\tau_1 + \beta}{\gamma\tau_1 + \delta}$ rispetto al gruppo modulare. È chiaro poi che

inversamente, prendendo un conveniente cammino chiuso per J, possiamo far sì che τ, al ritorno, assuma uno qualunque degli infiniti valori equivalenti a τ_1.

Così adunque: *La funzione* $\tau(J)$ *è una funzione analitica infinitiforme, esistente in tutto il piano complesso* J, *i cui rami si ottengono tutti da uno di essi* τ *eseguendovi le sostituzioni del gruppo modulare. Ogni ramo è una funzione regolare di* J *in ogni punto distinto dai tre singolari* $J=0$, $J=1$, $J=\infty$.

Questi punti sono punti di diramazione, cioè girando attorno ad essi si permutano i rami della funzione. Precisamente un giro attorno a $J=0$ cangia τ in $-\frac{\tau+1}{\tau}$, per un giro attorno a $J=1$ τ si muta in $-\frac{1}{\tau}$ e infine un giro attorno a $J=\infty$ cangia τ in $\tau+1$ [1].

Delle proprietà di questa funzione $\tau(J)$ Picard si è servito per dimostrare un teorema importante, che concerne il modo di comportarsi di una funzione nell'intorno di una singolarità essenziale [2]. Qui ci limitiamo al caso particolare di una trascendente intera $G(z)$ e dimostriamo: *Ogni trascendente intera prende a distanza finita tutti i valori finiti. eccettuato uno al più.*

Supponiamo che la trascendente intera $G(z)$ non prenda nè il valore finito A, nè il valore finito B; allora la trascendente intera

$$G_1(z)=\frac{G(z)-A}{B-A}$$

non prenderà nè il valore *zero*, nè il valore *uno*. Essendo $\tau(J)$ la funzione inversa dell'invariante assoluto sopra considerata, poniamo l'argomento $J=G_1(z)$ e studiamo la funzione di z

$$\varphi(z)=\tau(G_1(z)).$$

Per fissare completamente questa funzione, basterà fissare che per un certo valore z_1 di z, fra gli infiniti valori corrispondenti di τ, se ne scelga

---

[1] La rete modulare si può riguardare come una superficie Riemanniana ad infiniti fogli sulla quale vengono a trovarsi distese, in modo monodromo, le coppie di valori per J, τ legati dall'equazione trascendente $J=J(\tau)$; ciascun triangolo della rete del gruppo modulare rappresenta un foglio.

[2] Picard. *Traité d'Analyse,* T. III, pag. 346.

uno determinato τ_1. Si otterrà così una funzione analitica $\varphi(z)$, regolare per ogni valore finito a di z, poichè per ipotesi

$$G_1(a) \neq 0, 1, \infty;$$

la $\varphi(z)$ esiste dunque in tutto il piano complesso ed è regolare in ogni punto e perciò *monodroma*, come risulta da considerazioni del tutto simili a quelle che abbiamo sviluppato al §. 77 per dimostrare il teorema fondamentale relativo ai rami di una funzione algebrica. Ne risulta che la $\varphi(z) = \tau[G_1(z)]$ sarebbe una trascendente intera col coefficiente dell'immaginario sempre positivo. Ma allora la trascendente intera $e^{i\varphi(z)}$ sarebbe di modulo sempre < 1, ciò che è assurdo.

§. 122.

Esistenza della funzione $\wp(u; g_2, g_3)$ con invarianti assegnati.

Colle cognizioni delle proprietà fondamentali della funzione modulare $J(\tau)$, acquistate nei §§. precedenti, siamo ora in grado di stabilire l'importante teorema:

Nella funzione ellittica $\wp(u|\omega, \omega')$ si possono sempre assegnare ai periodi $2\omega, 2\omega'$ tali valori che gli invarianti g_2, g_3 acquistino valori prefissati arbitrarii γ_2, γ_3, purchè non sia nullo il discriminante

$$\Delta = \gamma_2^3 - 27\gamma_3^2.$$

Dai valori dati per g_2, g_3 calcoliamo infatti il corrispondente valore J_1 che dovrà avere l'invariante assoluto, e cioè

$$J_1 = \frac{\gamma_2^3}{\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2},$$

valore finito per ipotesi. Esisterà certamente nel triangolo fondamentale, o nel suo simmetrico rispetto all'asse immaginario, un valore τ_1 di τ, per il quale risulterà effettivamente

$$J(\tau_1) = J_1 = \frac{\gamma_2^3}{\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2}.$$

Essendo Ω una quantità per ora indeterminata, costruiamo la funzione ellittica $\wp(u|\Omega, \Omega\tau_1)$, il cui invariante assoluto sarà precisamente

$= J_1$. Col processo stesso del §. 118 si vede che si può sempre prendere Ω in guisa che gli invarianti g_2, g_3 della nostra $\wp u$ abbiano precisamente i valori assegnati γ_2, γ_3.

Nelle effettive applicazioni i valori dati degli invarianti sono sempre reali, e reale è quindi pure il valore di J. Per i calcoli numerici, che si presentano nella pratica, basta quindi avere una tavola che permetta di seguire l'andamento numerico dell'invariante assoluto J lungo il contorno del triangolo fondamentale. Le tavole costruite da Legendre per il calcolo degli integrali ellittici nel suo *Traité des fonctions elliptiques* si prestano facilmente alla trasformazione richiesta.

Il risultato che abbiamo così conseguito può anche enunciarsi sotto altra forma, ricordando l'equazione differenziale cui soddisfa $\wp u$, e cioè:

$$\wp'^2 u = 4\,\wp^3 u - g_2\,\wp u - g_3\,.$$

Possiamo dire infatti: *L'equazione differenziale del 1.° ordine*

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4\,s^3 - g_2\,s - g_3 \tag{4}$$

s' integra per mezzo della funzione ellittica $\wp u$, qualunque siano i valori delle costanti g_2, g_3, purchè il polinomio di 3.° grado in s del secondo membro non abbia fattori multipli.

E infatti prendendo

$$s = \wp\,(u + C\,;\ g_2, g_3)$$

si ha l'integrale *generale* della (4).

Se si presenta il caso qui escluso

$$g_2^3 - 27\,g_3^2 = 0\,,$$

la quadratura

$$\int \frac{ds}{\sqrt{4\,s^3 - g_2\,s - g_3}}$$

che dobbiamo eseguire per integrare la (4), porta evidentemente ad un integrale della forma

$$\int \frac{ds}{(s-a)\sqrt{s-b}}\,,$$

ovvero, ponendo $s - b = t^2$, all'integrale

$$\int \frac{2\,dt}{t^2 + k}$$

cioè ad un arco tangente (o ad un logaritmo), ed s, considerata come funzione del valore dell'integrale, è ancora una funzione monodroma, circolare (od iperbolica).

Propriamente dunque il caso

$$g_2^3 - 27\, g_3^2 = 0$$

non è un caso d'eccezione, ma soltanto un caso limite, ove la funzione $\wp u$ degenera in una funzione circolare (od iperbolica).

§. 123.

Equazione differenziale per le funzioni ellittiche del 2.° ordine e problema d'inversione.

La funzione ellittica del 2.° ordine $\wp(u;\, g_2,\, g_3)$ soddisfa all'equazione differenziale (4). Ora possiamo generalizzare questo risultato considerando una qualunque funzione ellittica *del 2.° ordine* $w(u)$ e dimostrando che essa soddisfa ad un'equazione differenziale del 1.° ordine della forma

$$\left(\frac{dw}{du}\right)^2 = \mathrm{P}(w),$$

dove $\mathrm{P}(w)$ è un polinomio di 3.° o 4.° grado in w, secondo che $w(u)$ ha un solo infinito del 2.° ordine nel parallelogrammo dei periodi, ovvero due infiniti staccati del 1.° ordine.

E infatti nel 1.° caso $\frac{dw}{du}$ sarà una funzione ellittica del 3.° ordine, che avrà dunque tre infinitesimi del 1.° ordine, e, se indichiamo con w_1, w_2, w_3 i valori che assume w in questi tre infinitesimi di w, si vede subito che le due funzioni

$$\left(\frac{dw}{du}\right)^2, \quad (w - w_1)\,(w - w_2)\,(w - w_3)$$

hanno a comune periodi, infiniti ed infinitesimi, onde risulta appunto

che si ha

$$(5) \qquad \left(\frac{dw}{du}\right)^2 = A w^3 + B w^2 + C w + D ,$$

essendo A, B, C, D costanti.

Se la $w(u)$ ha due infiniti del 1.° ordine, la sua derivata $\frac{dw}{du}$ è del 4.° ordine e un ragionamento analogo al precedente dimostra che si avrà allora

$$(6) \qquad \left(\frac{dw}{du}\right)^2 = A w^4 + B w^3 + C w^2 + D w + E .$$

Le equazioni differenziali (5), (6) s'integrano evidentemente per funzioni ellittiche. Riesce ora ben naturale la domanda: *Dati arbitrariamente i polinomii di 3.° o 4.° grado nei secondi membri delle* (5), (6), *possono queste equazioni differenziali integrarsi per funzioni ellittiche?*

In altre parole si chiede se è possibile determinare gli invarianti g_2, g_3 di una funzione $s = \wp u$ in guisa che l'integrale della (5) o della (6) possa porsi sotto la forma

$$w = F(\wp u, \wp' u) = F(s, \sqrt{4 s^3 - g_2 s - g_3}) ,$$

essendo F il simbolo di una funzione razionale nei due argomenti.

La questione così posta, alla quale è da rispondersi affermativamente, come ora dimostreremo, può anche formularsi nel modo seguente. Dalla (5) o (6) si trae

$$du = \frac{dw}{\sqrt{P(w)}} ,$$

essendo $P(w)$ un polinomio di 3.° o 4.° grado in w, e poichè, nell'ipotesi che la proprietà da dimostrarsi sussista, dobbiamo avere altresì con $s = \wp u$

$$du = \frac{ds}{\sqrt{4 s^3 - g_2 s - g_3}} ,$$

possiamo dare al nostro problema la seguente forma algebrica: *Ponendo w eguale ad una conveniente funzione razionale di s e $\sqrt{4 s^3 - g_2 s - g_3}$,*

è possibile trasformare il differenziale (ellittico)

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}}$$

nella forma normale di Weierstrass

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}\,?$$

Ciò è possibile, come si vedrà, in infiniti modi, fra i quali ne sceglieremo due più semplici e adatti agli scopi pratici.

Il problema qui enunciato porta il nome di *problema d'inversione.* Colla sua risoluzione noi veniamo invero a dimostrare che nell'integrale ellittico (di 1.ª specie)

$$u = \int_a^w \frac{dw}{\sqrt{P(w)}},$$

considerando il limite superiore w come funzione del valore u dell'integrale, si ha una funzione uniforme di u doppiamente periodica, cioè una funzione ellittica.

§. 124.

Primo metodo d'inversione per mezzo di una sostituzione lineare.

Cominciamo dal caso in cui il polinomio $P(w)$ è di 3.° grado e scriviamo, con coefficienti binomiali:

$$P(w) = a_0 w^3 + 3 a_1 w^2 + 3 a_2 w + a_3.$$

In tal caso la trasformazione del differenziale ellittico $\frac{dw}{\sqrt{P(w)}}$, nella forma normale di Weierstrass

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

si può fare nel modo più semplice con una sostituzione lineare intera

$$w = a + bs, \tag{7}$$

ciò che equivale a prendere per w (§. 123) una funzione ellitttica del 2.° ordine cogli infiniti stessi della $\wp u$. Colla sostituzione (7) si ha

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}} = \frac{b\,ds}{\sqrt{P(a+bs)}} = \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{b^2}\left\{P(a) + bs\,P'(a) + \frac{b^2 s^2}{2} P''(a) + \frac{b^3 s^3}{6} P'''(a)\right\}^2}}.$$

Basterà dunque disporre di a, b in guisa che sia

$$P''(a) = 0\ ,\quad b = \frac{24}{P'''(a)}\ .$$

Si ha dunque il risultato: *Il differenziale ellittico*

$$\frac{dw}{\sqrt{a_0 w^3 + 3\,a_1 w^2 + 3\,a_2 w + a_3}}\ ,$$

per mezzo della sostituzione lineare

$$w = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{4}{a_0}\,s\ ,$$

si riduce alla forma normale di Weierstrass

$$\frac{ds}{\sqrt{4\,s^3 - g_2\,s - g_3}}\ .$$

Passiamo ora al caso in cui $P(w)$ sia del 4.° grado:

$$P(w) = a_0 w^4 + 3\,a_1 w^3 + 6\,a_2 w^2 + 3\,a_3 w + a_4\ ;$$

in questo caso potremo raggiungere lo scopo ancora con una sostituzione lineare, ma frazionaria in luogo che intera, cioè della forma

$$w = a + \frac{b}{s-c}\ ^{(1)}\ . \tag{8}$$

Per meglio intendere il significato dei calcoli seguenti conviene ricorrere a variabili omogenee, scindendo w nel quoziente di due nuove

---

(1) Ciò equivale a prendere per w (§. 123) una funzione ellittica del 2.° ordine, i cui infiniti siano in due punti α, $2\omega + 2\omega' - \alpha$ del parallelogrammo dei periodi.

variabili w_1, w_2:

$$w = \frac{w_1}{w_2}$$

e scrivendo quindi il differenziale ellittico sotto la forma omogenea

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}} = \frac{w_2\, dw_1 - w_1\, dw_2}{\sqrt{a_0 w_1^2 + 4\, a_1 w_1^3 w_2 + 6\, a_2 w_1^2 w_2^2 + 4\, a_3 w_1 w_2^3 + a_4 w_2^4}},$$

dove attualmente sotto il segno radicale figura una *forma biquadratica.*

È ben noto che una tale forma possiede due *invarianti* S, T l'uno di 2.°, l'altro di 3.° grado nei coefficienti; le loro espressioni effettive sono:

$$(9)\quad \begin{cases} S = a_0 a_4 + 3\, a_2^2 - 4\, a_1 a_3 \\ T = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 + 2\, a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_2^3. \end{cases}$$

Eseguendo ora sulle variabili w_1, w_2 una sostituzione lineare

$$(10)\quad \begin{cases} w_1 = b_1 s_1 + b_2 s_2 \\ w_2 = c_1 s_1 + c_2 s_2 \end{cases}$$

e indicando con

$$a'_0 s_1^4 + 4\, a'_1 s_1^3 s_2 + \ldots + a'_4 s_2^4$$

la forma trasformata, sarà evidentemente

$$\frac{w_2\, dw_1 - w_1\, dw_2}{\sqrt{a_0 w_1^4 + \ldots + a_4 w_2^4}} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \frac{s_2\, ds_1 - s_1\, ds_2}{\sqrt{a'_0 s_1^4 + \ldots + a'_4 s_2^4}}.$$

Se ora disponiamo dei quattro coefficienti nella (10) in guisa che risulti

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = 1\ ,\quad a'_0 = 0\ ,\quad a'_1 = 1\ ,\quad a'_2 = 0\,,$$

indi poniamo

$$g_2 = -4\, a'_3\ ,\quad g_3 = -\, a'_4\,,$$

vediamo dalle (9) che g_2, g_3 saranno precisamente gli invarianti S′, T′ della trasformata e sarà per ciò

$$g_2 = S\ ,\quad g_3 = T.$$

Restituendo le variabili non omogenee, otterremo

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}} = \frac{ds}{\sqrt{4\,s^3 - g_2\,s - g_3}}\,,$$

mediante la sostituzione lineare

$$w = \frac{b_1\,s + b_2}{c_1\,s + c_2}\,.$$

Resta dunque soltanto che vediamo come si possono determinare i coefficienti a, b, c nella (8) in guisa da raggiungere lo scopo prefisso. Per ciò osserviamo che si ha colla sostituzione (8)

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}} = -\frac{ds}{\sqrt{\frac{(s-c)^4}{b^2}\,P\left(a + \frac{b}{s-c}\right)}} = -\frac{ds}{\sqrt{P_1(s)}}\,,$$

ove si ponga

$$P_1(s) = \frac{(s-c)^4}{b^2}\,P(a) + \frac{(s-c)^3}{b}\,P'(a) + \frac{(s-c)^2}{2}\,P''(a) + \frac{b\,(s-c)}{6}\,P'''(a) + \frac{b^2}{24}\,P^{\text{IV}}(a)\,.$$

Basterà determinare a, b, c per modo che si abbia

$$P(a) = 0\,,\quad \frac{P'(a)}{b} = 4\,,\quad \frac{-3\,c}{b}\,P'(a) + \frac{P''(a)}{2} = 0\,,$$

ossia

$$P(a) = 0\,,\quad b = \frac{1}{4}\,P'(a)\,,\quad c = \frac{1}{24}\,P''(a)\,.$$

Abbiamo dunque il risultato: *Per ridurre il differenziale ellittico*

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}} = \frac{dw}{\sqrt{a_0\,w^4 + 4\,a_1\,w^3 + 6\,a_2\,w^2 + 3\,a_3\,w + a_4}}$$

alla forma normale di Weierstrass

$$\frac{ds}{\sqrt{4\,s^3 - g_2\,s - g_3}}$$

basta porre

$$(11) \qquad w = a + \frac{\frac{1}{4} P'(a)}{s - \frac{1}{24} P''(a)},$$

essendo a una radice qualunque del polinomio di 4.° grado $P(w)$. *Gli invarianti* g_2, g_3 *risulteranno eguali ai due invarianti* S, T *di* $P(w)$ *e cioè:*

$$(12) \qquad \begin{cases} g_2 = a_0 a_4 + 3 a_2^2 - 4 a_1 a_3 \\ g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Così resta giustificata, anche dal punto di vista algebrico, la denominazione di *invarianti* data a g_2, g_3.

È da osservarsi che, mentre nel caso in cui $P(w)$ è di 3.° grado i coefficienti della sostituzione da eseguirsi dipendono *razionalmente* dai coefficienti di $P(w)$, attualmente ne dipendono irrazionalmente, esprimendosi per una radice di $P(w) = 0$, che bisogna supporre nota. Però, ed è questo un punto essenziale, ove la funzione $\wp u$ di Weierstrass ha già un rilevante vantaggio su quelle di Jacobi, *gli invarianti* g_2, g_3 *della* $\wp u$ *si calcolano sempre razionalmente, come invarianti della forma biquadratica.*

§. 125.

Secondo metodo d'inversione.

Nei casi pratici il polinomio $P(w)$ è a coefficienti reali e però anche gli invarianti g_2, g_3 sono reali. Se non si conosce alcuna radice di $P(w) = 0$, ovvero, essendo queste tutte immaginarie, si vuole evitare nelle formole d'inversione d'introdurle esplicitamente, converrà meglio ricorrere al *secondo metodo d'inversione*, che ora passiamo ad esporre.

Essendo v un valore fisso dell'argomento, prendiamo per ciò a considerare la funzione ellittica del 2.° ordine

$$y = \frac{1}{2} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

che abbiamo visto figurare nelle formole d'addizione (§. 106) e propo-

niamoci di costruire effettivamente il polinomio di 4.° grado in y che eguaglia $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ [1]. Per ciò osserviamo che dalla formola (V) d'addizione (pag. 285) si ha

$$\wp(u+v) + \wp u + \wp v = y^2,$$

ossia

$$y^2 - 3\wp v = [\wp(u+v) - \wp v] + [\wp u - \wp v]. \tag{13}$$

La formola (III) (pag. 284) ci dà

$$\wp(u+v) - \wp v = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} = \frac{1}{2}\frac{\wp'' v}{\wp u - \wp v} - \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{(\wp u - \wp v)^2}\wp' v$$

e moltiplicando per $2(\wp u - \wp v)$ risulta

$$\wp'' v - 2y\wp' v = 2[\wp(u+v) - \wp v][\wp u - \wp v].$$

Quadrando la (13) e sottraendovi il doppio di quest'ultima, si ottiene

$$(y^2 - 3\wp v)^2 + 2(2y\wp' v - \wp'' v) = [\wp(u+v) - \wp u]^2.$$

D'altronde, per la citata formola d'addizione (III) si ha

$$\wp(u+v) - \wp u = -\frac{dy}{du},$$

onde troviamo per la formola cercata

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (y^2 - 3\wp v)^2 + 2(2y\wp' v - \wp'' v),$$

che, sostituendo per $\wp'' v$ la sua espressione $6\wp^2 v - \frac{1}{2}g_2$, diventa:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = y^4 - 6\wp v\, y^2 + 4\wp' v\, y + g_2 - 3\wp^2 v. \tag{14}$$

Dopo ciò è molto facile ridurre una qualunque equazione differenziale (6)

$$\left(\frac{dw}{du}\right)^2 = a_0 w^4 + 4a_1 w^3 + 6a_2 w^2 + 4a_3 w + a_4 \tag{15}$$

---

[1] Che debba essere un polinomio di 4.° (e non di 3.°) grado in u risulta da ciò che la y ha due infiniti del 1.° ordine staccati, l'uno in $u = 0$, l'altro in $u = -v$.

a questa particolare forma (14) mediante una sostituzione lineare intera

$$w = \mathrm{A} + \mathrm{B}y .$$

Si cominci infatti, colla nota sostituzione

$$w = -\frac{a_1}{a_0} + w_1 ,$$

a far sparire dal 2.° membro di (15) il termine in w_1^3, dopo di che potremo scrivere

$$(15^*) \qquad \left(\frac{dw_1}{du}\right)^2 = a_0 w_1^4 + 6\, a'_2 w_1^2 + 4\, a'_3 w_1 + a'_4 .$$

Gli invarianti S′, T′ di questo polinomio saranno gli stessi che in (15) e sarà perciò

$$a_0 a'_4 + 3\, a'^2_2 = \mathrm{S} \ , \quad a_0 a'_2 a'_4 - a_0 a'^2_3 - a'^3_2 = \mathrm{T} .$$

Ora, posto

$$w_1 = \mathrm{B}y ,$$

dobbiamo ridurre la (15*) alla (14), determinando convenientemente

$$\mathrm{B} \ , \ g_2 \ , \ g_3 \ , \ v .$$

Dal confronto dei coefficienti nella supposta identità

$$\mathrm{B}^2 \{ y^4 - 6\, \wp v . y^2 + 4\, \wp' v . y + g_2 - 3\, \wp^2 v \} = a_0 \mathrm{B}^4 y^4 + 6\, a'_2 \mathrm{B}^2 y^2 + 4\, a'_3 \mathrm{B} y + a'_4$$

deduciamo

$$(16) \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \ , \quad \wp v = -a'_2 \ , \quad \wp' v = a'_3 \sqrt{a_0} \ , \quad g_2 - 3\, \wp' v = a'_4 a_0$$

e, poichè deve essere

$$\wp'^2 v = 4\, \wp^3 v - g_2 \wp v - g_3 ,$$

otteniamo per gli invarianti i valori

$$g_2 = \mathrm{S} \ , \quad g_3 = \mathrm{T} ,$$

dopo di che le (16) si riducono alle relazioni concordanti

$$\wp v = -a'_2 \ , \quad \wp' v = a'_3 \sqrt{a_0}$$

cioè

$$\wp v = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}, \quad \wp' v = \frac{2 a_1^3 - 3 a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3}{a_0 \sqrt{a_0}}.$$

Possiamo dunque formulare il risultato dei nostri calcoli col seguente teorema: *Per integrare l'equazione differenziale*

$$\left(\frac{dw}{du}\right)^2 = a_0 w^4 + 4 a_1 w^3 + 6 a_2 w^2 + 4 a_3 w + a_4$$

per funzioni ellittiche, costruiscasi la funzione $\wp$ *di Weierstrass cogli invarianti*

$$\begin{cases} g_2 = \mathrm{S} = a_0 a_4 + 3 a_2^2 - 4 a_1 a_3 \\ g_3 = \mathrm{T} = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_2^3 \end{cases}$$

e determinando l'argomento costante v *delle relazioni concordanti*

$$\wp v = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}, \quad \wp' v = \frac{2 a_1^3 - 3 a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3}{a_0 \sqrt{a_0}}$$

si avrà

$$\begin{cases} w = -\dfrac{a_1}{a_0} + \dfrac{1}{2\sqrt{a_0}} \dfrac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} \\ \dfrac{dw}{du} = \dfrac{1}{\sqrt{a_0}} (\wp u - \wp (u+v)). \end{cases}$$

In questo secondo modo d'inversione non si richiede la previa risoluzione dell'equazione di 4.° grado $\mathrm{P}(w) = 0$, anzi è chiaro come ne risulti *la risoluzione dell'equazione di 4.° grado stessa per funzioni ellittiche.* E infatti il binomio

$$\wp u - \wp (u+v)$$

si annulla evidentemente per tutti e soli i valori u della forma

$$u = -\frac{v}{2} + m\omega + n\omega' \quad (m, n \text{ interi})$$

e però le radici dell'equazione di 4.° grado saranno date dalla formola

$$w = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{2\sqrt{a_0}} \frac{\wp'\left(\frac{v}{2} + m\omega + n\omega'\right) + \wp' v}{\wp\left(\frac{v}{2} + m\omega + n\omega'\right) - \wp v},$$

dove basterà dare ad (m, n) i quattro valori di un sistema completo di coppie (mod 2) p. e. (0, 0) (0, 1) (1, 0) (1, 1).

§. 126.

Integrazione delle funzioni razionali di una variabile w e di $\sqrt{P(w)}$.

Coll'uno o coll'altro metodo d'inversione sopra discussi siamo in grado di risolvere il problema:

Dato un polinomio di 3.° o 4.° grado $P(w)$, *esprimere contemporaneamente la variabile w e il radicale $\sqrt{P(w)}$ per funzioni ellittiche di un parametro ausiliario u.*

A questo punto possiamo risolvere completamente il problema, che ha dato storicamente origine alla teoria delle funzioni ellittiche (§. 93) e cioè:

Essendo $F(w, \sqrt{P(w)})$ *una funzione razionale di w e della radice quadrata di un polinomio* $P(w)$ *di 3.° o 4.° grado in w, eseguire la quadratura*

$$J = \int F(w, \sqrt{P(w)})\, dw. \tag{17}$$

Introducendo il parametro ausiliario u, l'integrale precedente diventa evidentemente

$$J = \int F_1(\wp u, \wp' u)\, du,$$

dove F_1 è una funzione razionale di $\wp u$, $\wp' u$, cioè una funzione ellittica. La questione proposta si riduce dunque all'altra di trovare l'integrale di una funzione generale ellittica $f(u)$. Si vede subito che un tale integrale dà luogo ad una funzione ellittica aumentata di termini della forma

$$\log \sigma(u-v)\ ,\ \zeta(u-v).$$

E infatti, se decomponiamo la nostra funzione ellittica $f(u)$ in elementi semplici secondo la formola (I) (pag. 282)

$$f(u) = C + \sum \left\{ A_0 \zeta(u-\beta) + A_1 \wp(u-\beta) - \frac{A_2}{2} \wp'(u-\beta) + \frac{A_3}{6} \wp''(u-\beta) + \dots \right\},$$

otteniamo immediatamente

$$J = \int f(u)\, du = Cu + \sum A_0 \log \sigma(u-\beta) - \sum A_1 \zeta(u-\beta) + \psi(\wp u, \wp' u), \tag{18}$$

essendo ψ razionale in $\wp u$, $\wp' u$ cioè una funzione ellittica.

L'introduzione nell'analisi delle funzioni

$$\sigma u \ , \ \zeta u \ , \ \wp u \ ,$$

o insomma dell'unica funzione σu, permette di eseguire tutte le quadrature (17).

Si osserverà che l'integrale ellittico (18), oltre l'argomento esplicito u e la parte periodica $\psi(\wp u, \wp' u)$, contiene anche le due parti non periodiche

$$\sum A_0 \log \sigma (u-\beta) \ , \ \sum A_1 \zeta (u-\beta) \ .$$

In casi particolari possono però queste parti sparire. Ciò accade per la prima quando tutti i residui di $f(u)$ sono nulli, quando cioè l'integrale Abeliano (17) è di prima categoria (Cf. §. 90), e perchè sparisca anche la seconda basterà che sia $\Sigma A_1 = 0$, come risulta dalle formole

$$\zeta (u+2\omega) = \zeta u + 2\eta \ , \ \zeta (u+2\omega') = \zeta u + 2\eta' \ ,$$

ovvero anche dalla formola d'addizione per la ζu.

Un altro caso interessante si presenta quando, essendo sempre $\Sigma A_1 = 0$, i residui A_0 sono tali che il prodotto

$$\Pi \, [\sigma (u-\beta)]^{A_0}$$

sia una funzione ellittica, cioè razionale in $\wp u$, $\wp' u$. Allora il secondo membro della (18), prescindendo dal termine lineare in u, consta di una funzione razionale di $\wp u$, $\wp' u$ e del logaritmo di una tale funzione razionale.

§. 127.

Integrali normali ellittici delle tre specie secondo Weierstrass.

Ogni integrale J della forma (17) dicesi un *integrale ellittico*. Diciamo qui di passaggio che sotto questa denominazione si comprendono più in generale tutti gli integrali della forma

$$J = \int F(x, y) \, dx \ ,$$

dove le variabili x, y siano legate da un'equazione algebrica

$$f(x, y) = 0$$

di genere uno. Si perverrebbe, nel modo del §. 123, a queste più generali

relazioni ellittiche, considerando una generale funzione ellittica w, che è appunto legata alla sua derivata w' da un'equazione algebrica di genere uno (o zero). Ma nel modo da noi scelto per lo sviluppo della teoria volgiamo specialmente l'attenzione ai particolari integrali ellittici (17). Se osserviamo che nella formola (18) si ha $\Sigma A_0 = 0$, vediamo che si può scrivere

$$\sum A_0 \log \sigma(u-\beta) = \sum A_0 \log \frac{\sigma(\beta-u)}{\sigma\beta\,\sigma u} + B,$$

essendo B una costante. D'altronde per la formola d'addizione della ζ

$$\zeta(u-\beta) = \zeta u - \zeta\beta + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u + \wp'\beta}{\wp u - \wp\beta},$$

e possiamo quindi scrivere la (18) così:

$$(18^*) \qquad J = \int f(u)\,du = Cu - (\sum A_1)\,\zeta u + \sum A_0 \log \frac{\sigma(\beta-u)}{\sigma\beta\,\sigma u} + \psi(u),$$

dove $\psi(u)$ è una nuova funzione ellittica. Ora, se poniamo

$$s = \wp u\,, \quad \text{indi } \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = \wp' u\,,$$

vediamo che l'integrale generale ellittico

$$J = \int F(s, \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3})\,ds$$

si compone con termini delle seguenti quattro specie:

1.° di una parte razionale in s e $\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}$

2.° dell'integrale ellittico

$$(A) \qquad u = \int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

3.° dell'integrale

$$(B) \qquad \zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \int \frac{s\,ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_2}}$$

4.° di un certo numero di termini della forma

$$\log \frac{\sigma(\beta-u)}{\sigma\beta\,\sigma u} = \int \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u + \wp'\beta}{\wp u - \wp\beta}\,du - \frac{\sigma'\beta}{\sigma\beta}\,u + C,$$

ossia, prescindendo dal 2.° termine, che è della forma (A), di integrali ellittici della forma

$$\text{(C)} \qquad \int \frac{1}{2} \frac{\wp' u + \wp' \beta}{\wp u - \wp \beta} du .$$

Gli integrali ellittici (A), (B), (C) sono quelli che Weierstrass indica come integrali (elementari) di *prima*, *seconda* e *terza* specie rispettivamente [1].

Come si vede: *Un integrale generale ellittico si compone di una parte razionale e di integrali elementari di 1ª, 2ª e 3ª specie.*

Capitolo XII.

Le tre funzioni σ pari di Weierstrass e le funzioni ellittiche di Jacobi $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$. — Il quadrato k^2 del modulo come funzione modulare. — Formole d'addizione per $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$.

§. 128.

Funzioni periodiche appartenenti a sottogruppi del gruppo modulare.

Una delle proprietà fondamentali delle funzioni di Weierstrass σu, $\wp u$, considerate come dipendenti dai periodi, è espressa dalle formole

$$\sigma(u \mid \alpha\omega + \beta\omega' , \ \gamma\omega + \delta\omega') = \sigma(u \mid \omega, \omega')$$
$$\wp(u \mid \alpha\omega + \beta\omega' , \ \gamma\omega + \delta\omega') = \wp(u \mid \omega, \omega') ,$$

essendo

$$\begin{pmatrix} \alpha\omega + \beta\omega' & \gamma\omega + \delta\omega' \\ \omega & \omega' \end{pmatrix}$$

una qualunque sostituzione del gruppo modulare omogeneo. Il seguito

---

[1] Queste denominazioni corrispondono appunto a quelle in uso nella teoria generale degli integrali Abeliani. (Cf. §. 90) *Sulla superficie Riemanniana a due fogli per l'equazione algebrica*

$$y^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

l'integrale (A) è sempre finito; i suoi periodi fondamentali sono 2ω, $2\omega'$. — L'integrale (B) ha un solo polo del 1.° ordine in $s = \infty$ (che è altresì punto di diramazione). — L'integrale (C) ha due infiniti logaritmici in $s = \infty$ e $s = \wp\beta$, $y = \wp'\beta$ coi residui -1, $+1$.

della teoria ci conduce a considerare delle funzioni periodiche di 1.ª o 3.ª categoria (§. 101), che ammettono i periodi 2ω, $2\omega'$ o loro multipli [1] e, senza rimanere invariate per tutte le sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ del gruppo modulare, tali rimangono per quelle di un sottogruppo *d'indice finito.*

Fra i sottogruppi del gruppo modulare si considerano specialmente i *sottogruppi congruenziali* (Congruenzuntergruppen), che sono cioè definiti da congruenze cui debbono soddisfare i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rispetto ad un dato modulo n. I sottogruppi di questa specie sono sempre contenuti nel sottogruppo *principale* Γ_n definito dalle congruenze

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \pmod{n} \text{ [2]},$$

che contiene tutte le sostituzioni congrue coll'identità (mod n) ed hanno tutti indice finito. I sottogruppi principali Γ_n sono inoltre *invarianti* nel gruppo modulare.

Le funzioni periodiche appartenenti al sottogruppo Γ_n si diranno della n^{ma} specie (Stufe secondo Klein). In questo senso le σu, $\wp u$ appartengono alla prima specie. Nel caso seguente $n=2$ rientrano le funzioni classiche di Jacobi

$$\operatorname{sn} v\ ,\quad \operatorname{cn} v\ ,\quad \operatorname{dn} v\,.$$

Storicamente adunque lo studio delle funzioni ellittiche di seconda specie ha preceduto quello delle più semplici di prima specie (della $\wp u$). Arriveremo alle funzioni di Jacobi costruendo prima tre funzioni periodiche di 3.ª categoria e di 2.ª specie introdotte da Weierstrass, le così dette *funzioni sigma pari.* Per ciò conviene innanzi tutto partire dalle considerazioni seguenti. Rispetto al modulo 2 le sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ del gruppo modulare Γ si ripartiscono nelle 6 classi seguenti:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, 1\\ 1, 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, 1\\ 0, 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, 1\\ 1, 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, 1\\ 1, 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, 0\\ 1, 1\end{pmatrix} \pmod{2}.$$

---

[1] Naturalmente, se si tratta di funzioni periodiche di 3.ª (o 2.ª) categoria, la periodicità s'intende soltanto relativa ai loro infiniti ed infinitesimi.

[2] Che le sostituzioni di questa specie formino gruppo risulta subito dalla legge di composizione delle loro sostituzioni.

Quelle della prima classe formano appunto il sottogruppo Γ_2 e la ripartizione superiore in 6 classi corrisponde precisamente alla ripartizione delle sostituzioni di Γ rispetto a quelle del sottogruppo Γ_2, il quale adunque è in Γ un *sottogruppo (invariante) d'indice 6.*

Per ogni sostituzione di Γ

$$(1) \qquad \begin{cases} \Omega' = \alpha\omega' + \beta\omega \\ \Omega = \gamma\omega' + \delta\omega \end{cases}$$

si ha

$$\wp(u \mid \omega, \omega') = \wp(u, \Omega, \Omega')$$

e perciò le radici e_1, e_2, e_3 dell'equazione cubica

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0,$$

che abbiamo definite colle formole

$$e_1 = \wp\omega \ , \quad e_2 = \wp(\omega + \omega') \ , \quad e_3 = \wp\omega' ,$$

per qualsiasi sostituzione (1) $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ di Γ non potranno che permutarsi fra loro. Per vedere come si permutano, poniamo

$$e'_1 = \wp\Omega \ , \quad e'_2 = \wp(\Omega + \Omega') \ , \quad e'_3 = \wp\Omega'$$

e distinguendo, come sopra, le sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ in 6 classi rispetto al sottogruppo Γ_2, potremo subito costruire la tabella seguente:

		Sostituzioni sopra $e_1\ e_2\ e_3$
(A)	$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_2$, $e'_3 = e_3$	1
	$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_3$, $e'_2 = e_2$, $e'_3 = e_1$	$(e_1\ e_3)$
	$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_3$, $e'_3 = e_2$	$(e_2\ e_3)$
	$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_3$, $e'_2 = e_1$, $e'_3 = e_2$	$(e_1\ e_3\ e_2)$
	$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 1 \end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_2$, $e'_2 = e_3$, $e'_3 = e_1$	$(e_1\ e_2\ e_3)$
	$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 1, 1 \end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_2$, $e'_2 = e_1$, $e'_3 = e_3$	$(e_1\ e_2)$

Come si vede, le sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ di Γ inducono sopra e_1, e_2. e_3 le 6 sostituzioni del gruppo totale su 3 elementi.

§. 129.

Le tre funzioni $\sigma_r u$.

Le tre funzioni $\sigma_r u$ pari si deducono dalla σu in modo semplice, aumentando l'argomento u della σ di uno dei semiperiodi

$$\omega \ , \quad \omega+\omega' \ , \quad \omega' .$$

Per maggior simmetria poniamo

$$\omega_1 = \omega \ , \quad \omega_2 = \omega+\omega' \ , \quad \omega_3 = \omega'$$

e analogamente

$$\eta_1 = \eta \ , \quad \eta_2 = \eta+\eta' \ , \quad \eta_3 = \eta' ,$$

sicchè in generale

$$\eta_r = \sigma \omega_r \quad (r = 1, 2, 3) .$$

Dalla formola fondamentale (VI) pag. 263 per la σu si deduce che per un valore qualunque dell'indice r è

$$\sigma (u+2\omega_r) = -e^{2\eta_r (u+\omega_r)} \sigma u ,$$

nella qual formola, cangiando u in $u-\omega_r$, otteniamo

$$e^{-\eta_r u} \sigma (u+\omega_r) = e^{\eta_r u} \sigma (\omega_r - u) .$$

La funzione

$$C e^{-\eta_r u} \sigma (u+\omega_r)$$

è adunque una funzione pari; se diamo alla costante C un tale valore che per $u = 0$ la funzione assuma il valore 1, avremo precisamente la funzione che Weierstrass indica col simbolo $\sigma_r u$. Avremo dunque per definizione

$$\text{(I)} \qquad \sigma_r u = e^{-\eta_r u} \frac{\sigma (u+\omega_r)}{\sigma \omega_r} = e^{\eta_r u} \frac{\sigma (\omega_r - u)}{\sigma \omega_r}$$

e dando ad r i suoi tre valori sarà

$$(\mathrm{I}^*)\quad \sigma_1 u = e^{-\eta u}\frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma\omega}\,,\ \sigma_2 u = e^{-(\eta+\eta')u}\frac{\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma(\omega+\omega')}\,,\ \sigma_3 u = e^{-\eta' u}\frac{\sigma(u+\omega')}{\sigma\omega'}.$$

Possiamo dimostrare subito che le tre σ pari, che sono evidentemente funzioni di 3.ª categoria, appartengono precisamente al sottogruppo Γ_2 nel senso del §. precedente. E invero dalla formola

$$\wp u - \wp\omega_r = \frac{\sigma(\omega_r - u)\,\sigma(\omega_r + u)}{\sigma^2\omega_r\,\sigma^2 u}\,,$$

che per la (I) può scriversi

$$(2)\qquad \wp u - \wp\omega_r = \frac{\sigma_r^2 u}{\sigma^2 u}\,,$$

risulta intanto evidente che, per qualunque sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ di Γ sui periodi, i quadrati delle σ_r

$$\sigma_1^2 u\ ,\quad \sigma_2^2 u\ ,\quad \sigma_3^2 u$$

si permutano fra loro al modo stesso di

$$e_1\ ,\quad e_2\ ,\quad e_3$$

nella tabella (A). Ma poichè per $u = 0$ tutte tre le funzioni σ_r riduconsi $= 1$, è chiaro che anche

$$\sigma_1 u\ ,\quad \sigma_2 u\ ,\quad \sigma_3 u$$

si permuteranno nel medesimo modo. Ne concludiamo: *Le tre σ pari*

$$\sigma_r(u \mid \omega, \omega')$$

rimangono assolutamente invariate, eseguendo sui periodi una sostituzione

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix} \pmod 2$$

del sottogruppo Γ_2; *per ogni altra sostituzione di* Γ *si permutano semplicemente fra loro nel modo stesso di* e_1, e_2, e_3 *nella tabella* (A).

Osserviamo ancora che gli infinitesimi delle quattro trascendenti intere

$$\sigma u\ ,\quad \sigma_1 u\ ,\quad \sigma_2 u\ ,\quad \sigma_3 u$$

sono nei punti

$$\begin{aligned} u_0 &= 2m\omega + 2n\omega' && \text{per la } \sigma u \\ u_0 &= (2m+1)\omega + 2n\omega' && \text{„ } \sigma_1 u \\ u_0 &= (2m+1)\omega + (2n+1)\omega' && \text{„ } \sigma_2 u \\ u_0 &= 2m\omega + (2n+1)\omega' && \text{„ } \sigma_3 u\,, \end{aligned}$$

dove m, n indicano interi qualunque.

Infine dalla formola (VI) pag. 263 per la σu, tenendo conto della identità

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}\,,$$

deduciamo le corrispondenti per $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$, che riassumiamo nel prospetto seguente:

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} \sigma\,(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m+n}\,.\; e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')}.\; \sigma u \\ \sigma_1\,(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m}\;.\; e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')}.\; \sigma_1 u \\ \sigma_2\,(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn}\;.\; e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')}.\; \sigma_2 u \\ \sigma_3\,(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+n}\;.\; e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')}.\; \sigma_3 u\,. \end{cases}$$

§. 130.

Le funzioni ellittiche $\sqrt{\wp u - e_r}$ e i valori di $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$.

La formola (2) ci dimostra che la funzione

$$\sqrt{\wp u - e_r} = \pm\frac{\sigma_r u}{\sigma u}$$

si scinde colle sue due determinazioni in due funzioni monodrome distinte, ciò che risulta del resto anche dall'osservare che gli infinitesimi e gli infiniti delle funzioni

$$\wp u - e_r = \wp u - \wp\omega_r$$

sono tutti di ordine pari. Colla segnatura

$$\sqrt{\wp u - e_r}$$

intenderemo sempre la funzione $+\frac{\sigma_r u}{\sigma u}$, sicchè avremo

$$\text{(II)} \qquad \sqrt{\wp u - e_1} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\,, \quad \sqrt{\wp u - e_2} = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\,, \quad \sqrt{\wp u - e_3} = \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\,.$$

Mediante le formole (B) si constata subito che queste tre funzioni sono doppiamente periodiche del 2.° ordine coi rispettivi periodi fondamentali

$$(2\omega, 4\omega')\,, \quad (2\omega + 2\omega', 4\omega)\,, \quad (4\omega, 2\omega').$$

Alla (II) si coordina una formola notevole, che esprime $\wp' u$ per le σ; si ha infatti:

$$\wp' u = \pm 2\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)} = \pm 2\,\frac{\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u}$$

e il segno si determina subito dal modo di comportarsi di $\wp' u$ nell'intorno di $u = 0$, onde risulta

$$\text{(III)} \qquad \wp' u = -2\,\frac{\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u}\,.$$

Fissato in modo preciso colle (II) il senso dei radicali $\sqrt{\wp u - e_r}$, intenderemo per $\sqrt{e_s - e_r}$ il valore $\frac{\sigma_r \omega_s}{\sigma \omega_s}$; avremo quindi senza alcuna ambiguità:

$$(a) \qquad \begin{cases} \sqrt{e_2 - e_1} = \dfrac{\sigma_1 \omega_2}{\sigma \omega_2} = -e^{\eta_1 \omega_2}\,\dfrac{\sigma \omega_3}{\sigma \omega_1\,\sigma \omega_2} \\[2ex] \sqrt{e_3 - e_1} = \dfrac{\sigma_1 \omega_3}{\sigma \omega_3} = -e^{-\eta_1 \omega_3}\,\dfrac{\sigma \omega_2}{\sigma \omega_1\,\sigma \omega_3} \end{cases}$$

$$(b) \qquad \begin{cases} \sqrt{e_3 - e_2} = \dfrac{\sigma_2 \omega_3}{\sigma \omega_3} = e^{\eta_2 \omega_3}\,\dfrac{\sigma \omega_1}{\sigma \omega_2\,\sigma \omega_3} \\[2ex] \sqrt{e_1 - e_2} = \dfrac{\sigma_2 \omega_1}{\sigma \omega_1} = e^{\eta_2 \omega_1}\,\dfrac{\sigma \omega_3}{\sigma \omega_2\,\sigma \omega_1} \end{cases}$$

$$(c) \qquad \begin{cases} \sqrt{e_1 - e_3} = \dfrac{\sigma_3 \omega_1}{\sigma \omega_1} = e^{-\eta_3 \omega_1}\,\dfrac{\sigma \omega_2}{\sigma \omega_3\,\sigma \omega_1} \\[2ex] \sqrt{e_2 - e_3} = \dfrac{\sigma_3 \omega_2}{\sigma \omega_2} = -e^{\eta_3 \omega_2}\,\dfrac{\sigma \omega_1}{\sigma \omega_3\,\sigma \omega}\,. \end{cases}$$

Dietro queste convenzioni risulta

$$(d)\quad \sqrt{e_1-e_2}=i\sqrt{e_2-e_1}\,,\ \sqrt{e_2-e_3}=i\sqrt{e_3-e_2}\,,\ \sqrt{e_1-e_3}=i\sqrt{e_3-e_1}\,.$$

Moltiplicando la 2.ª delle (b) per la 1.ª delle (c), risulta

$$\sqrt{e_1-e_2}\,.\,\sqrt{e_1-e_3}=\frac{e^{\eta_1\omega_1}}{\sigma^2\omega_1}$$

ed estraendo nuovamente la radice quadrata, coll'adottare nel 2.º membro la determinazione $\dfrac{e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega_1}}{\sigma\,\omega_1}$, e analogamente procedendo per gli altri prodotti

$$\sqrt{e_2-e_3}\,\sqrt{e_2-e_1}\,,\ \sqrt{e_3-e_1}\,\sqrt{e_3-e_2}\,,$$

avremo le formole

$$\text{(IV)}\quad \left\{\begin{aligned} \sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sqrt[4]{e_1-e_3} &= \frac{e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega_1}}{\sigma\,\omega_1}\\ \sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_2-e_1} &= \frac{e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}}{\sigma\,\omega_2}\\ \sqrt[4]{e_3-e_1}\,\sqrt[4]{e_3-e_2} &= \frac{e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3}}{\sigma\,\omega_3}\,, \end{aligned}\right.$$

dalle quali segue una notevole identità. Dalla formola

$$\frac{1}{(e_1-e_2)\,(e_1-e_3)}=\frac{e_3-e_2}{(e_1-e_2)\,(e_2-e_3)\,(e_3-e_1)}\,,$$

permutando circolarmente gli indici e sommando, si ottiene l'identità

$$\frac{1}{(e_1-e_1)\,(e_1-e_3)}+\frac{1}{(e_2-e_3)\,(e_2-e_1)}+\frac{1}{(e_3-e_1)\,(e_3-e_3)}=0\,,$$

ovvero per le (IV)

$$\text{(V)}\quad \left(e^{\frac{-\eta_1\omega_1}{2}}\sigma\,\omega_1\right)^4+\left(e^{\frac{-\eta_2\omega_2}{2}}\sigma\,\omega_2\right)^4+\left(e^{\frac{-\eta_3\omega_3}{2}}\sigma\,\omega_3\right)^4=0\,,$$

che è la formola richiesta.

§. 131.

Aggiunta di semiperiodi all'argomento della $\sigma_2 u$.

Cerchiamo ora l'effetto prodotto sopra una qualunque delle funzioni σ per l'aggiunta all'argomento u di un *semiperiodo* arbitrario

$$\Omega = m\omega + n\omega',$$

essendo m, n due numeri interi, di cui uno almeno impari. Se poniamo

$$\mathrm{H} = m\eta + n\eta',$$

avremo, per la proprietà fondamentale della σu:

$$\sigma(u+2\Omega) = -e^{2\mathrm{H}(u+\Omega)}\,\sigma u,$$

da cui cangiando u in $u - \Omega$

$$e^{-\mathrm{H}u}\,\sigma(u+\Omega) = e^{\mathrm{H}u}\,\sigma(\Omega - u).$$

Ponendo

$$\sigma_{m,n} u = e^{-\mathrm{H}u}\,\frac{\sigma(u+\Omega)}{\sigma\Omega}, \tag{3}$$

si avrà evidentemente

$$\sigma_{10} u = \sigma_1 u\ ,\quad \sigma_{01} u = \sigma_3 u\ ,\quad \sigma_{11} u = \sigma_2 u.$$

Ma si trova subito che aumentando m, n di 2 la $\sigma_{mn} u$ non cangia:

$$\sigma_{m+2,n} u = \sigma_{m,n+2} u = \sigma_{mn} u$$

e però la funzione $\sigma_{mn} u$ non dipende dai valori assoluti degli indici m, n, ma solo dalla loro parità o disparità, talchè si ha

$$\begin{cases} \sigma_{mn} u = \sigma_1 u & \text{per } (m, n) \equiv (1, 0) \pmod 2 \\ \sigma_{mn} u = \sigma_2 u & \quad\text{"}\quad (m, n) \equiv (1, 1) \\ \sigma_{mn} u = \sigma_3 u & \quad\text{"}\quad (m, n) \equiv (0, 1). \end{cases}$$

La formola (3) può dunque riguardarsi come esprimente $\sigma(u+\Omega)$ per una delle altre funzioni σ. Ora nella (3) aumentiamo u di $r\omega + s\omega'$

con r, s interi qualunque, non ambedue pari, e distinguiamo due casi secondo che i numeri $m+r$, $n+s$ sono ambedue pari, ovvero no. Nel 1.° caso si ha

$$\sigma_{mn}(u+r\omega+s\omega') = C e^{(r\eta+s\eta')u}\,\sigma u$$

e determinando il fattore costante C col fare $u = -(r\omega+s\omega')$ otteniamo

$$(4) \qquad \sigma_{mn}(u+r\omega+s\omega') = -e^{(r\eta+s\eta')(u+r\omega+s\omega')}\,\frac{\sigma u}{\sigma(r\omega+s\omega')},$$

formola che vale per

$$(m+r, n+s) \equiv (0, 0) \pmod 2.$$

Nel 2.° caso risulta invece

$$\sigma_{mn}(u+r\omega+s\omega') = C' e^{(r\eta+s\eta')u}\,\sigma_{m+r,\,n+s}\,u$$

e determinando C′ col fare p. e. $u=0$ si ha la seconda formola domandata

$$(4^*) \qquad \sigma_{mn}(u+r\omega+s\omega') = e^{(r\eta+s\eta')u}\,\sigma_{mn}(r\omega+s\omega')\,\sigma_{m+n,\,r+s}\,u$$

per $(m+n,\ r+s) \not\equiv (0,0) \pmod 2$.

§. 132.

Sviluppo della trascendente intera $\sigma_r u$ in serie di potenze di u.

Le trascendenti intere $\sigma_r u$ $(r = 1, 2, 3)$ sono sviluppabili in serie di potenze di u, convergenti in tutto il piano, ed importa ora che precisiamo la natura dei coefficienti di queste serie. Dimostreremo: *I coefficienti a_n dello sviluppo in serie di*

$$\sigma_r u = \sum_0^\infty a_n u^{2n}$$

sono formati razionalmente cogli invarianti g_2, g_3 e colla radice e_r corrispondente dell'equazione cubica

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0.$$

Risulta di qui nuovamente che per ogni sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ del gruppo modulare sui periodi le tre funzioni

$$\sigma_1 u \ , \ \sigma_2 u \ , \ \sigma_3 u$$

si permutano fra loro al modo stesso di

$$e_1 \ , \ e_2 \ , \ e_3 \, .$$

Per stabilire la proprietà enunciata, consideriamo la funzione più generale periodica di 3.ª categoria

$$\varphi(u) = e^{-u\zeta v} \frac{\sigma(u+v)}{\sigma v} \, , \tag{5}$$

dove v è un parametro; per $v = \omega_r$ otterremo precisamente la $\sigma_r u$. La $\varphi(u)$ è funzione anche del parametro v e derivando rispetto ad u o v otteniamo

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial u} = \zeta(u+v) - \zeta v$$

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial v} = \zeta(u+v) - \zeta v + u \wp v \, ,$$

onde risulta che φ soddisfa l'equazione a derivate parziali del 1.° ordine

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} + u \varphi \wp v = 0 \, . \tag{6}$$

Ora supponiamo che sia

$$\varphi(u) = 1 + A_1 u + A_2 \frac{u^2}{1.2} + A_3 \frac{u^3}{1.2.3} + \ldots + A_n \frac{u^n}{1.2.3..n} + \ldots$$

lo sviluppo di $\varphi(u)$ in serie delle potenze ascendenti di u; i coefficienti A_n saranno funzioni analitiche uniformi di v e potremo applicare la derivazione per serie sia rispetto ad u, sia rispetto a v. Dalla (6) risulta quindi pei coefficienti A_n la formola ricorrente

$$A_n = \frac{dA_{n-1}}{dv} - (n-1) A_{n-2} \wp v \, .$$

Partendo dai primi valori

$$A_1 = 0 \ , \ A_2 = -\wp v \ , \ A_3 = -\wp' v \ , \ A_4 = -\wp'' v + 3\,\wp^2 v = -3\,\wp^2 v + \frac{1}{2}\,g_2$$

vediamo adunque che i coefficienti A_n sono funzioni razionali intere di $\wp v$ per n pari, con coefficienti razionali interi in g_2, g_3, mentre per n dispari sono eguali al prodotto di $\wp' v$ per una tale funzione. Se facciamo $v = \omega_r$, la $\varphi(u)$ si muta in $\sigma_r u$; e poichè

$$\wp\omega_r = e_r \ , \quad \wp'\omega_r = 0 \ ,$$

ne risulta la verità del teorema enunciato. È chiaro poi che nei coefficienti dello sviluppo di $\sigma_r u$ si potrà far figurare e_r a potenze non superiori alla seconda. Così si ha:

$$\sigma_r u = 1 - e_r \frac{u^2}{1.2} + \left(\frac{1}{2}\,g_2 - e_r^2\right) \frac{u^4}{1.2.3.4} + \ldots .$$

§. 133.

Le funzioni ellittiche di Jacobi $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$.

I risultati dei §§. precedenti conducono direttamente alle tre funzioni ellittiche di Jacobi di cui ora tratteremo; esse sono funzioni doppiamente periodiche appartenenti, secondo i concetti generali del §. 128, al sottogruppo Γ_2: $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0 \\ 0, 1\end{pmatrix} \pmod 2$.

Consideriamo perciò le tre funzioni

$$(7) \qquad \varphi(u) = \sqrt{e_1 - e_3}\ \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \ , \quad \varphi_1(u) = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} \ , \quad \varphi_2(u) = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} \ ,$$

le quali, secondo le formole (B) pag. 344, hanno i rispettivi periodi elementari

$$(4\omega, 2\omega') \ , \quad 4\omega, 2\omega + 2\omega') \ , \quad (2\omega, 4\omega')$$

ed hanno infiniti di 1.° ordine nei punti

$$u_\infty = 2m\omega + (2n+1)\,\omega'$$

ed infinitesimi di 1.° ordine rispettivamente nei punti

$$u_0 = 2m\omega + 2n\omega' \ , \quad u_0 = (2m+1)\,\omega + 2n\omega' \ , \quad u_0 = (2m+1)\,\omega + (2n+1)\,\omega' \ ,$$

percorrendo m, n tutti i valori interi. Inoltre queste funzioni soddisfano alle condizioni iniziali

$$(8) \qquad \lim_{u=0} \frac{\varphi(u)}{u} = \sqrt{e_1 - e_3}\ , \quad \varphi(\omega) = 1\ , \quad \varphi_1(0) = 1\ , \quad \varphi_2(0) = 1\ .$$

Calcoliamo poi i residui di queste tre funzioni per $u = \omega'$, osservando che si ha

$$\lim_{z=\omega'} \frac{u - \omega'}{\sigma_3 u} = -e^{-\eta_3 \omega_3}\, \sigma \omega_3 \text{ (1)}\ ;$$

Tenendo conto delle formole (a), (b), (c), pag. 345, troviamo:

$$(9) \qquad \lim_{u=\omega'} [(u - \omega')\, \varphi(u)] = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}}\ , \quad \lim_{u=\omega'} [(u - \omega')\, \varphi_1(u)] = -\frac{i}{\sqrt{e_2 - e_3}}\ ,$$

$$\lim_{u=\omega'} [(u - \omega')\, \varphi_2(u)] = -\frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}}\ .$$

Osserviamo ancora che, per le proprietà di omogeneità della σu (§. 93), della ζu e della $\wp u$, se si moltiplicano argomento e periodi per un medesimo fattore λ, le

$$\sigma u\ , \quad \zeta u\ , \quad \wp u$$

acquistano rispettivamente i fattori

$$\lambda\ , \quad \frac{1}{\lambda}\ , \quad \frac{1}{\lambda^2}$$

e per ciò le costanti

$$\eta_r\ , \quad \sqrt{e_r - e_s}$$

il fattore $\frac{1}{\lambda}$, onde segue che $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ restano invariate. Le nostre tre

---

(1) Ciò risulta subito dalla formola

$$\sigma_3(u + \omega_3) = -e^{\eta_3(u+\omega_3)} \frac{\sigma u}{\sigma \omega_3}$$

indi

$$\lim_{u=\omega_3} \left(\frac{u - \omega_3}{\sigma_3 u}\right) = \lim_{u=0} \frac{u}{\sigma_3(u + \omega_3)} = -e^{-\eta_3 \omega_3}\, \sigma \omega_3\ .$$

funzioni (7) godono dunque della comune proprietà espressa dalla formola

$$\Phi(\lambda u \mid \lambda\omega, \lambda\omega') = \Phi(u \mid \omega, \omega').$$

Con una semplice mutazione dell'argomento è facile quindi cangiare le $\varphi(u)$ in tre funzioni dipendenti solo dall'argomento e dal rapporto $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ dei periodi. Pongasi perciò

$$u\sqrt{e_1 - e_3} = v$$

e si riguardino

$$\varphi(u) = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}\,, \quad \varphi_1(u) = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}\,, \quad \varphi_2(u) = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}$$

come funzioni del nuovo argomento v. Esse dipenderanno, oltre che dall'argomento, soltanto dal rapporto τ dei periodi; sono queste precisamente le tre funzioni ellittiche di Jacobi

$$\operatorname{sen}\operatorname{am} v \text{ o } \operatorname{sn} v\,, \quad \cos\operatorname{am} v \text{ o } \operatorname{cn} v\,, \quad \Delta\operatorname{am} v \text{ o } \operatorname{dn} v.$$

Abbiamo dunque per definizione

$$\text{(C)} \qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn} v &= \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \\ \operatorname{cn} v &= \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} \\ \operatorname{dn} v &= \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} \end{aligned}\right\} \quad v = u\sqrt{e_1 - e_3}\,.$$

Se poniamo inoltre, per usare delle notazioni di Jacobi:

$$\mathrm{K} = \omega\sqrt{e_1 - e_3}\,, \quad i\,\mathrm{K}' = \omega'\sqrt{e_1 - e_3}\,,$$

vediamo che sussistono le proprietà fondamentali seguenti:

Le tre funzioni ellittiche di Jacobi hanno rispettivamente i periodi elementari

$$\begin{aligned} &4\,\mathrm{K}\,,\ 2\,i\,\mathrm{K}' && \text{per } \operatorname{sn} v \\ &4\,\mathrm{K}\,,\ 2\,\mathrm{K} + 2\,i\,\mathrm{K}' && \text{per } \operatorname{cn} v \\ &2\,\mathrm{K}\,,\ 4\,i\,\mathrm{K}' && \text{per } \operatorname{dn} v\,; \end{aligned}$$

i loro infiniti di 1.° ordine sono nei punti

$$v_\infty = 2\,m\,\mathrm{K} + (2n+1)\,i\,\mathrm{K}'$$

e gli infinitesimi rispettivamente in

$$\begin{cases} v_0 = 2\,m\,\mathrm{K} + 2\,n\,i\,\mathrm{K}' & \text{per sn } v \\ v_0 = (2\,m+1)\,\mathrm{K} + 2\,n\,i\,\mathrm{K}' & \text{per cn } v \\ v_0 = (2\,m+1)\,\mathrm{K} + (2\,n+1)\,i\,\mathrm{K}' & \text{per dn } v\,. \end{cases}$$

Tutte tre sono funzioni ellittiche di 2.° ordine, nel loro rispettivo parallelogrammo dei periodi.

Le formole (8), (9) si cangiano poi nelle seguenti, che importa notare:

$$\text{(8*)} \qquad \lim_{v=0}\left(\frac{\mathrm{sn}\,v}{v}\right) = 1\ , \quad \mathrm{cn}\,0 = 1\ , \quad \mathrm{dn}\,0 = 1\ , \quad \mathrm{sn}\,\mathrm{K} = 1$$

$$\text{(9*)} \qquad \lim_{v=i\mathrm{K}'}[(v - i\,\mathrm{K}')\,\mathrm{sn}\,v] = \frac{1}{k}\ , \quad \lim_{v=i\mathrm{K}'}[(v - i\,\mathrm{K}')\,\mathrm{cn}\,v] = -\frac{i}{k}\ ,$$

$$\lim_{v=i\mathrm{K}'}[(v - i\,\mathrm{K}')\,\mathrm{dn}\,v] = -i\,,$$

avendo posto

$$\text{(VI)} \qquad k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}\,.$$

Questa costante k, che dipende soltanto dal rapporto $\tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$ dei periodi, dicesi il *modulo* delle funzioni ellittiche sn v, cn v, dn v e, considerata come funzione di τ, è storicamente la prima funzione studiata della classe delle *funzioni modulari*, alla quale ha dato appunto il nome.

Insieme al modulo k, conviene considerare anche il così detto *modulo complementare* k', definito dalla formola

$$\text{(VI*)} \qquad k' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}\,,$$

i radicali avendo i sensi precisi loro attribuiti nelle formole (a), (b), (c) pag. 345. Fra il modulo k ed il complementare k' ha luogo evidentemente la relazione

$$\text{(10)} \qquad k^2 + k'^2 = 1\,.$$

È inoltre da notarsi che si ha

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{dn} \mathrm{K} = \frac{\sigma_2(\omega_1)}{\sigma_3(\omega_1)} = k' .$$

Osserviamo poi che delle tre funzioni ellittiche di Jacobi la prima $\operatorname{sn} v$ è impari, le altre due $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ sono pari; inoltre aumentando v di $2\mathrm{K}$ o $2i\mathrm{K}'$ si comportano nel modo seguente

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(2\mathrm{K}+v) = -\operatorname{sn} v \ , & \operatorname{sn}(2i\mathrm{K}'+v) = \operatorname{sn} v \\ \operatorname{cn}(2\mathrm{K}+v) = -\operatorname{cn} v \ , & \operatorname{cn}(2i\mathrm{K}'+v) = -\operatorname{cn} v \\ \operatorname{dn}(2\mathrm{K}+v) = \operatorname{dn} v \ , & \operatorname{dn}(2i\mathrm{K}'+v) = -\operatorname{dn} v . \end{cases}$$

Notiamo in fine la formola

$$\operatorname{sn}(2\mathrm{K}-v) = \operatorname{sn} v .$$

§. 134.

Relazioni fra $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ e loro derivate.

Fra i quadrati di $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$, hanno luogo due semplici relazioni, che si deducono immediatamente dalle loro espressioni per la $\wp$ di Weierstrass:

$$\text{(VII)} \quad \operatorname{sn} v = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \ , \ \operatorname{cn} v = \frac{\sqrt{\wp u - e_1}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \ , \ \operatorname{dn} v = \frac{\sqrt{\wp u - e_2}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \ \left(v = u\sqrt{e_1 - e_3}\right);$$

si hanno quindi le relazioni cercate

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{cn}^2 v = 1 \ , \ k^2 \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{dn}^2 v = 1 .$$

Stabiliamo ora le formole che esprimono le derivate di $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ per le funzioni stesse di Jacobi. Derivando per ciò le (VII), col ricordare che

$$\wp' u = -2\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)} ,$$

si otterranno subito le formole importanti

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d \operatorname{sn} v}{dv} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \\[2ex] \dfrac{d \operatorname{cn} v}{dv} = -\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \\[2ex] \dfrac{d \operatorname{dn} v}{dv} = -k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v , \end{cases}$$

che potrebbero facilmente stabilirsi per via diretta dalle proprietà caratteristiche di sn v, cn v, dn v [1].

Da queste formole si trae subito una conseguenza importante nel teorema: *Le funzioni ellittiche di Jacobi* sn v, cn v, dn v *dipendono razionalmente dal quadrato* k^2 *del modulo, come la funzione di Weierstrass* $\wp(u; g_2, g_3)$ *dagli invarianti* g_2, g_3. Queste tre funzioni sono infatti sviluppabili in serie di potenze di v, convergenti entro il cerchio che ha per raggio la minima distanza dell'origine dai vertici della rete parallelogrammica: $2m\mathrm{K}+2ni\mathrm{K}'$; ora le formole (VIII), e quelle che se ne ottengono per successiva derivazione, dimostrano che i coefficienti di queste serie sono polinomii razionali interi in k^2. Pei primi termini di questi sviluppi abbiamo:

$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn} v &= v - (k^2+1)\frac{v^3}{1.2.3} + (k^4+14k^2+1)\frac{v^5}{\pi(5)} + \dots \\
\operatorname{cn} v &= 1 - \frac{v^2}{1.2} + (4k^2+1)\frac{v^4}{1.2.3.4} + \dots \\
\operatorname{dn} v &= 1 - \frac{k^2v^2}{1.2} + k^2(k^2+4)\frac{v^4}{1.2.3.4} + \dots
\end{aligned}\right.$$

Quando si vuol porre in evidenza per le funzioni ellittiche di Jacobi il valore del rapporto τ dei periodi, ovvero quello del modulo k, si scrive rispettivamente

$$\operatorname{sn}(v, \tau)\ ,\quad \operatorname{cn}(v, \tau)\ ,\quad \operatorname{dn}(v, \tau)\,,$$

ovvero

$$\operatorname{sn}(v, k)\ ,\quad \operatorname{cn}(v, k)\ ,\quad \operatorname{dn}(v, k)\,.$$

Ambedue i sistemi di segnatura sono a determinazione univoca.

§. 135.

Il quadrato k^2 del modulo come funzione modulare.

Studiamo ora quale specie di funzione è il quadrato k^2 del modulo, considerato come funzione del rapporto τ dei periodi. Dimostriamo in

---

[1] Del resto basta stabilire la prima delle (VIII), e le altre ne seguono derivando le (12).

primo luogo che $J(\tau)$ è una funzione razionale del 6.° grado di k^2. E infatti si ha

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

onde

$$1 - k^2 k'^2 = \frac{(e_1 - e_3)^2 - (e_2 - e_3)(e_1 - e_2)}{(e_1 - e_3)^2} = \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - e_1 e_2 - e_2 e_3 - e_3 e_1}{(e_1 - e_3)^2},$$

cioè

$$1 - k^2 k'^2 = \frac{3}{4} \frac{g_2}{(e_1 - e_3)^2}.$$

Ne segue

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{16 (e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2} = \frac{\dfrac{g_2^3}{(e_1 - e_3)^6}}{16 \left(\dfrac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right)^2 \left(\dfrac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}\right)^2}$$

e infine

$$\text{(IX)} \qquad J(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{k^4 k'^4} = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4 (1 - k^2)^2},$$

formola che dimostra la proprietà enunciata.

Si vede dunque che k^2 è una funzione della variabile complessa τ; di più essa è monodroma, come lo dimostra la sua espressione analitica

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

ed inoltre in tutto il semipiano positivo τ, l'asse reale escluso, è finita e diversa da 0 e da 1, come segue dalla (IX) ovvero dalla precedente.

Ricerchiamo ora per quali valori τ' dell'argomento la funzione $k^2(\tau)$ riprenderà il medesimo valore. Intanto se

$$k^2(\tau') = k^2(\tau),$$

sarà a più forte ragione

$$J(\tau') = J(\tau)$$

e quindi

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta},$$

essendo $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ una sostituzione del gruppo modulare. D'altra parte la

tabella (A) del §. 128 (pag. 341) ci mostra immediatamente che l'effetto prodotto sopra $k^2(\tau)$ dalla sostituzione $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ è diverso a seconda del carattere di $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ (mod 2); e precisamente si ha

$$\left.\begin{array}{lll}
k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = k^2(\tau) & \text{per} & \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix} \\
k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = 1-k^2(\tau) & \text{"} & \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0, 1\\ 1, 0\end{pmatrix} \\
k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \frac{k^2(\tau)}{k^2(\tau)-1} & \text{"} & \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 1\\ 0, 1\end{pmatrix} \\
k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \frac{k^2(\tau)-1}{k^2(\tau)} & \text{"} & \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 1\\ 1, 0\end{pmatrix} \\
k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \frac{1}{1-k^2(\tau)} & \text{"} & \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0, 1\\ 1, 1\end{pmatrix} \\
k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \frac{1}{k^2(\tau)} & \text{"} & \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0\\ 1, 1\end{pmatrix}
\end{array}\right\} \pmod 2.$$

Come si vede: *La funzione $k^2(\tau)$ rimane invariata per tutte e sole quelle sostituzioni del gruppo modulare, che appartengono al sottogruppo* $\Gamma_2 \equiv \begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix}$ *(mod 2); per le altre essa subisce le sostituzioni lineari del gruppo anarmonico*

$$\left(k^2, 1-k^2, \frac{k^2}{k^2-1}, \frac{k^2-1}{k^2}, \frac{1}{1-k^2}, \frac{1}{k^2}\right).$$

Di qui, per quanto si è visto alla fine del §. 134, risulta altresì il teorema:

Le funzioni ellittiche di Jacobi

$$\operatorname{sn}(v, \tau), \quad \operatorname{cn}(v, \tau), \quad \operatorname{dn}(v, \tau),$$

considerate come funzioni del rapporto τ dei periodi, restano invariate per tutte le sostituzioni del sottogruppo $\Gamma_2 \equiv \begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix}$ (mod 2).

Come si trasformino per le altre sostituzioni del gruppo modulare sarà esaminato fra breve (Vedi §. 137).

§. 136.

Formole d'addizione per $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$.

Diamo ora le formole d'addizione degli argomenti per le funzioni ellittiche di Jacobi $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$, mediante le quali si esprimono

$$\operatorname{sn}(v_1+v_2)\ ,\ \operatorname{cn}(v_1+v_2)\ ,\ \operatorname{dn}(v_1+v_2)$$

razionalmente per

$$\operatorname{sn} v_1\ ,\ \operatorname{cn} v_1\ ,\ \operatorname{dn} v_1\ ;\ \operatorname{sn} v_2\ ,\ \operatorname{cn} v_2\ ,\ \operatorname{dn} v_2 .$$

Cominciamo dal caso particolare in cui uno degli argomenti è un semiperiodo

$$\mathrm{K}\ ,\ i\,\mathrm{K}'\ ,\ \mathrm{K}+i\,\mathrm{K}' .$$

Ricordando le (VII) pag. 354, che esprimono $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ per la $\wp u$ e le formole d'addizione dei semiperiodi nella $\wp u$ (pag. 286), troviamo subito

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sn}(v+\mathrm{K}) = a\dfrac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}\ ,\quad \operatorname{cn}(v+\mathrm{K}) = b\,\dfrac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v}\ ,\quad \operatorname{dn}(v+\mathrm{K}) = \dfrac{c}{\operatorname{dn} v} \\[2ex] \operatorname{sn}(v+i\,\mathrm{K}') = \dfrac{a'}{\operatorname{sn} v}\ ,\quad \operatorname{cn}(v+i\,\mathrm{K}') = b'\,\dfrac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v}\ ,\quad \operatorname{dn}(v+i\,\mathrm{K}') = c'\,\dfrac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} v}\ , \end{array}\right.$$

dove a, b, c, a', b', c' sono fattori costanti [1].

Per determinare questi fattori si faccia nella prima e nella terza $v=0$, nella seconda invece $v=-\mathrm{K}$, e nelle ultime tre si moltiplichi per v e si passi al limite per $v=0$. Avendo riguardo alle formole (8*) (9*) (pag. 353), si trova così per le formole domandate:

$$(13)\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sn}(v+\mathrm{K}) = \dfrac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}\ ,\quad \operatorname{cn}(v+\mathrm{K}) = -\,k'\,\dfrac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v}\ ,\quad \operatorname{dn}(v+\mathrm{K}) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} v} \\[2ex] \operatorname{sn}(v+i\,\mathrm{K}') = \dfrac{1}{k\operatorname{sn} v}\ ,\quad \operatorname{cn}(v+i\,\mathrm{K}') = -\dfrac{i}{k}\,\dfrac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v}\ ,\quad \operatorname{dn}(v+i\,\mathrm{K}') = -\,i\,\dfrac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} v}\ . \end{array}\right.$$

---

[1] Queste formole si possono anche stabilire subito direttamente, considerando che in ciascuna di esse le funzioni a destra e sinistra hanno a comune periodi, infiniti ed infinitesimi.

Ne seguono altresì le formole

$$(14) \qquad \operatorname{sn}(v+K+iK') = \frac{\operatorname{dn} v}{k \operatorname{cn} v}, \quad \operatorname{cn}(v+K+iK') = -\frac{ik'}{k \operatorname{cn} v},$$

$$\operatorname{dn}(v+K+iK') = ik' \frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{cn} v};$$

e facendo $v=0$, si hanno le altre pure notevoli:

$$\operatorname{sn}(K+iK') = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{cn}(K+iK') = -\frac{ik'}{k}.$$

Per stabilire ora le formole generali d'addizione, consideriamo le tre funzioni ellittiche

$$\operatorname{sn} v \operatorname{sn}(v+\alpha), \quad \operatorname{cn} v \operatorname{cn}(v+\alpha), \quad \operatorname{dn} v \operatorname{dn}(v+\alpha)$$

(ove α è una costante qualunque), che hanno evidentemente i periodi $2K$, $2iK'$ e nel parallelogrammo fondamentale $(2K, 2iK')$ hanno due infiniti del 1.° ordine nei punti

$$v_\infty \equiv iK', \quad -\alpha+iK',$$

con residui naturalmente eguali e di segno contrario. Ora i residui in $v=iK'$ delle tre funzioni sono rispettivamente

$$\frac{1}{k} \operatorname{sn}(\alpha+iK'), \quad -\frac{i}{k} \operatorname{cn}(\alpha+iK'), \quad -i \operatorname{dn}(\alpha+iK'),$$

ossia per le (13):

$$\frac{1}{k^2 \operatorname{sn} \alpha}, \quad -\frac{1}{k^2} \frac{\operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha}, \quad -\frac{\operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha}.$$

Per conseguenza le due funzioni

$$\operatorname{dn} v \operatorname{dn}(v+\alpha) + k^2 \operatorname{cn} \alpha \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(v+\alpha)$$
$$\operatorname{cn} v \operatorname{cn}(v+\alpha) + \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(v+\alpha)$$

sono doppiamente periodiche e prive di poli, e quindi costanti, e siccome per $v=0$ si riducono rispettivamente a $\operatorname{dn} \alpha$, $\operatorname{cn} \alpha$ avremo

$$(a) \qquad \begin{cases} \operatorname{cn} v \operatorname{cn}(v+\alpha) + \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(v+\alpha) = \operatorname{cn} \alpha \\ \operatorname{dn} v \operatorname{dn}(v+\alpha) + k^2 \operatorname{cn} \alpha \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(v+\alpha) = \operatorname{dn} \alpha. \end{cases}$$

Permutiamo nella prima α con v e risolviamo le due equazioni così ottenute

$$\begin{cases} \operatorname{cn} v \operatorname{cn}(v+\alpha) + \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(v+\alpha) = \operatorname{cn} \alpha \\ \operatorname{cn} \alpha \operatorname{cn}(v+\alpha) + \operatorname{dn} v \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn}(v+\alpha) = \operatorname{cn} v \end{cases}$$

rispetto a $\operatorname{sn}(v+\alpha)$. Otteniamo la prima formola d'addizione

$$\operatorname{sn}(v+\alpha) = \frac{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \alpha}{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha - \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v},$$

alla quale si suol dare comunemente un'altra forma moltiplicando nel 2.° membro numeratore e denominatore per

$$\operatorname{sn} v \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha + \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v.$$

Così il denominatore diventa

$$\operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 \alpha \operatorname{dn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{cn}^2 v \operatorname{dn}^2 v = (\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \alpha)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 v)$$

e perciò

$$\operatorname{sn}(v+\alpha) = \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha + \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 v}.$$

Sostituendo nelle (a), si trovano le formole per $\operatorname{cn}(v+\alpha)$, $\operatorname{dn}(v+\alpha)$, che riepiloghiamo nel quadro:

$$(15) \qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(v+\alpha) = \dfrac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha + \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 v} \\[2ex] \operatorname{cn}(v+\alpha) = \dfrac{\operatorname{cn} v \operatorname{cn} \alpha - \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 v} \\[2ex] \operatorname{dn}(v+\alpha) = \dfrac{\operatorname{dn} v \operatorname{dn} \alpha - k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 v}. \end{cases}$$

Si osserverà che ciascuna di queste formole si può scrivere in guisa da far figurare soltanto la funzione ellittica a cui è relativa e la sua derivata. Così p. e.:

$$\operatorname{sn}(v+\alpha) = \frac{\operatorname{sn} v \dfrac{d \operatorname{sn} \alpha}{d\alpha} + \operatorname{sn} \alpha \dfrac{d \operatorname{sn} v}{dv}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 v} \text{ ecc.}$$

Dalle (15), cangiando α in $-\alpha$ e sommando, risultano le altre

$$(15^*)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(v+\alpha)+\operatorname{sn}(v-\alpha)=\dfrac{2\operatorname{sn}v\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 v} \\[2ex] \operatorname{cn}(v+\alpha)+\operatorname{cn}(v-\alpha)=\dfrac{2\operatorname{cn}v\operatorname{cn}\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 v} \\[2ex] \operatorname{dn}(v+\alpha)+\operatorname{dn}(v-\alpha)=\dfrac{2\operatorname{dn}v\operatorname{dn}\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 v}\,. \end{cases}$$

A queste formole fondamentali d'addizione per le funzioni di Jacobi se ne collegano svariatissime altre, delle quali citeremo qui soltanto quelle che danno i prodotti

$$\operatorname{sn}(v+\alpha)\operatorname{sn}(v-\alpha)\ ,\quad \operatorname{cn}(v+\alpha)\operatorname{cn}(v-\alpha)\ ,\quad \operatorname{dn}(v+\alpha)\operatorname{dn}(v-\alpha)\,.$$

Queste si deducono nel modo più semplice dalle (15*) cangiando rispettivamente nella prima, seconda e terza di esse v in

$$v+\mathrm{K}\ ,\quad v+\mathrm{K}+i\,\mathrm{K}'\ ,\quad v+i\,\mathrm{K}'$$

ed applicando le formole (13), (14) d'addizione dei semiperiodi. Si ottengono in tal guisa le formole domandate:

$$(16)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(v+\alpha)\operatorname{sn}(v-\alpha)=\dfrac{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 v} \\[2ex] \operatorname{cn}(v+\alpha)\operatorname{cn}(v-\alpha)=\dfrac{\operatorname{cn}^2 v\operatorname{cn}^2\alpha-k'^2\operatorname{sn}^2 v\operatorname{sn}^2\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 v}=\dfrac{\operatorname{cn}^2 v-\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{dn}^2 v}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 v} \\[2ex] \operatorname{dn}(v+\alpha)\operatorname{dn}(v-\alpha)=\dfrac{\operatorname{dn}^2 v\operatorname{dn}^2\alpha+k^2k'^2\operatorname{sn}^2 v\operatorname{sn}^2\alpha}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 v}=\dfrac{\operatorname{dn}^2 v-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{cn}^2 v}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 v}\,. \end{cases}$$

§. 137.

Trasformazioni di 1.° ordine per sn v, cn v, dn v.

Abbiamo veduto che le funzioni ellittiche di Jacobi

$$\operatorname{sn}(v,\tau)\ ,\quad \operatorname{cn}(v,\tau)\ ,\quad \operatorname{dn}(v,\tau)$$

restano invariate quando sul rapporto τ dei periodi si eseguisce una so-

stituzione

$$\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$$

del sottogruppo $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix}$ (mod 2). Ci proponiamo ora di esaminare come cangiano per le altre sostituzioni del gruppo modulare. Manifestamente avremo qui 6 casi diversi, a seconda del carattere della sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ (mod 2); ma basterà che ricerchiamo l'effetto prodotto dall'una e dall'altra delle due sostituzioni elementari del gruppo modulare

$$\begin{pmatrix}0\,, & 1\\ -1\,, & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\,, & 1\\ 0\,, & 1\end{pmatrix}.$$

A tale oggetto esprimeremo $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ per le σ colle formole (C) pag. 352 ed esamineremo il corrispondente effetto prodotto sulle σ. Indicando con $2\bar{\omega}$, $2\bar{\omega}'$ i nuovi periodi, porremo per ciò una prima volta

$$(\alpha) \qquad \bar{\omega}' = \omega \qquad \bar{\omega} = -\omega'$$

ed una seconda volta

$$(\beta) \qquad \bar{\omega}' = \omega' + \omega \qquad \bar{\omega} = \omega\,.$$

Poniamo

$$\bar{\sigma}_r u = \sigma_r(u \mid \bar{\omega}, \bar{\omega}')$$

e dalla tabella (A) pag. 341 dedurremo immediatamente:

$$\left.\begin{array}{llll} \bar{\sigma} u = \sigma u & \bar{\sigma}_1 u = \sigma_3 u & \bar{\sigma}_2 u = \sigma_2 u & \bar{\sigma}_3 u = \sigma_1 u \\ & e'_1 = e_3 & e'_2 = e_2 & e'_2 = e_1 \end{array}\right\} \text{nel caso } (\alpha)$$

e invece

$$\left.\begin{array}{llll} \bar{\sigma} u = \sigma u & \bar{\sigma}_1 u = \sigma_1 u & \bar{\sigma}_2 u = \sigma_3 u & \bar{\sigma}_3 u = \sigma_2 u \\ & e'_1 = e_1 & e'_2 = e_3 & e'_3 = e_2 \end{array}\right\} \text{nel caso } (\beta).$$

Ora si hanno le formole

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(v,\tau) &= \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \\ \operatorname{cn}(v,\tau) &= \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} \\ \operatorname{dn}(v,\tau) &= \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \tau &= \frac{\omega'}{\omega} \\ v &= \sqrt{e_1-e_3}\,.\,u \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(\bar v,\bar\tau) &= \sqrt{e'_1-e'_3}\,\frac{\bar\sigma u}{\bar\sigma_3 u} \\ \operatorname{cn}(\bar v,\bar\tau) &= \frac{\bar\sigma_1 u}{\bar\sigma_3 u} \\ \operatorname{dn}(\bar v,\bar\tau) &= \frac{\bar\sigma_2 u}{\bar\sigma_3 u} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \bar\tau &= \frac{\bar\omega'}{\bar\omega} \\ \bar v &= \sqrt{e'_1-e'_3}\,u, \end{aligned}$$

onde risulta

$$\bar v = \frac{\sqrt{e_3-e_1}}{\sqrt{e_1-e_3}}\,v = -i\,v \quad \text{nel caso } (\alpha),$$

$$\bar v = \frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}}\,v = k'v \quad \text{nel caso } (\beta).$$

Le formole cercate sono dunque le seguenti

$$\text{(X)} \qquad \operatorname{sn}\left(iv, -\frac{1}{\tau}\right) = i\,\frac{\operatorname{sn}(v,\tau)}{\operatorname{cn}(v,\tau)}\,, \quad \operatorname{cn}\left(iv, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\operatorname{cn}(v,\tau)}\,,$$

$$\operatorname{dn}\left(iv, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\operatorname{dn}(v,\tau)}{\operatorname{cn}(v,\tau)}$$

$$\text{(XI)} \qquad \operatorname{sn}(k'v,\tau+1) = k'\,\frac{\operatorname{sn}(v,\tau)}{\operatorname{dn}(v,\tau)}\,, \quad \operatorname{cn}(k'v,\tau+1) = \frac{\operatorname{cn}(v,\tau)}{\operatorname{dn}(v,\tau)}\,,$$

$$\operatorname{dn}(k'v,\tau+1) = \frac{1}{\operatorname{dn}(v,\tau)}\,.$$

Se si osserva poi che nel primo caso il modulo trasformato è

$$k\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{e_2-e_1}}{\sqrt{e_3-e_1}} = k'$$

e nel secondo

$$k\,(\tau+1) = \frac{\sqrt{e_3-e_2}}{\sqrt{e_1-e_2}} = -\frac{ik}{k'}\,,$$

ponendo in evidenza i moduli anzichè il rapporto dei periodi, potremo

scrivere:

$$(\mathrm{X}^*)\quad \mathrm{sn}\,(iv, k') = i\,\frac{\mathrm{sn}\,(v, k)}{\mathrm{cn}\,(v, k)}\,,\quad \mathrm{cn}\,(iv, k') = \frac{1}{\mathrm{cn}\,(v, k)}\,,\quad \mathrm{dn}\,(iv, k') = \frac{\mathrm{dn}\,(v, k)}{\mathrm{cn}\,(v, k)}$$

$$(\mathrm{XI}^*)\quad \mathrm{sn}\left(k'v, \frac{ik}{k'}\right) = k'\,\frac{\mathrm{sn}\,(v, k)}{\mathrm{dn}\,(v, k)}\,,\quad \mathrm{cn}\left(k'v, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\mathrm{cn}\,(v, k)}{\mathrm{dn}\,(v, k)}\,,$$

$$\mathrm{dn}\left(k'v, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\mathrm{dn}\,(v, k)}\,.$$

Le (X*) diconsi le formole della *trasformazione complementare*, come quelle che danno il passaggio dalle funzioni ellittiche di modulo k a quelle col modulo complementare k'.

Capitolo XIII.

Le funzioni $\wp u$, σu e $\sigma_r u$ per valori reali degli invarianti e le funzioni di Jacobi $\mathrm{sn}\,v$, $\mathrm{cn}\,v$, $\mathrm{dn}\,v$, per valori reali del modulo k fra 0 e 1. — Integrali ellittici di Legendre e Jacobi.

§. 138.

Osservazioni fondamentali sulla funzione $\wp(u; g_2, g_3)$ con invarianti reali.

Fino ad ora ci siamo occupati della teoria generale delle funzioni ellittiche, e in particolare delle funzioni di Weierstrass e di Jacobi, senza distinzione fra i valori reali od immaginarii degli argomenti o delle funzioni. Ma nelle applicazioni pratiche è il reale soltanto che entra in considerazione, ed è per ciò necessario che studiamo meglio l'andamento delle nostre funzioni, con speciale riguardo ai valori reali, per quei casi che si presentano nelle effettive applicazioni.

Le funzioni ellittiche si introducono sempre in pratica in problemi d'inversione, cioè nella integrazione di funzioni razionali

$$\mathrm{F}\left(w, \sqrt{\mathrm{P}\,(w)}\right),$$

essendo $\mathrm{P}\,(w)$ un polinomio di 3.° o 4.° grado (§. 126). E siccome i polinomii $\mathrm{P}\,(w)$, che si presentano effettivamente, sono sempre a coefficienti

reali e quindi anche ad invarianti reali g_2, g_3, così il problema fondamentale da proporsi è il seguente: *Studiare l'andamento della funzione*

$$\wp(u; g_2, g_3)$$

per valori reali degli invarianti g_2, g_3.

Cominciamo per questo dall'osservare che dallo sviluppo della trascendente intera (pag. 280).

$$\sigma(u; g_2, g_3) = u - \frac{g_2}{240} u^5 + \dots,$$

i coefficienti essendo nel caso attuale reali (perchè funzioni razionali intere a coefficienti razionali di g_2, g_3), risulta: *La funzione* σu *con invarianti reali è reale per valori reali e puramente immaginaria per valori puramente immaginarii dell'argomento* u.

Lo stesso vale evidentemente per la funzione ζu mentre invece: *La funzione* $\wp(u; g_2, g_3)$ *con invarianti reali è reale tanto sull'asse delle quantità reali, come su quello delle immaginarie.*

Ma in generale, quando una funzione analitica è reale lungo un tratto rettilineo del piano complesso, in punti simmetrici rispetto a questo tratto assume valori coniugati [1], onde si vede che: *La* $\wp(u; g_2, g_3)$ *in punti*

---

[1] Tutto si riduce a dimostrare questa proprietà pel caso di un tratto dell'asse reale, il caso generale riportandosi a questo con una sostituzione lineare intera sull'argomento. Ora se α è un punto dell'asse reale, nel cui intorno la funzione $f(z)$ sia regolare, si avrà

$$f(z) = \sum a_n (z-\alpha)^n \tag{1}$$

e i coefficienti a_n saranno per ipotesi reali, onde a valori coniugati di z *entro il cerchio di convergenza di* (1) corrisponderanno certamente valori coniugati per tutte le derivate. Ma allora, se un prolungamento analitico di (1) è

$$f(z) = \sum b_n (z-\gamma)^n,$$

si vede subito che un secondo prolungamento analitico sarà $f(z) = \Sigma \overline{b}_n (z-\overline{\gamma})^n$ essendo $\overline{\gamma}, \overline{b}_n$ le coniugate di γ, b_n. Così ad ogni ulteriore prolungamento analitico di $f(z)$ corrisponderà un prolungamento coniugato, ciò che dimostra il teorema.

simmetrici rispetto all'asse delle quantità reali, o delle immaginarie, assume valori coniugati.

Dopo di ciò è facile vedere che nel caso attuale ad ogni periodo 2Ω della $\wp u$ corrisponderà un periodo coniugato $2\Omega_0$.

Sia infatti 2Ω un periodo qualunque di $\wp u$; se u è reale $= x$, pei valori coniugati

$$x + 2\Omega \ , \quad x + 2\Omega_0$$

dell'argomento la $\wp$ assumerà valori coniugati e, poichè $\wp(x+2\Omega) = \wp(x)$ è reale, sarà $\wp(x+2\Omega_0) = \wp x$. Dunque la funzione

$$\wp(u+2\Omega_0) - \wp u \ ,$$

essendo nulla sull'asse reale, sarà costantemente nulla, cioè $2\Omega_0$ è anche un periodo di $\wp u$, c. d. d.

Ora osserviamo che, fissati i valori (reali) degli invarianti g_2, g_3, i periodi fondamentali 2ω, $2\omega'$ della $\wp u$ sono determinati soltanto a meno di una sostituzione lineare $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ del gruppo modulare. Poichè il valore

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}$$

dell'invariante assoluto è reale, un corrispondente valore di $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ sarà certamente sul contorno del triangolo fondamentale (Cf. §. 119) e noi intenderemo colla notazione

$$2\omega \ , \quad 2\omega'$$

quei periodi fondamentali che rispondono ad un rapporto τ sul detto contorno. A questa coppia di periodi ne sostituiremo poi ogni volta una seconda *equivalente*, che indicheremo con

$$2\omega_1 \ , \quad 2\omega_3 \ ,$$

più adatta nei singoli casi alla ricerca.

§. 139.

Caso del discriminante positivo $\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2 > 0$.

Rappresentazione conforme di un rettangolo sul semipiano.

Dobbiamo distinguere nel nostro studio due casi, secondo che il valore del discriminante

$$\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2 = 16\,(e_1 - e_2)^2\,(e_2 - e_3)^2\,(e_3 - e_1)^2$$

è positivo o negativo. Consideriamo qui il primo caso; allora si ha evidentemente

$$g_2 > 0\ ,\quad J(\tau) > 1\ .$$

e però l'indice di τ nel triangolo fondamentale è sull'asse immaginario.

Inoltre le tre radici e_1, e_2, e_3 dell'equazione cubica

$$4\, e^3 - g_2\, e - g_3 = 0$$

sono, nel caso attuale, tutte tre reali.

Dalle formole

$$g_2 = \frac{60}{\omega^4} \sum{}' \frac{1}{(2\,m + 2\,n\,\tau)^4}\ ,\quad g_3 = \frac{140}{\omega^6} \sum{}' \frac{1}{(2\,m + 2\,n\,\tau)^6}\ ,$$

essendo reali le serie dei secondi membri, segue che ω^2 è reale e quindi ω reale, o puramente immaginario, e corrispondentemente ω' puramente immaginario o reale. Porremo nel primo caso

$$\omega_1 = \omega\ ,\quad \omega_3 = \omega'\ ,$$

e nel secondo

$$\omega_1 = -\omega'\ ,\quad \omega_3 = \omega\ ,$$

$\left(\text{ciò che equivale a cangiare } \tau \text{ in } -\dfrac{1}{\tau}\right)$ ed avremo quindi che: *i due periodi fondamentali* $2\,\omega_1$, $2\,\omega_3$ *saranno reale il primo, e puramente immaginario il secondo.*

Il parallelogrammo fondamentale dei periodi diventerà quindi nel caso attuale il rettangolo

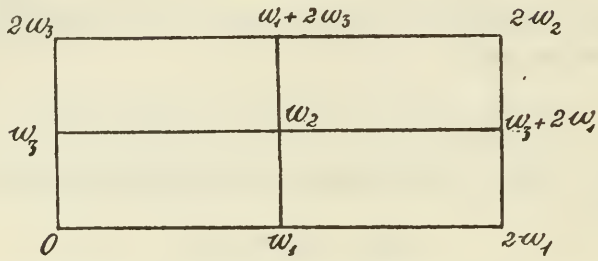
$$(0\ ,\ 2\,\omega_1\ ,\ 2\,\omega_1 + 2\,\omega_3\ ,\ 2\,\omega_3)\,.$$

Dividiamolo per mezzo delle linee mediane

$$(\omega_1, \omega_1+2\omega_3) \ , \ (\omega_3, 2\omega_1+\omega_3)$$

in quattro rettangoli parziali congruenti (come nella figura qui sotto)

Fig. 10.



ed osserviamo che, a causa della formola

$$\wp(2\omega_1+2\omega_3-u) = \wp u \ ,$$

nel terzo di questi rettangoli

$$(\omega_1+\omega_3 \ , \ 2\omega_1+\omega_3 \ , \ 2\omega_1+2\omega_3 \ , \ \omega_1+2\omega_3)$$

la $\wp u$ riprende i valori già presi nel primo rettangolo

$$(0 \ , \ \omega_1 \ , \ \omega_1+\omega_3 \ , \ \omega_3) \ ,$$

nel quale adunque assumerà ogni suo valore una sola volta. In punti simmetrici rispetto all'asse reale o immaginario la $\wp u$ assume valori coniugati e lo stesso accade quindi in punti simmetrici rispetto alle due linee mediane, sulle quali conseguentemente la $\wp u$ è reale [1]. Ne segue che nel secondo e quarto dei detti rettangoli minori $\wp u$ prende i valori coniugati a quelli del primo e terzo rettangolo.

Su tutto il contorno del primo rettangolo

$$(0 \ , \ \omega_1 \ , \ \omega_1+\omega_3 \ , \ \omega_3)$$

la funzione $\wp u$ è reale; e poichè in prossimità di $u=0$ sull'asse reale è grandissima positiva, e invece sull'asse immaginario grandissima nega-

[1] Ciò risulta anche immediatamente dalle formole d'addizione dei semiperiodi (pag. 286), le radici e_1, e_2, e_3 essendo qui reali.

tiva, come risulta dallo sviluppo

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{28} u^2 + \dots$$

nell'intorno di $u = 0$, vediamo che percorrendo il detto contorno nel senso positivo, a partire dall'origine, la $\wp u$ andrà *continuamente* decrescendo da $+\infty$ a $-\infty$. Ora nei vertici

$$\omega_1 \ , \quad \omega_1 + \omega_3 = \omega_2 \ , \quad \omega_3$$

la $\wp u$ assume i valori

$$\wp \omega_1 = e_1 \ , \quad \wp \omega_2 = e_2 \ , \quad \wp \omega_3 = e_3 .$$

Si vede dunque che e_1, e_2, e_3 risultano così ordinate per grandezza decrescente, cioè:

$$e_1 > e_2 > e_3 ;$$

e poichè

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 ,$$

sarà e_1 positiva, e_3 negativa. Quanto al segno di e_2, a causa di

$$g_2 = 4 \, e_1 \, e_2 \, e_3 ,$$

sarà evidentemente opposto a quello di g_2.

Ogni valore reale è già preso dalla $\wp u$ due volte in punti non equivalenti dei lati e delle mediane del rettangolo dei periodi, onde segue che nell'interno di ciascuno dei quattro rettangoli minori la $\wp u$ è sempre complessa e per ciò il coefficiente dell'immaginario in $\wp u$ serba ivi sempre lo stesso segno. Così p. e. nell'interno del primo rettangolo $(0, \omega_1, \omega_1 + \omega_3, \omega_3)$, a causa dell'andamento da $+\infty$ a $-\infty$ sul contorno percorso in verso positivo, il coefficiente dell'immaginario in $\wp u$ è sempre negativo. È chiaro poi che ogni valore

$$s = \alpha + i \beta ,$$

con $\beta < 0$, sarà preso da $\wp u$ una ed una sola volta nell'interno del detto rettangolo. D'altronde $\frac{ds}{du} = \wp' u$ non vi s'annulla mai, nè diventa infinita, salvo ai quattro vertici $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_3, \omega_3$; per ciò se poniamo

$$s = \wp u$$

ed interpretiamo s nel suo piano complesso, vediamo che: *La funzione*

$s = \wp u$ dà la rappresentazione conforme biunivoca del rettangolo $(0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ *sul semipiano negativo s; gli unici punti eccezionali della rappresentazione sono i vertici del rettangolo.*

Si osservi in fine che, dando a g_2, g_3 convenienti valori reali con $g_2^3 - 27\, g_3^2 > 0$, si può far coincidere il nostro rettangolo con un rettangolo qualunque dato a priori, onde risulta: *Il problema della rappresentazione conforme di un rettangolo sopra un semipiano conduce direttamente alla funzione di Weierstrass $\wp(u; g_2, g_3)$ con invarianti reali e discriminante positivo.*

§. 140.

Andamento della $\wp' u$ — La cubica $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$.

Osserviamo anche l'andamento di $\wp' u$ sul contorno del rettangolo $(0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Mentre l'argomento u e la $\wp u$ lungo i quattro tratti del contorno variano rispettivamente negli intervalli:

$$\begin{array}{lllll} u & \text{da } 0 \ldots \omega_1 \ ; & \omega_1 \ldots \omega_2 \ ; & \omega_2 \ldots \omega_3 \ ; & \omega_3 \ldots 0 \\ \wp u & +\infty \ldots e_1 \ ; & e_1 \ldots e_2 \ ; & e_2 \ldots e_3 \ ; & e_3 \ldots -\infty , \end{array}$$

vediamo che l'andamento di

$$\wp' u = -2\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}$$

è il seguente:

$$\left.\begin{array}{c} u \text{ da } 0 \ldots \omega_1 \\ \wp' u \text{ reale negativa} \\ \text{da } -\infty \ldots 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} u \text{ da } \omega_1 \ldots \omega_2 \\ \wp' u \text{ immaginaria} \\ \text{positiva} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} u \text{ da } \omega_2 \ldots \omega_3 \\ \wp' u \text{ reale positiva} \\ \text{da } 0 \text{ a } 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} u \text{ da } \omega_3 \ldots 0 \\ \wp' u \text{ immaginaria} \\ \text{negativa.} \end{array}\right.$$

In particolare si osservi: *I valori dell'argomento u, che rendono simultaneamente reali $\wp u$, $\wp' u$, sono della forma*

$$u = \xi \ , \quad u = \xi + \omega_3 \quad (\xi \text{ reale}).$$

Si ottiene una chiara interpretazione geometrica del corso reale delle funzioni $\wp u$, $\wp' u$ nel modo seguente. Essendo x, y coordinate cartesiane di un punto mobile in un piano, si consideri la curva definita dalle equazioni

$$x = \wp u \ , \quad y = \wp' u \, ,$$

che è evidentemente la cubica

$$(1) \qquad y^2 = 4\,\wp^3 - g_2 x - g_3 \, .$$

Ora importa osservare che: *questa equazione rappresenta la più generale curva del terzo ordine, a meno di trasformazioni projettive.* Per vederlo nel modo più semplice passiamo alle coordinate omogenee, ponendo

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

sicchè l'equazione diventa:

$$x_2^2 x_3 - 4x_1^3 + g_2 x_1 x_3^2 + g_3 x_3^3 = 0. \tag{2}$$

Se esaminiamo quale particolare relazione ha l'attuale triangolo di riferimento colla curva, vediamo che hanno luogo le seguenti proprietà:

1.° il vertice (0, 1, 0) è un flesso della curva e il lato $x_3 = 0$ è la corrispondente tangente di flesso.

2.° il lato $x_2 = 0$ è la *polare armonica* del flesso (cioè insieme colla tangente $x_3 = 0$ di flesso costituisce la conica polare del flesso).

3.° il lato $x_1 = 0$ è la polare lineare del vertice (1, 0, 0), punto d'incontro delle due rette ora dette.

Viceversa si vedrà subito che, preso il triangolo di riferimento nel modo descritto, si può dare all'equazione della curva del 3.° ordine la forma normale (2) di Weierstrass. Abbiamo dunque il risultato: *Le coordinate di un punto mobile sopra una curva generale del 3.° ordine possono esprimersi per funzioni ellittiche di un parametro.*

Si osservi di più che, se l'equazione data della cubica è a coefficienti reali, la trasformazione indicata si può ottenere per via reale e per ciò gli invarianti g_2, g_3 saranno reali [1]. Ritornando ora al caso particolare, che trattiamo attualmente, del discriminante $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$, esaminiamo il corso reale della nostra curva (1). Per quanto si è visto sopra, otterremo i punti reali della nostra curva o prendendo

$$u = \xi \quad (\xi \text{ reale}),$$

ovvero

$$u = \xi + \omega_3.$$

Basterà naturalmente far variare ξ fra $-\omega_1$ e $+\omega_1$, perchè quando ξ aumenta di multipli di $2\omega_1$ il punto della curva riprende la medesima

---

[1] Prescindendo da coefficienti numerici, g_2, g_3 coincidono precisamente cogli invarianti S, T di 4.° e 6.° grado rispettivamente della forma cubica ternaria. (Salmon. *Algèbre supérieure.* Treizieme Leçon).

posizione. Anzi, a causa delle formole

$$\wp(-u) = \wp u$$
$$\wp'(-u) = -\wp' u,$$

basterà far crescere ξ da 0 a ω_1 e si otterrà una prima metà della curva, che ribaltata attorno all'asse delle x darà la seconda metà.

Ora, quando u cresce da 0 ad ω_1, la $x = \wp u$ decresce da $+\infty$ ad $e_1 > 0$, mentre $y = \wp' u$ cresce da $-\infty$ a 0, sicchè si ha una prima metà di un ramo infinito della curva al di sotto dell'asse delle x, che esce dal punto $(e_1, 0)$ dell'asse delle x, ortogonalmente a quest'asse.

Ribaltando questa prima metà del ramo attorno all'asse x, si ottiene il ramo completo infinito, che contiene tutti e soli i punti reali della curva, *corrispondenti a valori reali di u.*

Veniamo a considerare gli altri valori di u, che danno ancora punti reali della curva, cioè i valori della forma $u = \xi + \omega_3$, dove facciamo crescere ξ da 0 a ω_1; allora $x = \wp u$ crescerà da e_3 a e_2 ed $y = \wp' u$ passerà per una serie di valori positivi, annullandosi agli estremi. Corrispondentemente avremo un tratto finito della nostra curva che parte dal punto $(e_3, 0)$ dell'asse delle x per arrivare al punto $(e_2, 0)$ e che sarà ortogonale negli estremi all'asse stesso.

Per ribaltamento attorno all'asse delle x otteniamo la seconda parte reale della cubica, costituita di una parte chiusa (ovale). Dunque: *La cubica*

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

nel caso di

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 > 0,$$

consta di due rami diversi, di cui l'uno è infinito, l'altro un ovale.

§. 141.

Alcune applicazioni geometriche.

La rappresentazione parametrica dei punti di una cubica generale per mezzo delle funzioni ellittiche dà luogo ad una serie di interessanti applicazioni geometriche, di cui qui accenneremo solo le fondamentali, avvertendo che nel presente §. non facciamo più alcuna ipotesi speciale riguardo agli invarianti g_2, g_3, che possono essere reali o complessi.

Un punto mobile (x, y) della cubica è dato dalle formole

$$x = \wp u \ , \quad y = \wp' u \, ;$$

ad ogni valore di u corrisponde un unico punto della curva ed il punto resta il medesimo per valori congrui dell'argomento.

Viceversa, se due punti u_1, u_2 della curva coincidono, si ha $u_1 \equiv u_2$, cioè

$$u_1 = u_2 + 2\, m\, \omega_1 + 2\, n\, \omega_3 \quad (m, n \text{ interi}).$$

Cerchiamo ora la condizione perchè tre punti u_1, u_2, u_3 della cubica siano in linea retta. Se $y = ax + b$ è l'equazione della retta che li contiene [1], la funzione ellittica del 3.° ordine

$$\wp' u - a\, \wp u - b \, ,$$

con un polo di 3.° ordine nell'origine, ha gli infinitesimi incongrui: u_1, u_2, u_3 e perciò si ha

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \, .$$

È questa, come subito si vede, la condizione necessaria e sufficiente perchè i tre punti u_1, u_2, u_3 siano allineati (teorema d'Abel).

Di qui si può dedurre di nuovo il teorema d'addizione per la $\wp u$, sotto la forma del §. 108 (pag. 289):

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1+u_2) & -\wp'(u_1+u_2) \\ 1 & \wp u_1 & \wp' u_1 \\ 1 & \wp u_2 & \wp' u_2 \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Più in generale consideriamo una curva d'ordine n

$$f(x, y) = 0$$

e i suoi punti d'incontro colla cubica. La funzione $f(\wp u, \wp' u)$ è una funzione ellittica d'ordine $3n$, che ha dunque $3n$ punti d'infinitesimo $u_1, u_2 \ldots u_{3n}$ [2] ed un solo infinito d'ordine $3n$ in $u = 0$, sicchè pel teo-

---

[1] Il caso in cui l'equazione della retta sia $x = k$ rientra in questo, uno dei tre punti d'incontro essendo allora all'infinito in $u = 0$.

[2] Può anche darsi che, mancando alcuni termini in $f(x, y)$, la funzione ellittica $f(\wp u, \wp' u)$ sia d'ordine minore di $3\,n$, p. e. $3n - r$; allora r delle intersezioni sono raccolte nel flesso all'infinito.

rema d'Abel si ha

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n} \equiv 0 .$$

Questa esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè $3n$ punti $u_1, u_2 \ldots u_{3n}$ della cubica costituiscano i punti d'intersezione della cubica con una curva d'ordine n.

Applichiamo questi teoremi generali alla risoluzione di due problemi:

1.° *Tangenti che da un punto della cubica partono alla cubica stessa.* Sia u il punto di partenza e v il punto di contatto di una delle anzidette tangenti; dovremo avere pel teorema d'Abel

$$u + 2v \equiv 0 ,$$

ciò che dà per v i quattro valori distinti

$$-\frac{u}{2} , \quad -\frac{u}{2} + \omega_1 , \quad -\frac{u}{2} + \omega_2 , \quad -\frac{u}{2} + \omega_3 ,$$

onde si conclude che da ogni punto della cubica si possono condurre quattro tangenti alla cubica.

Se la cubica è reale e a discriminante positivo, vediamo che da ogni punto del ramo infinito partono quattro tangenti tutte reali alla curva, laddove da un punto dell'ovale partono tangenti tutte immaginarie.

2.° *Punti d'inflessione.* Un flesso della curva è un punto ove la tangente ha tre punti coincidenti a comune colla curva.

Il parametro u di un flesso deve soddisfare alla condizione (necessaria e sufficiente):

$$3u \equiv 0 ;$$

si hanno quindi *nove flessi* con argomento

$$u = \frac{2m\,\omega_1 + 2n\,\omega_3}{3} ; \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 .$$

Se u_1, u_2 sono due flessi, ed u_3 il punto ove la loro congiungente incontra la cubica, si ha

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 , \quad 3u_1 \equiv 0 , \quad 3u_2 \equiv 0 ,$$

onde anche $3u_3 \equiv 0$; ne segue il noto teorema: *La congiungente due flessi di una cubica incontra la curva in un terzo flesso.*

Ritornando al caso di una cubica reale a discriminante $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$, vediamo allora che dei nove flessi tre soltanto sono reali e cioè i flessi

$$0 \,,\ \frac{2\omega_1}{3} \,,\ \frac{4\omega_1}{3} \,,$$

situati sul ramo infinito della curva.

§. 142.

La $\wp(u;\, g_2,\, g_3)$ con invarianti reali e discriminante negativo.

Veniamo al caso del discriminante negativo, riprendendo le considerazioni dei §§. 138, 139. Essendo

$$g_2^3 - 27 g_3^2 < 0 \,,$$

potrà essere $g_2 > 0$ o $g_2 < 0$; nel 1.° caso sarà

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} < 0$$

e nel secondo

$$0 < J < 1 \,,$$

cioè $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ sarà nel 1.° caso sul lato rettilineo $R(\tau) = -\frac{1}{2}$ del triangolo fondamentale, nel secondo invece sull'arco circolare $|\tau| = 1$. Insieme ai periodi 2ω, $2\omega'$, la $\wp u$ ammetterà i periodi coniugati $2\omega_0$, $-2\omega'_0$ [1] e sussisteranno quindi le formole:

$$\begin{cases} -\omega'_0 = \alpha\omega' + \beta\omega \\ \omega_0 = \gamma\omega' + \delta\omega \,, \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi e, poichè queste formole debbono anche valere cangiando i in $-i$, si vede che anche $2\omega_0$, $-2\omega'_0$ saranno periodi fondamentali, cioè sarà $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Ora essendo

$$-\tau_0 = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

---

[1] Prendiamo $-2\omega'_0$ in luogo di $2\omega'_0$ perchè il rapporto $-\frac{\omega'_0}{\omega_0}$ si conservi col coefficiente dell'immaginario positivo.

il punto τ è equivalente, rispetto al gruppo modulare, al simmetrico rispetto all'asse immaginario e avremo perciò

$$a) \qquad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & \mp 1 \\ \pm 1, & 0 \end{pmatrix}, \text{ se } \tau \text{ è sull'arco circolare,}$$

$$b) \qquad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1, & \pm 1 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \text{ se } \tau \text{ è sul lato rettilineo } R(\tau) = -\frac{1}{2}.$$

In ambedue i casi diciamo che: *Si possono sostituire a* 2ω, $2\omega'$ *due nuovi periodi fondamentali* $2\omega_1$, $2\omega_3$ *tali che l'uno sia coniugato dell'altro.*

Pongasi invero

$$\omega_1 = r\omega + s\omega'$$

indi ω_3 eguale alla quantità coniugata

$$\omega_3 = r\omega_0 + s\omega'_0 = (r\delta - s\beta)\,\omega + (r\gamma - s\alpha)\,\omega' ;$$

basterà che determiniamo gli interi r, s in guisa che sia

$$r(r\gamma - s\alpha) - s(r\delta - s\beta) = 1$$

cioè

$$\gamma r^2 - (\alpha + \delta)\, rs + \beta s^2 = 1 ,$$

il che è possibile tanto nel caso a) quanto nel caso b).

Scelti così i due periodi fondamentali $2\omega_1$, $2\omega_3$ in guisa che l'uno sia coniugato dell'altro, poniamo

$$\omega_3 = a + ib \;, \quad \omega_1 = a - ib$$

e supposto, come è lecito, $a > 0$ sarà altresì $b > 0$. La funzione $\wp u$ ammetterà anche i due periodi

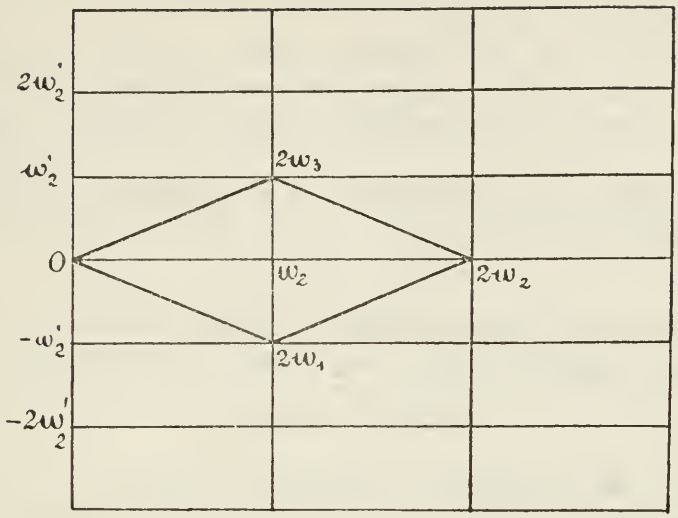
$$2\omega_2 = 2\omega_3 + 2\omega_1 = 4\,a$$

$$2\omega'_2 = 2\omega_3 - 2\omega_1 = 4\,ib ,$$

reale il primo e puramente immaginario il secondo, come nel caso del discriminante positivo. Per altro è da osservarsi che nel caso attuale questi due periodi $2\omega_2$, $2\omega_2'$ non sono più *fondamentali* come prima, perchè il determinante $\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{vmatrix}$ della sostituzione, che li lega ai fondamentali, non è eguale all'unità ma a 2.

Nel rettangolo $(0, \omega_2, 2\omega_3, \omega'_2)$ della figura qui sotto

Fig. 11.



la funzione $\wp u$, a causa della formola

$$\wp(2\omega_3 - u) = \wp u,$$

riprende *due volte* ogni valore; sul suo contorno essa è reale coll'andamento seguente:

u da	$0 \ldots \omega_2$;	$\omega_2 \ldots \omega_2 + \omega'_2 = 2\omega_3$;	$2\omega_3 \ldots \omega'_2$;	$\omega'_2 \ldots 0$
$\wp u$ da	$+\infty \ldots e_2$;	$e_3 \ldots -\infty$;	$+\infty \ldots e_2$;	$e_2 \ldots -\infty$

e corrispondentemente la $\wp' u$ offre l'andamento seguente

$(0, \omega_2)$;	$(\omega_2, 2\omega_3)$;	$(2\omega_3, \omega'_2)$;	$(\omega'_2, 0)$
$\wp' u$ reale negativa	$\wp' u$ immaginaria positiva	$\wp' u$ reale positiva	$\wp' u$ immaginaria negativa.

Nell'*interno* del detto rettangolo la $\wp u$ non è mai reale e per ciò il coefficiente dell'immaginario in $\wp u$ conserva sempre lo stesso segno, che si vede essere il negativo.

Vi ha un solo punto nell'interno ove $\wp' u$ si annulla, ed è il centro del rettangolo $u = \omega_3$, ove $\wp u = e_3$. L'immagine di questo rettangolo nel piano $s = \wp u$ ricopre due volte il semipiano negativo, avendo in $s = e_3$ un punto di diramazione del 1.° ordine.

Si osserverà che, per l'opportuna scelta dei periodi: *La radice media e_2 è reale, mentre e_1, e_3 sono immaginarie coniugate, la e_1 avendo positivo il coefficiente dell'immaginario; inoltre e_2 è positiva o negativa con g_3.*

Dallo studio precedente risulta che, se un argomento u rende simultaneamente

$$\wp u \ , \ \wp' u$$

reali, sarà u reale a meno di multipli del periodo immaginario $2\omega_3$. In questo caso adunque, per avere tutti i punti reali della cubica

$$x = \wp u \ , \ y = \wp' u \, ,$$

basterà far variare u per valori reali da $u = -\omega_2$ ad $u = \omega_2$ e quindi: *La cubica $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ nel caso di $g_2^3 - 27 g_3^2 < 0$ consta di un solo ramo infinito.*

Anche in questo caso avremo tre soli flessi reali in linea retta, corrispondenti agli argomenti

$$u = 0 \ , \ \frac{2\omega_1 + 2\omega_3}{3} \ , \ \frac{4\omega_1 + 4\omega_3}{3} \, .$$

§. 143.

Degenerazione della funzione $\wp(u; g_2, g_3)$ nel caso $g_2^3 - 27 g_3^2 = 0$.

Esaminiamo ora quello che accade della funzione $\wp(u \mid \omega, \omega')$ quando il rapporto $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ dei periodi si fa tendere, per valori puramente immaginarii, a ∞ ovvero a zero; allora $J(\tau)$ diventa infinito e il discriminante $g_2^3 - 27 g_3^2$, supposto che g_2 non vada a zero, tende a zero.

a) Se diamo ad ω un valore reale fisso e facciamo tendere $\omega' = i\beta\omega$ per valori puramente immaginarii all'infinito, la serie doppia che ci definisce la $\wp u$ (pag. 259) si cangia nella serie semplice:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left\{ \frac{1}{(u - 2m\omega)^2} + \frac{1}{(u + 2m\omega)^2} \right\} - \frac{2}{(2\omega)^2} \sum \frac{1}{m^2} \, .$$

Ora a causa delle formole del §. 64 (pag. 176) si ha

$$\frac{1}{u^2}+\sum_1^\infty\left\{\frac{1}{(u-2m\omega)^2}+\frac{1}{(u+2m\omega)^2}\right\}=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi z}{2\omega}\right)}$$

$$\sum_1^\infty\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

e possiamo quindi enunciare il risultato:

Se, avendo ω un valore fisso reale, si fa crescere ω' all'infinito per valori puramente immaginarii, la $\wp(u\,|\,\omega,\omega')$ degenera nella funzione circolare

$$\text{(A)}\qquad \wp u=-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)}.$$

Conseguentemente la ζu e la σu degenerano anch'esse, secondo le formole

$$\zeta u=\frac{\pi}{2\omega}\cot\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u,$$

$$\sigma u=e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right).$$

b) Teniamo ora fisso $\omega'=i\beta$ puramente immaginario e facciamo crescere ω reale all'infinito, con che τ convergerà sull'asse immaginario a 0; si vedrà che la $\wp u$ degenera allora nella funzione iperbolica

$$\text{(B)}\qquad \wp u=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)^2\frac{1}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{\pi u}{2\beta}\right)}.$$

Nei modi (A), (B) di degenerazione della $\wp u$ è chiaro che due delle radici e_1, e_2, e_3 vengono a coincidere e precisamente in (A) e_2 viene a coincidere con e_3, e nel caso (B) coincide e_2 con e_1.

c) Possiamo in fine considerare un terzo modo di degenerazione, corrispondente al caso che si abbia insieme $g_2=g_3=0$. Basta per ciò far crescere ω, ω' simultaneamente all'infinito, conservando finito il loro rapporto; allora al limite si ha

$$\wp u=\frac{1}{u^2}\,,\quad \zeta u=\frac{1}{u}\,,\quad \sigma u=u$$

$$e_1=e_2=e_3=0.$$

§. 144.

Le funzioni $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ **per valori reali positivi e** <1 **di** k^2.

Le funzioni ellittiche di Jacobi

$$\operatorname{sn} v \ , \quad \operatorname{cn} v \ , \quad \operatorname{dn} v$$

che si presentano nelle applicazioni (quando nella trattazione di un problema che porta alle funzioni ellittiche si vogliano introdurre quelle di Jacobi in luogo della $\wp u$ di Weierstrass) corrispondono sempre al caso in cui gli invarianti g_2, g_3 sono reali e il discriminante $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$.

Allora e_1, e_2, e_3 sono reali e disposte per ordine decrescente e le formole *a*) *b*) *c*) §. 130 (pag. 345) danno per

$$\sqrt{e_1 - e_2} \ , \quad \sqrt{e_1 - e_3} \ , \quad \sqrt{e_2 - e_3}$$

valori reali e positivi; quindi

$$k = \frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}} \ , \quad k' = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

sono reali, positivi e <1 e le quantità di Jacobi

$$\mathrm{K} = \omega \sqrt{e_1 - e_3} \ , \quad \mathrm{K}' = \frac{\omega'}{i} \sqrt{e_1 - e_3}$$

sono pure reali e positive.

Le tre funzioni di Jacobi

$$\operatorname{sn} v \ , \quad \operatorname{cn} v \ , \quad \operatorname{dn} v$$

assumono valori reali sull'asse reale, mentre sull'asse immaginario la prima è puramente immaginaria e le due ultime sono ancora reali. Osserviamo ora specialmente l'andamento di $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ per valori reali dell'argomento. Le formole

$$\operatorname{sn}^2 v + \operatorname{cn}^2 v = 1$$

$$\operatorname{dn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 v = 1$$

dimostrano che $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$ sono sempre comprese fra -1 e $+1$ mentre $\operatorname{dn} v$, che non s'annulla mai sull'asse reale, è sempre positivo e compreso fra 1 e k'.

Più in particolare, crescendo v da 0 a K, sn v cresce da 0 a 1, poi da K a 2K decresce da 1 a 0. Secondo la formola

$$\operatorname{sn}(2\mathrm{K}+v) = -\operatorname{sn} v\,,$$

sn v cangia di segno fra 2K e 4K, e al di là di 4K riprende periodicamente i medesimi valori. Analogamente succede per cn v e le curve:

$$y = \operatorname{sn} x\ ,\quad y = \operatorname{cn} x$$

hanno quindi una forma sinusoidale.

La curva

$$y = \operatorname{dn} x$$

ha il periodo 2K parallelo all'asse delle x e rimane tutta al di sopra di quest'asse, avendo per ordinata massima

$$y = 1 \quad \text{per } x = 0\,,\ \pm 2\mathrm{K}\,,\ \pm 4\mathrm{K}\ldots$$

e per ordinata minima

$$y = k' \quad \text{per } x = \pm\mathrm{K}\,,\ \pm 3\mathrm{K}\,,\ \pm 5\mathrm{K}\ldots$$

Ogni tratto da $y=1$ a $y=k'$ volge prima la concavità, indi la convessità all'asse delle x, flettendosi nel punto ove

$$\operatorname{sn}^2 x = \operatorname{cn}^2 x = \frac{1}{2}\ .$$

Mediante le formole di trasformazione complementare [(X*) §. 138] si può ridurre il calcolo delle funzioni di Jacobi, nel caso che ci occupa, e per valori complessi qualunque dell'argomento, al caso di argomento reale, cioè possiamo separare in

$$\operatorname{sn}(\alpha+i\beta)\ ,\quad \operatorname{cn}(\alpha+i\beta)\ ,\quad \operatorname{dn}(\alpha+i\beta)$$

la parte reale dall'immaginaria. Si ha invero per le formole citate

$$\operatorname{sn}(i\beta, k) = i\,\frac{\operatorname{sn}(\beta,k')}{\operatorname{cn}(\beta,k')}\ ,\quad \operatorname{cn}(i\beta, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(\beta,k')}\ ,\quad \operatorname{dn}(i\beta,k) = \frac{\operatorname{dn}(\beta,k')}{\operatorname{cn}(\beta,k')}$$

e, servendosi delle formole d'addizione, si ottengono subito le formole richieste.

Così p. e. si ha:

$$\operatorname{sn}(\alpha+i\beta,k)=\frac{\operatorname{sn}(\alpha,k)\operatorname{cn}(i\beta,k)\operatorname{dn}(i\beta,k)+\operatorname{sn}(i\beta,k)\operatorname{cn}(\alpha,k)\operatorname{dn}(\alpha,k)}{1-k^2\operatorname{sn}^2(\alpha,k)\operatorname{sn}^2(i\beta,k)}$$

e per ciò

$$\operatorname{sn}(\alpha+i\beta,k)=\frac{\operatorname{sn}(\alpha,k)\operatorname{dn}(\beta,k')+i\operatorname{sn}(\beta,k')\operatorname{cn}(\beta,k')\operatorname{cn}(\alpha,k)\operatorname{dn}(\alpha,k)}{\operatorname{cn}^2(\beta,k')+k^2\operatorname{sn}^2(\alpha,k)\operatorname{sn}^2(\beta,k')}$$

e analogamente per $\operatorname{dn}(\alpha+i\beta)$, $\operatorname{cn}(\alpha+i\beta)$.

§. 145.

Integrale ellittico di 1.ª specie di Legendre. — Integrali completi K, K'. Degenerazione di sn v, cn v, dn v.

Dalla formola

$$\frac{d\operatorname{sn}v}{dv}=\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v=\sqrt{(1-\operatorname{sn}^2v)(1-k^2\operatorname{sn}^2v)}\,,$$

ponendo

$$\operatorname{sn}v=x$$

e osservando che per $v=0$ si ha $x=0$ risulta

$$v=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,. \tag{3}$$

L'integrale del 2.° membro è *l'integrale ellittico di 1.ª specie* di Legendre. Limitandoci al caso delle applicazioni in cui k è reale, positivo <1, e la x varia da -1 a $+1$, si può porre

$$x=\operatorname{sen}\varphi\,,$$

ove φ è un angolo reale, e ne risulta

$$v=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,. \tag{4}$$

Legendre indicava col simbolo $F(\varphi,k)$ l'integrale del 2.° membro, e dava il nome di *amplitudine* all'intervallo φ d'integrazione, onde ap-

punto è derivato il nome di *seno amplitudine* alla funzione inversa

$$x = \operatorname{sn} v = \operatorname{sen} \varphi .$$

Osservando che si ha

$$\operatorname{sn} \mathrm{K} = 1 ,$$

si ha subito per K l'espressione per integrale definito

$$(5) \qquad \mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Si può ottenere un'espressione analoga per K′ osservando che, a causa delle formole

$$\operatorname{sn}(v+\mathrm{K}) = \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v} , \quad \operatorname{sn}(\mathrm{K}+i\,\mathrm{K}') = \frac{1}{k} ,$$

facendo crescere v pel cammino rettilineo da K a $\mathrm{K}+i\,\mathrm{K}'$, la $x = \operatorname{sn} v$ cresce, per valori reali, da 1 a $\frac{1}{k}$ e si ha per ciò:

$$\mathrm{K}+i\,\mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} ,$$

onde

$$\mathrm{K}' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} .$$

Cangiando in questo integrale la variabile x nella x', col porre

$$k^2x^2 + k'^2x'^2 = 1 ,$$

si ottiene subito

$$(6) \qquad \mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2}} = \mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, k'\right),$$

formola che, messa a confronto colla (5), dimostra che K′ si esprime per k' come K per k, la qual cosa si poteva anche dedurre dalle formole di trasformazione complementare.

Per mezzo di queste formole vediamo subito come degenerano le funzioni ellittiche di Jacobi nei casi limiti:

$$k = 0 \ , \quad k = 1 \, .$$

Si ha infatti per $k = 0$

$$K = \frac{\pi}{2} \ , \quad K' = \infty$$

$$\operatorname{sn} v = \operatorname{sen} v \, ,$$

cioè

$$\operatorname{sn}(v, 0) = \operatorname{sen} v \ , \quad \operatorname{cn}(v, 0) = \cos v \ , \quad \operatorname{dn}(v, 0) = 1 \, . \tag{7}$$

Similmente dalle formole stesse, o da quelle della trasformazione complementare, deducesi

$$\operatorname{sn}(v, 1) = \operatorname{tangh} v \ , \quad \operatorname{cn}(v, 1) = \operatorname{dn}(v, 1) = \frac{1}{\cosh v} \, . \tag{8}$$

§. 146.

Gli integrali di 2.ª specie $E(v)$, $Z(v)$ di Legendre e Jacobi.

Nella teoria di Legendre, oltre all'integrale ellittico di 1.ª specie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \, ,$$

si presentavano gli altri due integrali elementari

$$\int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \ , \quad \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \, ,$$

che Legendre chiamava rispettivamente integrali di 2.ª e 3.ª specie. L'integrazione di ogni funzione razionale

$$F\left(x \, , \ \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right)$$

si riportava a funzioni ordinarie e ad un aggregato di integrali elementari delle tre specie (Cf. §. 127). Per il confronto delle formole della teoria di Legendre, le quali si trovano adoperate in trattati e memorie

classiche, con quelle di Weierstrass diamo le formole di passaggio alle funzioni σu e $\wp u$ di Weierstrass.

Ponendo $x = \operatorname{sn}(v, k)$, l'integrale di 2.ª specie di Legendre diventa

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^v \operatorname{dn}^2 v\, dv.$$

Siccome la funzione $\operatorname{dn}^2 v$ ha residui tutti nulli (perchè nel parallelogrammo dei periodi $(2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}')$ $\operatorname{dn}^2 v$ ha un solo infinito), l'integrale stesso è una funzione monodroma di v che s'indica, secondo Legendre e Jacobi, con

$$\mathrm{E}(v) = \int_0^v \operatorname{dn}^2 v\, dv.$$

Per esprimere $\mathrm{E}(v)$ coi simboli di Weierstrass, osserviamo che si ha

$$\operatorname{dn}^2 v = \frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_3} = 1 + \frac{e_3 - e_2}{\wp u - e_3} \quad (v = u\sqrt{e_1 - e_3}),$$

e per le formole d'addizione dei semi periodi:

$$\operatorname{dn}^2 v = \frac{e_1}{e_1 - e_3} - \frac{1}{e_1 - e_3}\, \wp(u+\omega').$$

Risulta quindi

$$\mathrm{E}(v) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ \frac{\sigma'(u+\omega')}{\sigma(u+\omega')} + e_1 u - \eta' \right\},$$

ovvero

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{E}(v) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ \frac{\sigma'_3 u}{\sigma_3 u} + e_1 u \right\}, \quad v = u\sqrt{e_1 - e_3},$$

che è la formola richiesta.

Indicando poi, come faceva Legendre, con E *l'integrale completo:*

$$\mathrm{E} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\mathrm{K}} \operatorname{dn}^2 v\, dv,$$

avremo dalla (I)

$$\text{(I*)} \qquad \mathrm{E} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\, (e_1 \omega + \eta).$$

Ponendo $x = \operatorname{sen} \varphi$, Legendre usava per l'integrale di 2.ª specie la notazione

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi = \mathrm{E}(\varphi, k)\,,$$

talchè l'integrale completo E è dato da $\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$.

L'integrale $\mathrm{E}(\varphi, k)$ si presenta appunto nel calcolo dell'arco dell'ellisse. Se si esprimono le coordinate di un punto mobile sull'ellisse di semi-assi a, b per l'angolo eccentrico φ colle formole

$$x = a \operatorname{sen} \varphi\,, \quad y = b \cos \varphi\,,$$

e si pone

$$k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \text{ (eccentricità)},$$

per l'arco s di ellisse, contato a partire dall'estremità dell'asse minore, si ha

$$s = a \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi = a\, \mathrm{E}(\varphi, k)\,.$$

L'integrale completo $\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \mathrm{E}$ misura adunque la lunghezza di un quadrante dell'ellisse di semi-asse maggiore $= 1$ e di eccentricità k.

All'integrale di 2.ª specie di Legendre Jacobi sostituiva l'altro

$$\int_0^x \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{k^2}\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right],$$

e indicava col simbolo $\mathrm{Z}(v)$ la funzione

$$\mathrm{Z}(v) = \mathrm{E}(v) - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\, v\,.$$

La $\mathrm{Z}(v)$ di Jacobi si esprime, per le (I) (I*), mediante le funzioni di Weierstrass colla formola:

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{Z}(v) = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left[\frac{\sigma'_3 u}{\sigma_3 u} - \frac{\eta}{\omega}\, u\right], \quad v = u\sqrt{e_1-e_3}\,.$$

§. 147.

L'integrale di 3.ª specie $\Pi(v, a)$ di Jacobi.

Jacobi considerava come integrale di 3.ª specie il seguente

$$\int \frac{x^2\, dx}{(1+n\,x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,,$$

che si compone evidentemente con integrali di 1.ª e 3.ª specie di Legendre. Ponendo $x = \operatorname{sn} v$ e indicando con a una conveniente costante, Jacobi indicava col simbolo

$$\Pi\,(v, a)$$

l'integrale di 3.ª specie

$$\Pi\,(v, a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \int_0^v \frac{\operatorname{sn}^2 v\, dv}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v}\,,$$

che vogliamo qui esprimere per funzioni di Weierstrass. A tale scopo rammentiamo le formole

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn} v &= \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma\, u}{\sigma_0 u} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \\ \operatorname{cn} v &= \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} = \frac{\sqrt{\wp u - e_1}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \\ \operatorname{dn} v &= \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} = \frac{\sqrt{\wp u - e_2}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} v &= \sqrt{e_1-e_3}\,u \\ k^2 &= \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} \end{aligned}$$

e ponendo per brevità

$$b = \frac{a}{\sqrt{e_1-e_3}}\,,$$

troveremo:

$$\Pi\,(v, a) = (e_1-e_3)\,(e_2-e_3)\,\frac{\sigma b \,.\, \sigma_1 b \,.\, \sigma_2 b}{\sigma_3^3 b} \int_0^u \frac{du}{\wp u - \dfrac{(e_1-e_3)\,(e_2-e_3)}{\wp b - e_3}}\,.$$

Ora, ricordando le formole

$$\wp' u = -\frac{2\,\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u}\,,\quad \wp(u+\omega') - e_3 = \frac{(e_1-e_3)\,(e_2-e_3)}{\wp u - e_3}\,,$$

$$\wp'(u+\omega') = -\frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)\,\wp' u}{(\wp u - e_3)^2}\,,$$

avremo subito

$$\Pi(v, a) = \frac{1}{2}\int_0^u \frac{\wp'(b+\omega')}{\wp u - \wp(b+\omega')}\,du\,.$$

Ma, per le formole d'addizione della ζu, si ha

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(b+\omega')}{\wp u - \wp(b+\omega')} = \frac{1}{2}\,\zeta(u-b-\omega') - \frac{1}{2}\,\zeta(u+b+\omega') + \zeta(b+\omega')\,,$$

ed essendo

$$\zeta(u-b-\omega') = \frac{\sigma'_3(u-b)}{\sigma_3(u-b)} - \eta'\,,\quad \zeta(u+b+\omega') = \frac{\sigma'_3(u+b)}{\sigma_3(u+b)} + \eta'\,,$$

potremo scrivere

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(b+\omega')}{\wp u - \wp(b+\omega')} = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma'_3(u-b)}{\sigma_3(u-b)} - \frac{1}{2}\,\frac{\sigma'_3(u+b)}{\sigma_3(u+b)} + \frac{\sigma'_3 b}{\sigma_3 b}\,,$$

onde infine avremo per la formola cercata

$$\text{(III)}\qquad \Pi(v, a) = \frac{1}{2}\log\frac{\sigma_3(u-b)}{\sigma_3(u+b)} + \frac{\sigma'_3 b}{\sigma_3 b}\,u \;\Bigg\}\; \begin{matrix} v = u\sqrt{e_1-e_3} \\ b = a\sqrt{e_1-e_3}\,. \end{matrix}$$

§. 148.

Riduzione dell'integrale ellittico di 1.ª specie alla forma normale di Legendre.

Per completare queste notizie sull'antica teoria degli integrali ellittici, daremo ancora il processo che serve a ridurre il differenziale ellittico di 1.ª specie

$$\text{(9)}\qquad \frac{dw}{\sqrt{\mathrm{P}(w)}}\,,$$

ove $P(w)$ è un polinomio di 3.° o 4.° grado in w, alla forma normale di Legendre

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{10}$$

e, avendo riguardo ai casi che effettivamente si presentano nelle applicazioni ove $P(w)$ è a coefficienti reali, dimostreremo come la riduzione possa sempre farsi in guisa che ne risulti k^2 reale, positivo e < 1.

Basterà che riduciamo, con una sostituzione razionale, il differenziale (9) alla forma

$$\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)}}, \tag{11}$$

poichè la sostituzione quadratica

$$y = x^2$$

fa passare dalla forma (11) alla (10). Ora il passaggio dalla (9) alla (11) si può sempre conseguire con una sostituzione lineare

$$w = \frac{a+by}{c+dy}. \tag{12}$$

E invero, se $P(w)$ è del 3.° grado, si prenda semplicemente

$$w = a+by$$

e si determinino a, b in guisa che una radice α di $P(w) = 0$ venga portata in $y = 0$ ed una seconda β in $y = 1$; si ponga cioè

$$w = \alpha + (\beta - \alpha)y.$$

Allora, posto

$$P(w) = A(w-\alpha)(w-\beta)(w-\gamma),$$

risulterà

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}} = C\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)}},$$

ove si è posto

$$C = \frac{1}{\sqrt{A(\gamma-\alpha)}}\,, \quad k^2 = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\ ^{(1)}.$$

Sia ora $P(w)$ del 4.° grado ed, omettendo un fattore costante, scriviamo

$$P(w) = (w-\alpha)(w-\beta)(w-\gamma)(w-\delta).$$

La sostituzione (12) dà:

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}} = \frac{(bc-ad)\,dy}{(c+dy)^2\sqrt{\left(\frac{a+by}{c+dy}-\alpha\right)\left(\frac{a+by}{c+dy}-\beta\right)\left(\frac{a+by}{c+dy}-\gamma\right)\left(\frac{a+by}{c+dy}-\delta\right)}}.$$

Perchè questo differenziale abbia la forma voluta (11), basta che uno dei binomii sotto il segno, p. e. $w-\beta$, si riduca a $\frac{c'}{c+dy}$, cioè che la radice β di $P(w)=0$ sia portata in $y=\infty$, e gli altri binomii si annullino rispettivamente per $y = 0, 1, \frac{1}{k^2}$. La (12) dovrà dunque portare rispettivamente α, β, γ in $0, \infty, 1$, e sarà per ciò

$$y = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\,\frac{w-\alpha}{w-\beta}.$$

La quarta radice δ viene portata in $\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\,\frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}$, onde si ha

$$k^2 = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta}\cdot\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}.$$

Dipendentemente dall'ordine delle quattro radici si potrà effettuare la riduzione richiesta in 24 modi diversi, ai quali corrispondono però soltanto 6 valori del rapporto anarmonico:

$$k^2\,,\ \frac{1}{k^2}\,,\ 1-k^2\,,\ \frac{1}{1-k^2}\,,\ \frac{k^2}{k^2-1}\,,\ \frac{k^2-1}{k^2}.$$

---

(1) Si osservi che k^2 è il rapporto anarmonico dei quattro valori $\alpha, \infty, \beta, \gamma$.

Se $P(w)$ è a coefficienti reali e le sue radici sono tutte reali, o tutte complesse, i 6 valori del rapporto anarmonico sono reali ed uno di essi è positivo e < 1.

Quando si avessero invece due radici reali α, β e due immaginarie (coniugate) γ, δ, colla trasformazione

$$t^2 = \frac{w - \alpha}{w - \beta}$$

risulterebbe

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}} = \frac{2(\alpha - \beta)}{\sqrt{(\beta - \gamma)(\beta - \delta)}} \frac{dt}{\sqrt{\left(t^2 - \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}\right)\left(t^2 - \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}\right)}}$$

e il polinomio di 4.° grado in t avrebbe radici tutte complesse, talchè si ricade nel caso precedente.

Nel caso di un polinomio $P(w)$ di 3.° grado a radici reali si avrà ancora immediatamente il medesimo risultato. E se una delle radici è reale, le altre due immaginarie, con una sostituzione lineare ci ricondurremo al caso di un polinomio di 4.° grado con due radici reali e due immaginarie.

Per ridurre il differenziale ellittico di 1.ª specie alla forma normale di Legendre occorre, come si vede, conoscere le radici di $P(w) = 0$. Uno dei principali vantaggi del metodo di Weierstrass (Cap. X §§. 124-127) è appunto questo che la riduzione alla forma normale si effettua razionalmente per gli invarianti, ossia pei coefficienti del polinomio $P(w)$.

Capitolo XIV.

Sviluppi in prodotti infiniti ed in serie trigonometriche delle funzioni σ. — Le serie ϑ di Jacobi e le loro proprietà.

§. 149.

Sviluppo in prodotto infinito semplice per $\sigma_3 u$.

Ci proponiamo ora di far conoscere le principali espressioni analitiche per prodotti infiniti e per serie trigonometriche delle funzioni ellittiche e loro affini. Questi sviluppi presentano un grande interesse teorico e pratico insieme, per la loro legge di costruzione e per la loro rapida

convergenza nei casi delle applicazioni, che li rende molto adatti al calcolo numerico.

Comincieremo dal dare gli sviluppi in prodotti infiniti semplici delle funzioni $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ di Weierstrass. Potremmo per ciò ricorrere allo sviluppo della σu in prodotto infinito doppio (§. 94), convertirlo in prodotto infinito semplice e dedurne poi i prodotti infiniti per le altre σ_r. Qui preferiamo dedurre queste espressioni analitiche direttamente dalle proprietà caratteristiche della $\sigma_r u$.

Prendiamo p. e. la $\sigma_3 u$; essa gode delle seguenti proprietà:

1.ª è una trascendente intera cogli infinitesimi del 1.° ordine nei punti

$$u_0 = 2m\omega + (2n+1)\omega'$$

2.ª aumentando l'argomento u di 2ω o $2\omega'$, essa si comporta nel modo seguente (§. 129)

$$(a) \qquad \begin{cases} \sigma_3(u+2\omega) = e^{2\eta(u+\omega)}\sigma_3 u \\ \sigma_3(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma_3 u \end{cases}$$

3.ª per $u=0$ è $\sigma_3 u = 1$.

Queste sono, come subito si vede, proprietà *caratteristiche* della $\sigma_3 u$, cioè, se una trascendente intera $G(u)$ vi soddisfa, essa coincide con $\sigma_3 u$.

Sostituiamo alla $\sigma_3 u$ un'altra trascendente intera periodica di 3.ª categoria (§. 101) $\psi(u)$, che abbia il periodo assoluto 2ω. Pongasi per ciò

$$\psi(u) = e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\sigma_3 u$$

e la $\psi(u)$ avrà le proprietà 1.ª e 3.ª della $\sigma_3 u$, mentre la 2.ª, a causa di $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}$, si tradurrà nelle altre

$$(a^*) \qquad \begin{cases} \psi(u+2\omega) = \psi(u) \\ \psi(u+2\omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\omega')}\psi(u). \end{cases}$$

Pongasi ora

$$e^{\frac{\pi i u}{\omega}} = z\,, \quad e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}} = q\,,$$

onde sarà q una costante di modulo < 1, e si consideri $\psi(u)$ come funzione di z

$$\psi(u) = \varphi(z).$$

La $\varphi(z)$ sarà una funzione *monodroma* di z sempre finita e continua, tranne che nei due punti singolari (essenziali) $z=0$, $z=\infty$, e godrà delle seguenti proprietà:

1.ª $\varphi(z)$ ha infinitesimi del 1.° ordine nei punti

$$z_0 = \begin{cases} q\ ,\ q^3\ ,\ q^5 \ldots q^{2n+1} \ldots \\ q^{-1},\ q^{-3},\ q^{-5} \ldots q^{-(2n+1)} \ldots \end{cases}$$

2.ª $\varphi(z)$ soddisfa all'equazione funzionale

$$\varphi(q^2 z) = -\frac{1}{qz}\varphi(z).$$

3.ª per $z=1$ è $\varphi(z)=1$.

Ora poichè la serie

$$q + q^3 + q^5 + \ldots$$

converge assolutamente, a causa di $|q| < 1$, è facile (§. 66) costruire una prima funzione che abbia gli infinitesimi nei punti

$$z_0 = q^{-1},\ q^{-3},\ q^{-5} \ldots ,$$

come pure una seconda che li abbia invece in

$$z_0 = q\ ,\ q^3\ ,\ q^5 \ldots$$

Esse saranno date rispettivamente dai due prodotti infiniti

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n-1}z)\ ,\ \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{q^{2n-1}}{z}\right),$$

dei quali il primo converge assolutamente ed in egual grado in qualunque campo finito ed il secondo in tutto il piano, escluso $z=0$. Riunendo i due prodotti, si ha la funzione

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n-1}z)\left(1-\frac{q^{2n-1}}{z}\right),$$

che ha le proprietà 1.ª e 2.ª della $\varphi(z)$ e non differisce quindi da $\varphi(z)$ che per un fattore costante; si trova subito

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{(1-q^{2n-1}z)\left(1-\frac{q^{2n-1}}{z}\right)}{(1-q^{2n-1})^2}$$

e ponendo per z il suo valore, abbiamo così la prima espressione analitica cercata per la $\sigma_3 u$ sotto la forma:

$$\alpha) \qquad e^{\frac{-\eta_1 u^2}{2\omega}} \cdot \sigma_3 u = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\left(1 - q^{2n-1} e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n-1} e^{\frac{-\pi i u}{\omega}}\right)}{(1 - q^{2n-1})^2} .$$

§. 150.

Sviluppi in prodotti infiniti per le σ, σ_r e per le costanti $\sqrt{e_1 - e_2}$, $\sqrt{e_1 - e_3}$, $\sqrt{e_2 - e_3}$, $\sqrt[24]{\Delta}$.

Dallo sviluppo ora trovato per $\sigma_3 u$, ricorrendo alle formole del §. 131, facilmente ritroviamo gli sviluppi analoghi per le rimanenti σ. Si ha infatti

$$\sigma u = A e^{\eta' u} \sigma_3 (u - \omega') ,$$

dove A è una costante, e per ciò

$$e^{\frac{-\eta_1 u^2}{2\omega}} \sigma u = A' e^{\left(\eta' - \frac{\eta_1 \omega'}{\omega}\right) u} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - q^{2n-2} e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{\frac{-\pi i u}{\omega}}\right),$$

ossia

$$e^{\frac{-\eta_1 u^2}{2\omega}} \sigma u = A' e^{\frac{-\pi i u}{2\omega}} \left(1 - e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right) \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - q^{2n} e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{\frac{-\pi i u}{\omega}}\right)$$

$$= A'' \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - q^{2n} e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{\frac{-\pi i u}{\omega}}\right).$$

Per determinare A″ si divida dall'una e dall'altra parte per u e si passi al limite per $u = 0$, osservando che

$$\lim_{u=0} \left(\frac{\sigma u}{u}\right) = 1 , \quad \lim_{u=0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)}{u} = \frac{\pi}{2\omega},$$

e si troverà quindi

$$\beta) \qquad e^{\frac{-\eta_1 u^2}{2\omega}} \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\left(1 - q^{2n} e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{\frac{-\pi i u}{\omega}}\right)}{(1 - q^{2n})^2} .$$

Dalle α) β), mediante le formole

$$\left.\begin{aligned}\sigma_2 u &= \mathrm{B}\, e^{-\eta u}\sigma_3(u+\omega)\\ \sigma_1 u &= \mathrm{C}\, e^{-\eta u}\,\sigma\,(u+\omega)\end{aligned}\right\}\ \mathrm{B,\ C\ costanti}\ ,$$

si deducono subito gli sviluppi analoghi per $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$. Riuniamo le quattro formole nella tabella seguente:

$$(\mathrm{I})\quad\left\{\begin{aligned}
e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\sigma u &= \frac{2\omega}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\left(1-q^{2n}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n}e^{\frac{-\pi i u}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n})^2} =\\
&= \frac{2\omega}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\omega}+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}\\
e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\sigma_1 u &= \cos\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\prod_{1}^{\infty}\frac{\left(1+q^{2n}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1+q^{2n}e^{\frac{-\pi i u}{\omega}}\right)}{(1+q^{2n})^2} =\\
&= \cos\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\prod_{1}^{\infty}\frac{1+2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\omega}+q^{4n}}{(1+q^{2n})^2}\\
e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\sigma_2 u &= \prod_{1}^{\infty}\frac{\left(1+q^{2n-1}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1+q^{2n-1}e^{\frac{-\pi i u}{\omega}}\right)}{(1+q^{2n-1})^2} =\\
&= \prod_{1}^{\infty}\frac{1+2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{\omega}+q^{4n-2}}{(1+q^{2n-1})^2}\\
e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\sigma_3 u &= \prod_{1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{2n-1}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n-1}e^{\frac{-\pi i u}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n-1})^2} =\\
&= \prod_{1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{\omega}+q^{4n-2}}{(1-q^{2n-1})^2}\ .
\end{aligned}\right.$$

Dalle formole precedenti e dalle (*a*) (*b*) (*c*) pag. 345, che danno la precisa definizione dei valori delle costanti

$$\sqrt{e_1-e_2}\ ,\sqrt{e_1-e_3}\ ,\sqrt{e_2-e_3}\ ,$$

possiamo dedurre gli sviluppi in prodotti infiniti per queste ultime quantità.

Osserviamo a tale scopo che, ponendo

$$(1)\qquad U_1 = e^{\frac{-\eta_1\omega_1}{2}}\sigma\omega_1\,,\quad U_2 = e^{\frac{-\eta_2\omega_2}{2}}\sigma\omega_2\,,\quad U_3 = e^{\frac{-\eta_3\omega_3}{2}}\sigma\omega_3\,,$$

le citate formole ci danno

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \sqrt{e_1-e_2} &= e^{\eta_2\omega_1}\frac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2} = e^{-\frac{\pi i}{4}}\frac{U_3}{U_1\,U_2} \\ \sqrt{e_2-e_3} &= -e^{\eta_3\omega_2}\frac{\sigma\omega_1}{\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3} = -e^{-\frac{\pi i}{4}}\frac{U_1}{U_2\,U_3} \\ \sqrt{e_1-e_3} &= e^{-\eta_3\omega_1}\frac{\sigma\omega_2}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_3} = e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{U_2}{U_1\,U_3} \end{aligned}\right.$$

e tutto si riduce quindi a calcolare U_1, U_2, U_3.

Nelle formole (I) figurano i seguenti quattro prodotti infiniti;

$$(3)\quad Q_0 = \prod_1^\infty (1-q^{2n})\,,\quad Q_1 = \prod_1^\infty (1+q^{2n})\,,\quad Q_2 = \prod_1^\infty (1+q^{2n-1})\,,\quad Q_3 = \prod_1^\infty (1-q^{2n-1})\,,$$

che moltiplicati fra loro danno

$$Q_0\,Q_1\,Q_2\,Q_3 = \prod_1^\infty (1-q^{4n})\,(1-q^{4n-2}) = Q_0\,,$$

e fra gli ultimi tre sussiste per ciò l'identità

$$(4)\qquad Q_1\,Q_2\,Q_3 = 1\,.$$

Ora per calcolare U_1 facciamo nella 1.ª delle (I) $u = \omega$ ed avremo subito

$$(a)\qquad U_1 = \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{Q_1^2}{Q_0^2}\,.$$

Se nella medesima formola (I) facciamo poi $u = \omega'$ risulterà

$$e^{\frac{-\eta_1\omega'^2}{2\omega}}\sigma\omega' = \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{e^{\frac{\pi i\omega'}{2\omega}} - e^{\frac{-\pi i\omega'}{2\omega}}}{2i}\prod_1^\infty \frac{(1-q^{2n+1})\,(1-q^{2n-1})}{(1-q^{2n})^2}\,,$$

cioè

$$e^{\frac{-\eta_1\omega'^2}{2\omega}}\sigma\omega' = \frac{2\omega}{\pi}\, e^{\frac{-\pi i\omega'}{2\omega}}\,\frac{q-1}{2i}\,\frac{1}{1-q}\,\frac{Q_3^2}{Q_0^2} = \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{i}{2q^{\frac{1}{2}}}\,\frac{Q_3^2}{Q_0^2},$$

ed osservando che si ha

$$\frac{\eta_1\omega'^2}{2\omega} = \frac{\omega'}{2\omega}\left(\eta'\omega + \frac{\pi i}{2}\right)$$

ne dedurremo

$$(b) \qquad U_3 = \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{i}{2q^{\frac{1}{4}}}\,\frac{Q_3^2}{Q_0^2}.$$

In fine per calcolare

$$U_2 = e^{\frac{-\eta_1\omega_2}{2}}\sigma\omega_2,$$

ricorriamo alla formola

$$\sigma\omega_2 = e^{\eta_1'\omega}\,\sigma\omega'.\,\sigma_3\omega$$

e facendo $u = \omega$ nella 4.ª delle (I), coll'osservare la (b), avremo:

$$\sigma\omega_2 = e^{\eta_1'\omega + \frac{\eta_1'\omega'}{2}}.\,\frac{2\omega}{\pi}\,\frac{i}{2q^{\frac{1}{4}}}.\,\frac{Q_3^2}{Q_0^2}\,e^{\frac{\eta_1\omega}{2}}.\,\frac{Q_2^2}{Q_3^2} = e^{\frac{(\eta+\eta')(\omega+\omega')}{2} - \frac{\pi i}{4}}.\,\frac{2\omega}{\pi}\,\frac{i}{2q^{\frac{1}{4}}}\,\frac{Q_2^2}{Q_0^2},$$

onde in fine

$$(c) \qquad U_2 = \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2q^{\frac{1}{4}}}\,\frac{Q_2^2}{Q_0^2}.$$

Dopo di ciò le (2), tenendo conto della identità (4), ci daranno

$$(5)\quad \sqrt{e_1-e_2} = \frac{\pi}{2\omega}Q_3^4Q_0^2,\ \sqrt{e_2-e_3} = \frac{\pi}{2\omega}4q^{\frac{1}{2}}Q_1^4Q_0^2,\ \sqrt{e_1-e_3} = \frac{\pi}{2\omega}Q_2^4Q_0^2.$$

Estraendo ancora la radice quadrata, coll'adottare una delle due determinazioni di segno, avremo:

$$(5^*)\quad \sqrt[4]{e_1-e_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\,Q_3^2Q_0,\ \sqrt[4]{e_2-e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}.\,2q^{\frac{1}{4}}Q_1^2Q_0,$$

$$\sqrt[4]{e_1-e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}.\,Q_2^2Q_0.$$

Di qui risulta una notevole espressione per

$$\sqrt[24]{\Delta}$$

e cioè

$$\text{(II)} \qquad \sqrt[24]{\Delta} = \sqrt[24]{g_2^3 - 27\, g_3^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\; q^{\frac{1}{12}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n}).$$

§. 151.

Sviluppi per $\sqrt{\frac{2\,\mathrm{K}}{\pi}}$, $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[12]{kk'}$ **e per le funzioni** sn v, cn v, dn v.

La quantità K di Jacobi è data (§. 133) da

$$\mathrm{K} = \omega \sqrt{e_1 - e_3},$$

e per la 3.ª delle (5) si ha quindi la formola

$$\text{(III)} \qquad \sqrt{\frac{2\,\mathrm{K}}{\pi}} = \mathrm{Q}_2^2\, \mathrm{Q}_0 = \prod_1^\infty (1 + q^{2n-1})^2\, (1 - q^{2n}),$$

formola che fa conoscere il periodo 4 K delle funzioni ellittiche di Jacobi, appena noto

$$q = e^{\pi i \tau}.$$

Dalle (5) seguono ancora le formole

$$k = 4\, q^{\frac{1}{2}}\, \frac{\mathrm{Q}_1^4}{\mathrm{Q}_2^4}, \quad k' = \frac{\mathrm{Q}_3^4}{\mathrm{Q}_2^4}$$

ed, estraendo le radici quarte, abbiamo le altre notevoli

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}}\, \dfrac{\mathrm{Q}_1}{\mathrm{Q}_2} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i \tau}{8}} \displaystyle\prod_1^\infty \frac{1 + e^{2n\pi i \tau}}{1 + e^{(2n-1)\pi i \tau}} \\ \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\mathrm{Q}_3}{\mathrm{Q}_2} = \displaystyle\prod_1^\infty \frac{1 - e^{(2n-1)\pi i \tau}}{1 + e^{(2n-1)\pi i \tau}}. \end{cases}$$

I prodotti infiniti dei secondi membri convergono assolutamente ed in egual grado in ogni campo finito del semipiano positivo τ, l'asse reale

escluso, e definiscono $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ come funzioni uniformi in questo semipiano (funzioni modulari).

È degna ancora di nota la formola che risulta moltiplicando le (IV), il che dà

$$\sqrt[4]{kk'} = \sqrt{2}\; q^{\frac{1}{8}} \frac{Q_1 Q_3}{Q_2^2}.$$

Per l'identità (4) possiamo scrivere

$$\sqrt[4]{kk'} = \sqrt{2}\; q^{\frac{1}{8}} \frac{1}{Q_2^3}$$

ed, estraendo ancora la radice terza, abbiamo

$$\text{(V)} \qquad \sqrt[12]{kk'} = \sqrt[6]{2}\; q^{\frac{1}{24}} \frac{1}{Q_2} = \sqrt[6]{2}\; e^{\frac{\pi i \tau}{24}} \frac{1}{\prod\limits_1^\infty \left(1+e^{(2n-1)\pi i \tau}\right)}.$$

Tenendo conto delle formole precedenti e delle fondamentali (I), possiamo ora esprimere le funzioni ellittiche di Jacobi per prodotti infiniti ed otteniamo le formole seguenti:

$$\text{(VI)} \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sn} v &= \frac{2q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi v}{2K}\right) \prod_1^\infty \frac{1 - 2q^{2n} \cos\left(\frac{\pi v}{K}\right) + q^{4n}}{1 - 2q^{2n-1} \cos\left(\frac{\pi v}{K}\right) + q^{4n-2}} \\ \operatorname{cn} v &= 2q^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{k'}{k}} \cos\left(\frac{\pi v}{2K}\right) \prod_1^\infty \frac{1 + 2q^{2n} \cos\left(\frac{\pi v}{K}\right) + q^{4n}}{1 - 2q^{2n-1} \cos\left(\frac{\pi v}{K}\right) + q^{4n-2}} \\ \operatorname{dn} v &= \sqrt{k'} \prod_1^\infty \frac{1 + 2q^{2n-1} \cos\left(\frac{\pi v}{K}\right) + q^{4n-2}}{1 - 2q^{2n-1} \cos\left(\frac{\pi v}{K}\right) + q^{4n-2}}. \end{aligned} \right.$$

§. 152.

Sviluppo di una funzione periodica in serie di Fourier.

Si ottengono sviluppi importantissimi per le funzioni ellittiche, applicando il seguente teorema generale, che permette di sviluppare ogni funzione uniforme periodica in serie trigonometriche (serie di Fourier):

Se $f(u)$ è una funzione uniforme della variabile complessa u col periodo Ω e nell'interno della striscia del piano complesso u, compresa fra due rette parallele alla direzione del periodo Ω, non ha nessun punto singolare, essa è sviluppabile in serie di Fourier della forma

$$(6) \qquad f(u) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2n\pi u}{\Omega}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi u}{\Omega}\right) \right\},$$

convergente in egual grado in ogni spazio interno alla detta striscia.

Questo teorema è una facile conseguenza del teorema di Laurent (§. 44). Pongasi infatti

$$z = e^{\frac{2\pi i u}{\Omega}};$$

sarà

$$f(u) = \varphi(z)$$

funzione *monodroma* di z, perchè per ogni cammino chiuso descritto da z la u aumenta di un multiplo di Ω ed $f(u)$ si riproduce. Inoltre mentre u, movendo da un punto u_1 del suo piano complesso descrive una retta parallela alla direzione del periodo Ω, si ha

$$u = u_1 + \lambda\,\Omega,$$

essendo λ un parametro reale che varia da $-\infty$ a $+\infty$ e quindi

$$z = e^{\frac{2\pi i u_1}{\Omega}} (\cos 2\pi\lambda + i \operatorname{sen} 2\pi\lambda)$$

descrive un cerchio col centro in $z = 0$ e di raggio $= \left| e^{\frac{2\pi i u_1}{\Omega}} \right|$. Alla striscia considerata corrisponde quindi nel piano z un anello circolare col centro in $z = 0$; e poichè $\varphi(z)$ entro quest'anello è finita, continua e monodroma varrà lo sviluppo di Laurent

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty A_n z^n + \sum_1^\infty B_n z^{-n},$$

onde avremo

$$f(u) = A_0 + \sum_1^\infty \left\{ (A_n + B_n) \cos\left(\frac{2n\pi u}{\Omega}\right) + i\,(A_n - B_n) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi u}{\Omega}\right) \right\},$$

che ponendo

$$a_0 = A_0\,, \quad a_n = A_n + B_n\,, \quad b_n = i\,(A_n - B_n)$$

assumerà precisamente la forma (6) del teorema e la serie del secondo membro sarà convergente in egual grado in ogni spazio interno alla striscia.

Possiamo di più esprimere per integrali definiti i valori dei coefficienti a_n, b_n della serie (6) di Fourier. E invero le formole (8) pag. 128 ci danno

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}}\ ,\quad B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \varphi(z)\,.\,z^{n-1}\,dz\,,$$

gli integrali essendo estesi ad un cerchio σ concentrico ed intermedio ai due che limitano l'anello. Ponendo per z il suo valore, gli integrali risulteranno estesi nel piano u ad un tratto rettilineo l parallelo ed interno alla striscia considerata e di lunghezza $= |\Omega|$. Ne risultano quindi per i valori dei coefficienti della serie (6) le espressioni:

$$(7)\quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_l f(u)\,du\ ,\quad a_n = \dfrac{2}{\Omega}\displaystyle\int_l f(u)\cos\left(\dfrac{2n\pi u}{\Omega}\right)du\,, \\[2ex] b_n = \dfrac{2}{\Omega}\displaystyle\int_l f(u)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{2n\pi u}{\Omega}\right)du\,. \end{cases}$$

§. 153.

Sviluppo in serie trigonometrica della $\sigma_3 u$.

Sviluppiamo in serie trigonometriche le funzioni σ, cominciando dalla funzione $\sigma_3 u$. Per ciò sostituiamo alla $\sigma_3 u$ la funzione

$$f(u) = e^{\frac{-\eta_1 u^2}{2\omega}}\,\sigma_3 u\,,$$

che ha il periodo $\Omega = 2\omega$ e aumentando u di $2n\omega'$ si riproduce, a causa delle (a^*) pag. 392, moltiplicata pel fattore

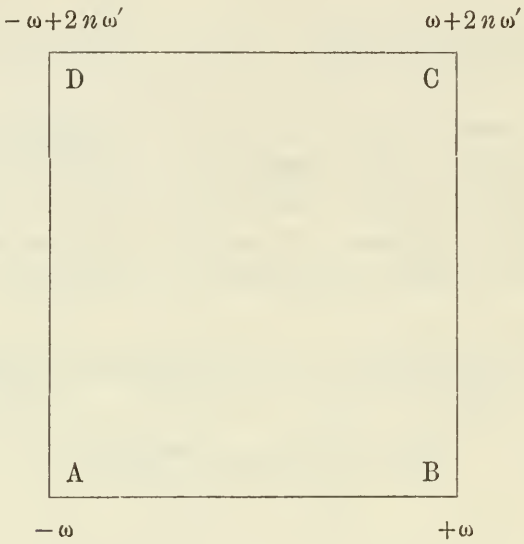
$$(-1)^n\, q^{-n^2}\, e^{\frac{-n\pi i u}{\omega}}\quad \left(q = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}}\right);$$

si ha cioè

$$(8)\qquad f(u+2n\omega') = (-1)^n\, q^{-n^2}\, e^{\frac{-n\pi i u}{\omega}}\,.\,f(u)\,.$$

Ciò premesso, osserviamo che, essendo $f(u)$ una funzione pari, tutti i coefficienti b_n nella (6) saranno nulli e potremo calcolare i coefficienti a_n mediante le considerazioni seguenti. Tracciamo nel piano u il parallelogrammo

Fig. 12.



$$ABCD \equiv (-\omega\,,\ \omega\,,\ \omega+2n\omega'\,,\ -\omega+2n\omega')$$

ed osserviamo che, essendo $f(u)$ una trascendente intera, sarà

$$\int_{ABCD} f(u)\,du = 0\,.$$

Accoppiando gli integrali estesi ai lati paralleli, quelli estesi a BC, DA si distruggono, perchè $f(u+2\omega) = f(u)$, onde resta

$$\int_{AB} f(u)\,du + \int_{CD} f(u)\,du = 0\,,$$

ovvero

$$\int_{AB} f(u)\,du = \int_{AB} f(u+2n\omega')\,du\,,$$

il che ci dà per la (8)

$$\int_{AB} f(u)\,du = (-1)^n q^{-n^2} \int_{AB} f(u)\, e^{\frac{-n\pi i u}{\omega}}\, du =$$

$$= (-1)^n q^{-n^2} \int_{AB} f(u) \cos\left(\frac{n\pi u}{\omega}\right) du\,,$$

ovvero per le (7)

$$a_n = 2\,a_0\,(-1)^n\, q^{n^2}.$$

Avremo dunque

$$\alpha) \qquad f(u) = e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\,\sigma_3 u = a_0 \left\{ 1 + 2 \sum_1^\infty (-1)^n\, q^{n^2} \cos\left(\frac{n\pi u}{\omega}\right) \right\},$$

e determineremo anche a_0 osservando che si ha

$$f(0) = 1\,.$$

Si ha così per lo sviluppo cercato:

$$e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\,\sigma_3 u = \frac{1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n\, q^{n^2} \cos\left(\frac{n\pi u}{\omega}\right)}{1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n\, q^{n^2}}\,.$$

§. 154.

Sviluppo delle altre σ e serie per calcolare η.

In modo simile si potrebbe procedere per le altre σ; ma è più semplice dedurre i loro sviluppi da quello ora ottenuto per la σ_3. Si ha infatti

$$\sigma u = C\, e^{\eta' u}\, \sigma_3 (u - \omega')\,,$$

e perciò

$$e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\,\sigma u = C'\, e^{\left(\eta' - \frac{\eta\,\omega'}{\omega}\right) u} . f(u) = C'\, e^{\frac{-\pi i u}{2\omega}}\, f(u)\,,$$

avendo $f(u)$ il valore α). Indicando con A un fattore costante, sarà dunque:

$$A e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma u = \cos\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n\pi i(u-\omega')}{\omega} - \frac{\pi i u}{2\omega}} +$$

$$+ \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} e^{-\frac{n\pi i(u-\omega')}{\omega} - \frac{\pi i u}{2\omega}} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2-n} e^{(2n-1)\frac{\pi i u}{2\omega}} +$$

$$+ \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2+n} e^{-(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega}}.$$

Ponendo da sè il termine della prima somma corrispondente ad $n=1$, e cangiando in questa n in $n+1$, otterremo

$$A e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma u = -2i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) - \sum_1^\infty (-1)^n q^{n(n+1)} \left[e^{(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega}} - e^{-(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega}} \right]$$

e quindi

$$e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma u = B \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n(n+1)} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi u}{2\omega}\right) \right\}$$

$$= B \sum_0^\infty (-1)^n q^{n(n+1)} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi u}{2\omega}\right).$$

Per determinare la costante B, si divida dall'una e dall'altra parte per u e si passi al limite per $u=0$; ne verrà

$$1 = B \frac{\pi}{2\omega} \sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) q^{n(n+1)},$$

onde

$$\beta) \qquad e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} \frac{\sum_0^\infty (-1)^n q^{n(n+1)} \operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi u}{2\omega}}{\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) q^{n(n+1)}}.$$

Come al §. 150, basterà servirsi ora delle relazioni

$$\left.\begin{aligned}\sigma_2 u &= \mathrm{B}\, e^{-\eta u}\, \sigma_3(u+\omega)\\ \sigma_1 u &= \mathrm{C}\, e^{-\eta u}\, \sigma\,(u+\omega)\end{aligned}\right\}\ \mathrm{B,\ C\ costanti}$$

per dedurre gli sviluppi di σ_1, σ_2 e potremo riassumere le formole nel quadro:

$$\text{(VII)}\quad \left\{\begin{aligned}
e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\,\sigma\, u &= \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{\sum\limits_0^\infty (-1)^n\, q^{n(n+1)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi u}{2\omega}\right)}{\sum\limits_0^\infty (-1)^n\,(2n+1)\, q^{n(n+1)}}\\
e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\,\sigma_1\, u &= \frac{\sum\limits_0^\infty q^{n(n+1)}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi u}{2\omega}\right)}{\sum\limits_0^\infty q^{n(n+1)}}\\
e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\,\sigma_2\, u &= \frac{1+2\sum\limits_1^\infty q^{n^2}\cos\left(\frac{n\pi u}{\omega}\right)}{1+2\sum\limits_1^\infty q^{n^2}}\\
e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}}\,\sigma_3\, u &= \frac{1+2\sum\limits_1^\infty (-1)^n\, q^{n^2}\cos\left(\frac{n\pi u}{\omega}\right)}{1+2\sum\limits_1^\infty (-1)^n\, q^{n^2}}\,.
\end{aligned}\right.$$

Dallo sviluppo della σu possiamo dedurre una formola che serve al calcolo del semiperiodo di 2.ª specie η, dati che siano ω, ω'. Sviluppiamo per ciò l'uno e l'altro membro della prima delle (VII) in serie di potenze di u, secondo le formole

$$\sigma u = u - \frac{g_2}{240}\, u^5 + \ldots\,,\quad e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} = 1 - \frac{\eta u^2}{2\omega} + \ldots$$

$$\mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\,\pi u}{2\omega} = \frac{(2n+1)\,\pi u}{2\omega} - \frac{1}{6}\left(\frac{(2n+1)\,u}{2\omega}\right)^3 + \ldots,$$

e paragoniamo i coefficienti di u^3. Posto

$$\mathrm{C} = \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{1}{\sum\limits_0^\infty (-1)^n\,(2n+1)\, q^{n(n+1)}}\,,$$

avremo

$$\frac{\eta}{2\omega} = \frac{C}{6}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^3 \sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)^3 q^{n(n+1)}$$

e quindi

$$\text{(VII*)}\ \eta\omega = \frac{\pi^2}{12}\,\frac{\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)^3 q^{n(n+1)}}{\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)\, q^{n(n+1)}} = \frac{\pi^2}{12}\,\frac{1-3^3 q^2+5^3 q^6-7^3 q^{12}+\ldots}{1-3\ q^2+5\ q^6-7\ q^{12}+\ldots},$$

che è la formola cercata e fa conoscere η dati ω, ω'. Dalla relazione

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}$$

si potrà poi calcolare η'.

§. 155.

Le serie ϑ.

Consideriamo quelle particolari funzioni σ che rispondono ai periodi

$$2\omega = 1\ ,\quad 2\omega' = \tau$$

e pei secondi membri delle formole (VII), moltiplicando nelle prime due formole numeratore e denominatore per $2q^{\frac{1}{4}}$, avremo le espressioni

$$a)\ \frac{2\sum_0^\infty (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \operatorname{sen}[(2n+1)\pi u]}{2\pi\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)\, q^{(n+\frac{1}{2})^2}}\ ,\qquad b)\ \frac{2\sum_0^\infty q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cos[(2n+1)\pi u]}{2\sum_0^\infty q^{(n+\frac{1}{2})^2}}$$

$$c)\ \frac{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\cos(2n\pi u)}{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}}\ ,\qquad d)\ \frac{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}\cos(2n\pi u)}{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}}\ .$$

Le serie al numeratore di queste espressioni possono anche scriversi rispettivamente:

$$a^*)\quad -i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{\pi i\tau\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i u}$$

$$b^*)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\tau\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i u}$$

$$c^*)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\tau n^2+2n\pi i u}$$

$$d^*)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{\pi i\tau n^2+2n\pi i u};$$

esse rientrano nel tipo generale seguente:

$$(\gamma)\qquad (-i)^{gh}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^{hn} e^{\pi i\tau\left(n+\frac{g}{2}\right)^2+2\pi i u\left(n+\frac{g}{2}\right)},$$

dove g, h sono numeri interi, che nei rispettivi casi $a^*)$, $b^*)$ $c^*)$ $d^*)$ hanno i valori

$$a^*\,(g,h)=(1,1)\ ,\ b^*\,(g,h)=(1,0)\ ,\ c^*\,(g,h)=(0,0)\ ,\ d^*\,(g,h)=(0,1).$$

Le serie (γ) prendono, secondo Jacobi, il nome di *serie* ϑ. Ponendo in evidenza l'argomento u, scriveremo

$$\text{(VIII)}\quad \vartheta_{g,h}(u)=(-i)^{gh}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{hn} e^{\pi i\tau\left(n+\frac{g}{2}\right)^2+2\pi i u\left(n+\frac{g}{2}\right)}.$$

Si vede subito che sussistono le formole

$$(9)\qquad \vartheta_{g+2,h}(u)=\vartheta_{g,h}(u)\ ,\ \vartheta_{g,h+2}(u)=(-1)^g\,\vartheta_{g,h}(u)\,,$$

onde risulta che le $\vartheta_{gh}(u)$ coincidono, salvo il segno, colle quattro fondamentali

$$\vartheta_{11}(u)\ ,\ \vartheta_{10}(u)\ ,\ \vartheta_{00}(u)\ ,\ \vartheta_{01}(u).$$

La notazione ora introdotta dei doppi indici è utile in molte ricerche, ma più usata è la seguente con un solo indice:

$$
\text{(IX)}\quad \left\{
\begin{aligned}
\vartheta_1(u) &= \vartheta_{11}(u) = 2\sum_0^\infty (-1)^n q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} \operatorname{sen}[(2n+1)\pi u] \\
\vartheta_2(u) &= \vartheta_{10}(u) = 2\sum_0^\infty q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\pi u] \\
\vartheta_3(u) &= \vartheta_{00}(u) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} \cos(2n\pi u) \\
\vartheta_0(u) &= \vartheta_{01}(u) = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos(2n\pi u).
\end{aligned}
\right.
$$

Dopo di ciò, denotando con ϑ' le derivate delle ϑ rapporto ad u, possiamo secondo le (VII) esprimere le σ per le ϑ colle formole:

$$
\text{(X)}\quad \left.
\begin{aligned}
e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma u &= 2\omega \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta'_1(0)}, \quad e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma_1 u = \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)} \\
e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma_2 u &= \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)}, \quad e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma_3 u = \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0(0)}
\end{aligned}
\right\} v = \frac{u}{2\omega}.
$$

Come si vede, ciascuna σ si esprime per la ϑ coll'indice superiore di un'unità, l'indice 4 essendo computato equivalente a 0.

Si osserverà che: *Delle quattro funzioni ϑ la $\vartheta_1(u)$ è dispari, le altre tre ϑ sono pari.*

§. 156.

Relazioni fra le ϑ.

Se nella formola (VIII) cangiamo u in $u + \frac{h' + g'\tau}{2}$, essendo g' h' due numeri interi qualunque, troviamo:

$$
\vartheta_{gh}\left(u + \frac{h' + g'\tau}{2}\right) =
$$

$$
= (-i)^{gh} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{hn} e^{\pi i \tau \left(n + \frac{g}{2}\right)^2 + 2\pi i u \left(n + \frac{g}{2}\right) + \pi i (h' + g'\tau)\left(n + \frac{g}{2}\right)}
$$

ovvero

$$\vartheta_{gh}\left(u+\frac{h'+g'\tau}{2}\right)=$$

$$=(-i)^{gh}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{hn}e^{\pi i\tau\left(n+\frac{g+g'}{2}\right)^2+2\pi iu\left(n+\frac{g+g'}{2}\right)+\pi ih'\left(n+\frac{g}{2}\right)-\pi i\tau\frac{g'^2}{4}-\pi iug'},$$

da cui risulta subito la formola generale

$$\text{(XI)}\quad \vartheta_{gh}\left(u+\frac{h'+g'\tau}{2}\right)=(-1)^{gh'}\,.\,i^{g'(h+h')}e^{-\frac{\pi i\tau g'^2}{4}-\pi iug'}\vartheta_{g+g',\,h+h'}(u).$$

Questa ci permette di esprimere le quattro ϑ per una sola di esse, p. e. per la

$$\vartheta_3(u)=\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{\pi i\tau n^2+2\pi iu\,.\,n}\ (1).$$

Dalla (XI) deduciamo in particolare l'effetto che si produce in $\vartheta_{gh}(u)$ aggiungendo all'argomento un numero intero ovvero un multiplo di τ;

---

(1) Ove si ponga

$$a=\pi i\tau\ ,\quad b=\pi iu$$

la serie $\vartheta_3(u)$ diventa

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{an^2+2bn},$$

serie sempre convergente per qualunque valore di b e pei valori di a colla parte reale negativa. Inversamente si può partire da una tale serie per costruire le ϑ e tutta la teoria delle funzioni ellittiche. Con legge analoga di formazione si costruiscono le serie con un numero qualunque p di indici $n_1\ n_2\ldots n_p$

$$\sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty}\ \sum_{n_2=-\infty}^{n_2=+\infty}\cdots\sum_{n_p=-\infty}^{n_p=+\infty}e^{\sum_{i,k}^{1\ldots p}a_{ik}n_in_k+2\sum_i b_in_i},$$

le quali convergono quando, indicando con a'_{ik} la parte reale di a_{ik} la forma quadratica

$$\sum_{i,k}^{1\ldots p}a'_{ik}n_in_k$$

è *definita negativa*. Per mezzo di queste serie si costruiscono le funzioni ϑ a più variabili $u_1\ u_2\ldots u_p$, mediante le quali si risolve il *problema d'inversione* nella teoria degli integrali Abeliani.

si ha infatti

$$\text{(XII)} \qquad \begin{cases} \vartheta_{gh}(u+1) = (-1)^g \, \vartheta_{gh}(u) \\ \vartheta_{gh}(u+\tau) = (-1)^h \, e^{-\pi i (2u+\tau)} \, \vartheta_{gh}(u) . \end{cases}$$

Dalla semplice ispezione della serie (VIII), considerando $\vartheta_{gh}(u)$ come funzione delle due variabili u, τ deduciamo subito l'importante risultato: *Le funzioni $\vartheta_{gh}(u, \tau)$ soddisfano l'equazione a derivate parziali del 2.° ordine:*

$$\text{(XIII)} \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} = 4 \pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} .$$

Dalle formole (X) facilmente deduciamo i valori delle tre quantità

$$U_1 = e^{\frac{-\eta_1 \omega_1}{2}} \sigma \omega_1 , \quad U_2 = e^{\frac{-\eta_2 \omega_2}{2}} \sigma \omega_2 , \quad U_3 = e^{\frac{-\eta_3 \omega_3}{2}} \sigma \omega_3 ,$$

già considerati al §. 150, espressi per i valori che assumono

$$\vartheta_0(u) , \quad \vartheta_2(u) , \quad \vartheta_3(u) , \quad \vartheta'_1(u)$$

per $u = 0$, valori che, per brevità, si indicano con

$$\vartheta_0 , \quad \vartheta_2 , \quad \vartheta_3 , \quad \vartheta'_1 ,$$

omettendo l'argomento. A tale scopo osserviamo che dalla (XI) e dalle (9) si trae

$$\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = i \, e^{\frac{-\pi i \omega'}{4\omega}} \vartheta_0 , \quad \vartheta_1\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = e^{\frac{-\pi i \omega'}{4\omega}} \vartheta_3$$

e facendo nella prima delle (X) successivamente

$$u = \omega , \quad \omega' , \quad \omega + \omega'$$

indi

$$v = \frac{1}{2} , \quad \frac{\tau}{2} , \quad \frac{1+\tau}{2} ,$$

avremo

$$U_1 = 2\omega \frac{\vartheta_2}{\vartheta'_1} , \quad U_2 = 2\omega \, e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\vartheta_3}{\vartheta'_1} , \quad U_2 = 2 i \omega \frac{\vartheta_0}{\vartheta'_1}$$

e quindi per le formole (2) del §. 150 (pag. 396)

$$(10)\qquad \begin{cases} \sqrt{e_1-e_2} = e^{\frac{-\pi i}{4}} \dfrac{U_3}{U_1\,U_2} = \dfrac{1}{2\omega}\,\dfrac{\vartheta_0\,\vartheta'_1}{\vartheta_2\,\vartheta_3} \\[2ex] \sqrt{e_2-e_3} = -e^{\frac{-\pi i}{4}} \dfrac{U_1}{U_2\,U_3} = \dfrac{1}{2\omega}\,\dfrac{\vartheta_2\,\vartheta'_1}{\vartheta_0\,\vartheta_3} \\[2ex] \sqrt{e_1-e_3} = e^{\frac{\pi i}{4}} \dfrac{U_2}{U_1\,U_3} = \dfrac{1}{2\omega}\,\dfrac{\vartheta_3\,\vartheta'_1}{\vartheta_0\,\vartheta_2}\,. \end{cases}$$

Queste formole possono semplificarsi, facendo uso della identità scoperta da Jacobi

$$(\mathrm{XIV})\qquad \vartheta'_1 = \pi\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,,$$

che ora dimostreremo. Esse diventano così:

$$(10^*)\qquad \sqrt{e_1-e_2} = \frac{\pi}{2\omega}\,\vartheta_0^2\,,\quad \sqrt{e_2-e_3} = \frac{\pi}{2\omega}\,\vartheta_2^2\,,\quad \sqrt{e_1-e_3} = \frac{\pi}{2\omega}\,\vartheta_3^2\,.$$

§. 157.

Dimostrazione dell'identità (XIV) di Jacobi e valori in serie di $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt[8]{\Delta}$.

Per dimostrare l'identità Jacobiana (XIV), partiamo dalla formola

$$(r=1,2,3)\qquad \wp(u+\omega_r) = -\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\sigma(u+\omega_r) = -\frac{\partial^2 \log\sigma_r u}{\partial u^2}\,,$$

che per le (X) può scriversi

$$\wp(u+\omega_r) = -\frac{1}{(2\omega)^2}\left\{4\,\eta\,\omega + \frac{\partial^2 \log\vartheta_{r+1}(v)}{\partial v^2}\right\}$$

colla convenzione $\vartheta_4(v) = \vartheta_0(v)$. In questa facciamo $v=0$ ed osservando che la formola (VII*) pag. 406, che dà il valore di $\eta\omega$, può scriversi

$$4\,\eta\,\omega = -\frac{1}{3}\,\frac{\vartheta'''_1}{\vartheta'_1}\,,$$

e d'altronde si ha

$$\frac{\partial^2 \log \vartheta(v)}{\partial v^2} = \frac{\vartheta''(v)}{\vartheta(v)} - \frac{\vartheta'^2(v)}{\vartheta^2(v)}$$

mentre $\vartheta'_0 = \vartheta'_2 = \vartheta'_3 = 0$, ne dedurremo

$$(11) \qquad e_r = -\frac{1}{(2\omega)^2}\left\{\frac{\vartheta''_{r+1}}{\vartheta_{r+1}} - \frac{1}{3}\frac{\vartheta'''_1}{\vartheta'_1}\right\}.$$

Ora dalla equazione (XIII) alle derivate parziali, cui soddisfano le ϑ, segue

$$\begin{cases} \dfrac{\vartheta''_{r+1}}{\vartheta_{r+1}} = 4\pi i \dfrac{\partial \log \vartheta_{r+1}}{\partial \tau} \\[2ex] \dfrac{\vartheta'''_1}{\vartheta'_1} = 4\pi i \dfrac{\partial \log \vartheta'_1}{\partial \tau} \end{cases}$$

e quindi si ha

$$3e_r = -\frac{\pi i}{\omega^2}\left\{\frac{\partial \log \vartheta^3_{r+1}}{\partial \tau} - \frac{\partial \log \vartheta'_1}{\partial \tau}\right\}.$$

Per ciò l'identità

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

diventa

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \log\left(\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}{\vartheta'_1}\right) = 0$$

e ci dimostra che il rapporto

$$\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}{\vartheta'_1}$$

è una costante assoluta. Per determinarne il valore effettivo si osservi che avendosi

$$\vartheta_0 = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots$$

$$\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \ldots)$$

$$\vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$$

$$\vartheta'_1 = 2\pi q^{\frac{1}{4}}\{1 - 3q^2 + 5q^4 + \ldots\}$$

se si fa crescere τ per valori puramente immaginarii all'infinito, q tende a zero e quindi $\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_2}$ ha per limite π mentre ϑ_0, ϑ_3 tendono a 1. Si ha dunque

$$\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}{\vartheta'_1} = \pi\,,$$

che è appunto l'identità (XIV).

Così sono anche dimostrate le formole (10), dalle quali risulta l'altra identità

$$\text{(XV)} \qquad \vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4\,,$$

pure dovuta a Jacobi. È molto notevole che fra i quattro valori

$$\vartheta_0\,,\ \vartheta_2\,,\ \vartheta_3\,,\ \vartheta'_1\,,$$

che sono espressioni trascendenti in τ, sussistano così due relazioni algebriche (XIV) e (XV).

Le formole (10*) conducono poi ad espressioni notevoli in serie per

$$\sqrt{k} = \sqrt[4]{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}\,,\quad \sqrt{k'} = \sqrt[4]{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}\,;$$

avremo invero

$$\text{(XVI)} \qquad \begin{cases} \sqrt{k} = \dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = 2\,q^{\frac{1}{4}}\,\dfrac{\sum\limits_0^\infty q^{n(n+1)}}{1 + 2\sum\limits_1^\infty q^{n^2}} \\[2ex] \sqrt{k'} = \dfrac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \dfrac{1 + 2\sum\limits_1^\infty (-1)^n\, q^{n^2}}{1 + 2\sum\limits_1^\infty q^{n^2}}\,. \end{cases}$$

Similmente per il valore di

$$\sqrt[8]{\Delta} = \sqrt{2}\,\sqrt[4]{(e_1 - e_2)\,(e_2 - e_3)\,(e_1 - e_3)}$$

troviamo l'espressione

$$\sqrt[8]{\Delta} = \sqrt{2}\,\sqrt{\left(\frac{\pi}{2\,\omega}\right)^3}\,.\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3 = \frac{1}{2\,\omega}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\,\vartheta'_1$$

ossia

$$\text{(XVII)} \qquad \sqrt[8]{\Delta} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}}.\ q^{\frac{1}{4}} \sum_0^\infty (-1)^n\,(2n+1)\,q^{n(n+1)}.$$

§. 158.

Sviluppi in prodotti infiniti delle ϑ.

Paragonando le formole (10*), che ci danno gli sviluppi in serie di

$$\sqrt{e_1-e_2}\,,\ \sqrt{e_2-e_3}\,,\ \sqrt{e_1-e_3}\,,$$

colle (5) pag. 397 che ne danno gli sviluppi pei prodotti infiniti

$$Q_0=\prod_1^\infty(1-q^{2n})\,,\ Q_1=\prod_1^\infty(1+q^{2n})\,,\ Q_2=\prod_1^\infty(1+q^{2n-1})\,,\ Q_3=\prod_1^\infty(1-q^{2n-1}),$$

troviamo subito le formole

$$\vartheta_0=\pm Q_3^2\,Q_0\,,\quad \vartheta_2=\pm 2\,q^{\frac{1}{4}}\,Q_1^2\,Q_0\,,\quad \vartheta_3=\pm Q_2^2\,Q_0\,.$$

L'incertezza del segno si toglie esaminando il caso limite $q=0$ e si ha così:

$$\text{(XVIII)}\qquad \vartheta_0=Q_3^2\,Q_0\,,\quad \vartheta_2=2\,q^{\frac{1}{4}}\,Q_1^2\,Q_0\,,\quad \vartheta_3=Q_2^2\,Q_0\,,$$

dalle quali segue anche, per l'identità

$$Q_1\,Q_2\,Q_3=1$$

$$\text{(XVIII*)}\qquad \vartheta'_1=\pi\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3=2\,\pi\,q^{\frac{1}{4}}\,Q_0^3=2\,\omega\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\,\sqrt[8]{\Delta}\,.$$

Queste formole ci danno le seguenti notevoli trasformazioni di serie in prodotti infiniti:

$$\left\{\begin{aligned}
1+2\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2} &= \prod_1^\infty(1-q^{2n-1})^2\,(1-q^{2n})\\
\sum_0^\infty q^{n(n+1)} &= \prod_1^\infty(1+q^{2n})^2\,(1-q^{2n})\\
1+2\sum_1^\infty q^{n^2} &= \prod_1^\infty(1+q^{2n-1})^2\,(1-q^{2n})\\
\sum_1^\infty(-1)^n\,(2n+1)\,q^{n(n+1)} &= \prod_1^\infty(1-q^{2n})^3
\end{aligned}\right.$$

che valgono qualunque sia q, purchè sia $|q|<1$.

Con ciò è anche risoluto il problema di esprimere le serie ϑ per prodotti infiniti. Paragonando infatti le (X) pag. 408 colle (I) pag. 395 otteniamo subito intanto:

$$\left\{\begin{aligned}
\vartheta_1(v) &= C \operatorname{sen} \pi v \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \\
\vartheta_2(v) &= C_1 \cos \pi v \prod_1^\infty (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \\
\vartheta_3(v) &= C_2 \prod_1^\infty (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}) \\
\vartheta_0(v) &= C_3 \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}),
\end{aligned}\right.$$

dove C, C_1, C_2, C_3 sono costanti rispetto all'argomento v. Per determinarle facciamo nelle tre ultime $v = 0$ e lo stesso facciamo nella prima dopo divisi i due membri per v; troviamo così:

$$\vartheta'_1 = C \pi Q_0^2 \ , \quad \vartheta_2 = C_1 Q_1^2 \ , \quad \vartheta_3 = C_2 Q_2^2 \ , \quad \vartheta_0 = C_3 Q_3^2$$

e quindi per le (XVIII), (XVIII*)

$$C = C_1 = 2q^{\frac{1}{4}} Q_0 \ , \quad C_2 = C_3 = Q_0 .$$

Abbiamo dunque le formole definitive:

$$\text{(XIX)} \left\{\begin{aligned}
\vartheta_1(v) &= 2q^{\frac{1}{4}} \sum_0^\infty (-1)^n q^{n(n+1)} \operatorname{sen}[(2n+1)\pi v] = \\
&= 2q^{\frac{1}{4}} \operatorname{sen}(\pi v) \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n} \cos(2\pi v) + q^{4n})(1 - q^{2n}) \\
\vartheta_2(v) &= 2q^{\frac{1}{4}} \sum_1^\infty q^{n(n+1)} \cos[(2n+1)\pi v] = \\
&= 2q^{\frac{1}{4}} \cos(\pi v) \prod_1^\infty (1 + 2q^{2n} \cos(2\pi v) + q^{4n})(1 - q^{2n}) \\
\vartheta_3(v) &= 1 + 2 \sum_1^\infty q^{n^2} \cos(2n\pi v) = \\
&= \prod_1^\infty (1 + 2q^{2n-1} \cos(2\pi v) + q^{4n-2})(1 - q^{2n}) \\
\vartheta_0(v) &= 1 + 2 \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos(2n\pi v) = \\
&= \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n-1} \cos(2\pi v) + q^{4n-2})(1 - q^{2n}).
\end{aligned}\right.$$

Notiamo in fine due sviluppi in serie per

$$\sqrt{\frac{2\,\mathrm{K}}{\pi}}\,,\ \sqrt{\frac{2\,\mathrm{K}k'}{\pi}}$$

che risultano dalle formule (III), (IV) pag. 398

$$\sqrt{\frac{2\,\mathrm{K}}{\pi}} = \mathrm{Q}_2^2\,\mathrm{Q}_0\ ,\ \sqrt{\frac{2\,\mathrm{K}k'}{\pi}} = \mathrm{Q}_3^2\,\mathrm{Q}_0\,,$$

confrontate con quelle superiori. Otteniamo così le formole molto notevoli di Jacobi:

$$(\mathrm{XX})\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\,\mathrm{K}}{\pi}} = \vartheta_3 = 1+2\sum\limits_1^\infty q^{n^2} = 1+2\,q+2\,q^4+2\,q^9+\ldots \\ \sqrt{\dfrac{2\,\mathrm{K}k'}{\pi}} = \vartheta_0 = 1+2\sum\limits_1^\infty (-1)^n\,q^{n^2} = 1-2\,q+2\,q^4-2\,q^9+\ldots \end{cases}$$

§. 159.

Trasformazioni di 1.° ordine per le $\vartheta\,(v,\tau)$.

Le funzioni ϑ sono propriamente funzioni delle due variabili v, τ; volendo porre in evidenza non solo il valore dell'argomento v, ma anche quello del rapporto dei periodi si scrive:

$$\vartheta_1\,(v,\tau)\ ,\ \vartheta_2\,(v,\tau)\ ,\ \vartheta_3\,(v,\tau)\ ,\ \vartheta_0\,(v,\tau)\,.$$

È importante ricercare come cangiano le ϑ quando sul rapporto τ dei periodi si eseguisca una sostituzione del gruppo modulare

$$\tau' = \frac{\alpha\,\tau+\beta}{\gamma\,\tau+\delta}\,.$$

Basterà per ciò esaminare l'effetto delle due sostituzioni generatrici del gruppo modulare

$$\tau' = \tau+1\ ,\ \tau' = -\frac{1}{\tau}\,.$$

Quanto all'effetto della prima la risposta è immediata, appena si osservino le loro espressioni analitiche (XIX), e si trovano così le formole:

$$\text{(XXI)} \quad \begin{cases} \vartheta_1(v, \tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_1(v, \tau) \ , & \vartheta_2(v, \tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_2(v, \tau) \\ \vartheta_3(v, \tau+1) = \vartheta_3(v, \tau) \ , & \vartheta_0(v, \tau+1) = \vartheta_0(v, \tau) \ . \end{cases}$$

Per esaminare l'effetto dell'altra sostituzione

$$\tau' = -\frac{1}{\tau} \ ,$$

esprimiamo le ϑ per le σ per mezzo delle (X) (pag. 408) e ricorriamo alle (XVIII), (XVIII*), che ci danno

$$\vartheta_0 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_2} \ , \quad \vartheta_2 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_2 - e_3} \ , \quad \vartheta_3 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_3} \ ,$$

$$\vartheta'_1 = 2\omega \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[8]{\Delta} \ ;$$

avremo così le formole

$$\text{(12)} \quad \left. \begin{aligned} \vartheta_1(v, \tau) &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \sqrt[8]{\Delta} \ e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma u \\ \vartheta_2(v, \tau) &= \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_2 - e_3} \ e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma_1 u \\ \vartheta_3(v, \tau) &= \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_3} \ e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma_2 u \\ \vartheta_0(v, \tau) &= \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_2} \ e^{\frac{-\eta u^2}{2\omega}} \sigma_3 u \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v &= \frac{u}{2\omega} \\ \tau &= \frac{\omega'}{\omega} \ . \end{aligned}$$

Consideriamo ora le funzioni $\bar{\sigma}$ coi nuovi periodi

$$\bar{\omega} = \omega' \ , \quad \bar{\omega}' = -\omega \ ,$$

che indicheremo con $\bar{\sigma} u$, $\bar{\sigma}_1 u$, $\bar{\sigma}_2 u$, $\bar{\sigma}_3 u$, mentre con

$$\bar{e}_1 \ , \ \bar{e}_2 \ , \ \bar{e}_3 \ , \ \bar{\Delta}$$

indicheremo i nuovi valori di e_1, e_2, e_3, Δ. Per le formole della tabella (A) pag. 341, avremo

$$\bar{\sigma} u = \sigma u \ , \quad \bar{\sigma}_1 u = \sigma_3 u \ , \quad \bar{\sigma}_2 u = \sigma_2 u \ , \quad \bar{\sigma}_3 u = \sigma_1 u$$

$$\bar{e}_1 = e_3 \ , \quad \bar{e}_2 = e_2 \ , \quad \bar{e}_3 = e_1 \ ,$$

e similmente sarà

$$\bar{\eta} = \eta' \ , \quad \bar{\eta}' = -\eta .$$

Ora dalle (12), ponendo

$$\bar{v} = \frac{u}{2\bar{\omega}} = \frac{v}{\tau} \ ,$$

risulta

$$\left\{\begin{aligned}
\vartheta_1\left(\bar{v}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[8]{\bar{\Delta}}\; e^{\frac{-\bar{\eta} u^2}{2\bar{\omega}}} . \bar{\sigma} u = \\
&= \varepsilon_1 \sqrt{\tau}\,\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\,\sqrt[8]{\Delta}\; e^{\frac{-\eta' u^2}{2\omega'}}\,\sigma u \\
\vartheta_2\left(\bar{v}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{\bar{e}_2 - \bar{e}_3} . e^{\frac{-\bar{\eta} u^2}{2\bar{\omega}}}\,\bar{\sigma}_1 u = \\
&= \varepsilon_2 \sqrt{\tau}\,\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1 - e_2}\; e^{\frac{-\eta' u^2}{2\omega'}}\,\sigma_3 u \\
\vartheta_3\left(\bar{v}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{\bar{e}_1 - \bar{e}_3}\; e^{\frac{-\bar{\eta} u^2}{2\bar{\omega}}} . \bar{\sigma}_2 u = \\
&= \varepsilon_3 \sqrt{\tau}\,\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1 - e_3}\; e^{\frac{-\eta' u^2}{2\omega'}}\,\sigma_2 u \\
\vartheta_0\left(\bar{v}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{\bar{e}_1 - \bar{e}_2} . e^{\frac{-\bar{\eta} u^2}{2\bar{\omega}}}\,\bar{\sigma}_3 u = \\
&= \varepsilon_4 \sqrt{\tau}\,\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_2 - e_3}\; e^{\frac{-\eta' u^2}{2\omega'}}\,\sigma_1 u \ ,
\end{aligned}\right.$$

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ indicano convenienti radici ottave dell'unità. Il confronto colle (12), osservando che si ha

$$\frac{\eta u^2}{2\omega} - \frac{\eta' u^2}{2\omega'} = \frac{\eta\omega' - \eta'\omega}{2\omega\omega'} u^2 = \frac{\pi i}{4\omega\omega'} u^2 = \frac{\pi i v^2}{\tau},$$

ci dà

$$\left\{\begin{aligned}
\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \varepsilon_1 \sqrt{\tau}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_1(v, \tau) \\
\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \varepsilon_2 \sqrt{\tau}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_0(v, \tau) \\
\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \varepsilon_3 \sqrt{\tau}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_3(v, \tau) \\
\vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \varepsilon_4 \sqrt{\tau}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_2(v, \tau).
\end{aligned}\right.$$

Per determinare $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, che sono indipendenti da v e τ, si faccia nelle ultime tre formole $v = 0$, $\tau = i$ e risulterà

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{i}},$$

mentre la prima, divisa per u, e fatto ancora $u = 0$, $\tau = i$ dà

$$\varepsilon_1 = -\frac{i}{\sqrt{i}}$$

e quindi abbiamo per le formole cercate:

$$\text{(XXII)} \quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= -i\sqrt{\frac{\tau}{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_1(v, \tau) \\
\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_0(v, \tau) \\
\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_3(v, \tau) \\
\vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_2(v, \tau).
\end{aligned}\right.$$

Per far sparire ogni ambiguità da queste formole finali resta solo da stabilirsi quale determinazione è da scegliersi per $\sqrt{\frac{\tau}{i}}$ in ciascuna di esse; dimostriamo che *in tutte quattro le formole* (XXII) *deve prendersi per* $\sqrt{\frac{\tau}{i}}$ *quel segno che dà un valore positivo alla sua parte reale.*

Ciò ha luogo in effetto per $v = 0$, $\tau = i$ e quindi in tutti i casi perchè la parte reale di $\frac{\tau}{i}$, quindi anche quella di $\sqrt{\frac{\tau}{i}}$, non passa mai per lo zero.

Osservazione. — Il caso più importante delle applicazioni è quello in cui debbasi calcolare i valori delle σ o delle ϑ per valori puramente immaginarii di τ. Ora il caso in cui $|\tau| < 1$ si riconduce, mediante le (XXII), al caso $|\tau| > 1$, ove $q = e^{\pi i \tau} = e^{-\pi \beta}$ è reale, positiva e minore di

$$e^{-\pi} = 0,04321\ldots$$

Le serie ϑ, per valori reali dell'argomento v, hanno allora una convergenza estremamente rapida, sicchè basta il calcolo di pochi termini della serie per ottenere con grande approssimazione il corrispondente valore delle ϑ [1].

Capitolo XV.

Teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche. — Trasformazioni di grado primo della $\wp u$ e della σu. — Trasformazione di Landen.

§. 160.

Problema della trasformazione delle funzioni ellittiche. Riduzione al caso delle trasformazioni razionali.

Nelle teorie relative alle funzioni ellittiche, che abbiamo svolto fin qui, i periodi 2ω, $2\omega'$ si riguardavano come costanti e si ricercavano le relazioni fra funzioni ellittiche di diversi argomenti coi medesimi periodi. Ma in realtà le funzioni ellittiche, e in particolare la fondamentale

$$\wp(u \mid \omega, \omega'),$$

[1] Veggasi per più ampie notizie il Cap. VIII del *Traité des fonctions elliptiques* di Halphen T. I.

sono funzioni delle tre variabili u, ω, ω' e possiamo egualmente ricercare le relazioni fra funzioni ellittiche con diversi periodi. Appartiene a questo genere di ricerche la *teoria della trasformazione* delle funzioni ellittiche, di cui ora ci andiamo ad occupare. Il problema fondamentale della teoria, limitandoci alla funzione elementare $\wp u$, si enuncia nel modo seguente:

Per quali funzioni $\wp$, costruite con diversi periodi

$$\wp u = \wp(u \mid \omega, \omega') \ , \quad \bar{\wp} u = \wp(u \mid \Omega, \Omega') \ ,$$

accade che sussista fra $\wp u$, $\bar{\wp} u$ una relazione algebrica

$$F(\wp u, \bar{\wp} u) = 0 \, ?$$

Possiamo dare a questo problema una forma algebrica osservando, che, posto

$$s = \wp u \ , \quad S = \bar{\wp} u \ ,$$

e indicando con g_2, g_3 gli invarianti della $\wp u$, con $\bar{g}_2, \bar{g}_3$ quelli della $\bar{\wp} u$, si avrà

$$(1) \qquad du = \frac{ds}{\sqrt{4 s^3 - g_2 s - g_3}} = \frac{dS}{\sqrt{4 S^3 - \bar{g}_2 S - \bar{g}_3}} \ ;$$

la questione proposta equivale quindi alla ricerca delle relazioni algebriche

$$(2) \qquad F(s, S) = 0$$

che trasformano l'uno nell'altro i differenziali ellittici

$$\frac{ds}{\sqrt{4 s^3 - g_2 s - g_3}} \ , \quad \frac{dS}{\sqrt{4 S^3 - \bar{g}_2 S - \bar{g}_3}} \ ,$$

ovvero alla ricerca delle condizioni perchè l'equazione differenziale (1) ammetta un'integrale (2) algebrico.

Mentre la trattazione algebrica di questo problema offrirebbe grandi difficoltà, esso può risolversi facilmente per via trascendente. Per ciò osserviamo che se nella supposta relazione algebrica

$$(2^*) \qquad F(\wp u, \bar{\wp} u) = 0 \ ,$$

che intendiamo già ridotta a forma razionale ed intera, accresciamo l'argomento u di $2r\omega$, essendo r un intero qualunque, la $\wp u$ non muta e sarà quindi ancora

$$F(\wp u, \bar{\wp}(u+2r\omega)) = 0,$$

cioè tutte le quantità

$$x_r = \bar{\wp}(u+2r\omega)$$

saranno radici della equazione

$$F(\wp u, x) = 0,$$

e però dovrà necessariamente accadere che, per valori distinti di r, r', si abbiano eguaglianze della forma

$$\bar{\wp}(u+2r\omega) = \bar{\wp}(u+2r'\omega).$$

La differenza

$$2(r-r')\omega = 2k\omega$$

sarà perciò un periodo della $\bar{\wp} u$ e si avrà quindi

$$k\omega = a\Omega + b\Omega'$$

con a, b, k, numeri interi, e similmente

$$k'\omega' = c\Omega + d\Omega',$$

essendo ancora c, d, k' interi. Potremo quindi scrivere le relazioni

$$(3) \qquad \begin{cases} r\omega = a_1\Omega + b_1\Omega' \\ r\omega' = c_1\Omega + d_1\omega', \end{cases}$$

dove i numeri interi a_1, b_1, c_1, d_1, r si potranno supporre senza divisore comune e sarà

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0.$$

Inversamente, se fra i periodi 2ω, $2\omega'$ della $\wp u$ e quelli 2Ω, $2\Omega'$ della $\bar{\wp} u$ sussistono relazioni della forma (3), le due funzioni ellittiche $\wp u$, $\bar{\wp} u$, avendo a comune la coppia di periodi

$$2r\omega, \quad 2r\omega',$$

saranno certamente legate da una relazione algebrica (§. 107). Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè fra $\wp(u|\omega,\omega')$, $\wp(u|\Omega,\Omega')$ *sussista una relazione algebrica è che fra i loro periodi abbiano luogo le relazioni* (3) *a coefficienti interi.*

Ma possiamo subito semplificare il nostro problema colla considerazione seguente. Se introduciamo la terza funzione ellittica

$$\wp_1 u = \wp(u|r\omega, r\omega'),$$

tanto $\wp u$ che $\bar{\wp} u$, ammettendo i periodi di $\wp_1 u$ ed essendo pari, saranno funzioni razionali di $\wp_1 u$. La trasformazione *irrazionale* che da $\wp u$ conduce a $\bar{\wp} u$ si può dunque comporre con due trasformazioni *razionali*, mediante le quali tanto $\wp u$ che $\bar{\wp} u$ si esprimono razionalmente per l'ausiliaria $\wp_1 u$ [1].

Così il problema della trasformazione è ridotto all'altro più semplice:

Quali funzioni $\wp(u|\Omega,\Omega')$ *si esprimono razionalmente per* $\wp(u|\omega,\omega')$?

§. 161.

Trasformazioni razionali e loro grado.

Ridotto così il problema alla ricerca delle trasformazioni razionali, supponiamo dunque che si abbia

$$\text{(A)} \qquad \wp(u|\Omega,\Omega') = F(\wp(u|\omega,\omega')),$$

essendo F il simbolo di una funzione razionale. È chiaro che i periodi 2ω, $2\omega'$ della $\wp u$ dovranno pur essere periodi della

$$\bar{\wp} u = \wp(u|\Omega,\Omega')$$

e si avrà per ciò

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \omega = a\Omega + b\Omega' \\ \omega' = c\Omega + d\Omega', \end{cases}$$

---

[1] Ciò dimostra che l'equazione algebrica (2) è in ogni caso di genere *zero*.

con a, b, c, d numeri interi. E poichè supponiamo inoltre sempre

$$R\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right) > 0 \ , \ R\left(\frac{\Omega'}{i\Omega}\right) > 0,$$

il determinante

$$\Delta = ad - bc$$

sarà un numero intero positivo. Inversamente, se hanno luogo relazioni della forma (I), la $\bar{\wp} u$ ammetterà i periodi di $\wp u$, ed essendo pari, sarà una funzione razionale di $\wp u$.

Vogliamo ora stabilire il significato del determinante $\Delta = ad - bc$. Supponiamo che la funzione razionale $F(s)$ $(s = \wp u)$ sia il quoziente di due polinomii razionali interi $U(s)$, $V(s)$ primi fra loro

$$F(s) = \frac{U(s)}{V(s)} \ ;$$

si dirà *grado* della trasformazione il più alto dei due gradi dei polinomii U, V. Ora il significato di Δ è dato dal teorema:

Il determinante $\Delta = ad - bc$ dà il grado della trasformazione.

Per dimostrarlo osserviamo che, posto

$$S = \bar{\wp} u \ ,$$

si ha

$$SV(s) - U(s) = 0$$

e, fissato S ad arbitrio, questa equazione *irriducibile* in s avrà un numero di radici eguale al grado della trasformazione. Questo grado eguaglia dunque il numero dei valori distinti di $\wp u$ per un medesimo valore di $\bar{\wp} u$.

Ora se risolviamo le (I) rapporto ad Ω, Ω', abbiamo

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \begin{cases} \Delta\,\Omega = d\,\omega - b\,\omega' \\ \Delta\,\Omega' = -c\,\omega + a\,\omega' \end{cases}$$

e poichè i valori di u che danno lo stesso valore di $\bar{\wp} u$ sono tutti della forma

$$\pm u + 2m\Omega + 2n\Omega' \ ,$$

percorrendo m, n tutti gli interi, converrà esaminare quanti dei corri-

spondenti valori di $\wp u$:

$$\wp(\pm u + 2m\Omega + 2n\Omega') = \wp\left(\pm u + 2\frac{md-nc}{\Delta}\omega + 2\frac{-mb+na}{\Delta}\omega'\right),$$

ovvero di [1]

$$\text{(B)} \qquad \wp\left(u + 2\frac{md-nc}{\Delta}\omega + 2\frac{-mb+na}{\Delta}\omega'\right),$$

saranno distinti.

Ora, se poniamo

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} md - nc = r \\ -mb + na = s, \end{cases}$$

ed osserviamo che una nuova coppia di valori (r_1, s_1) per r, s darà nella (B) il medesimo valore allora e allora soltanto che sia

$$(r_1, s_1) \equiv (r, s) \pmod{\Delta},$$

vediamo che il numero richiesto sarà il numero delle coppie (r, s) incongrue (mod Δ), definite dalle (4). Sia ε il massimo comun divisore di c, d e poniamo

$$c = \varepsilon c_1, \quad d = \varepsilon d_1, \quad r = \varepsilon r_1,$$

onde

$$\text{(5)} \qquad m d_1 - n c_1 = r_1.$$

Poichè c_1, d_1 sono primi fra loro, potrà r_1 avere qualsiasi valore e quindi

$$r = \varepsilon r_1$$

assumerà soltanto $\frac{\Delta}{\varepsilon}$ valori incongrui (mod Δ). Per ognuno di questi valori le coppie (m, n) che soddisfano la (5) sono legate ad una fissa m', n' dalle formole

$$\left.\begin{aligned} m &= m' + t c_1 \\ n &= n + t d_1 \end{aligned}\right\} t \text{ intero qualunque}$$

---

[1] È inutile considerare il doppio segno di u, come si vede cangiando m, n in $-m, -n$.

e i corrispondenti valori di s sono dati da

$$s = -m'b + n'a + t(-bc_1 + ad_1)$$
$$= -m'b + n'a + t\frac{\Delta}{\varepsilon}$$

e percorrono solo ε valori distinti (mod Δ). Il numero cercato è adunque

$$\frac{\Delta}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = \Delta \quad \text{c. d. d.}$$

§. 162.

Equivalenza delle trasformazioni.

La trasformazione razionale (A) è perfettamente determinata, noti che siano i quattro numeri a, b, c, d nelle (I); indicheremo per ciò la trasformazione stessa col simbolo

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

e la prima questione che dovremo risolvere sarà di vedere quando due diversi simboli

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix}$$

rappresenteranno la medesima trasformazione, conducendo dalla medesima funzione $\wp(u \mid \omega, \omega')$ ad eguali funzioni trasformate

$$(\alpha) \qquad \wp(u \mid \Omega, \Omega') = \wp(u \mid \Omega_1, \Omega'_1).$$

Le formole (I) per la trasformazione

$$\begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix}$$

saranno

$$(6) \qquad \begin{cases} \omega = a'\Omega_1 + b'\Omega'_1 \\ \omega' = c'\Omega_1 + d'\Omega'_1. \end{cases}$$

Ora le condizioni *necessarie e sufficienti* per l'eguaglianza (α) sono contenute nelle relazioni (§. 104)

$$\begin{cases} \Omega = \alpha\,\Omega_1 + \beta\,\Omega'_1 \\ \Omega' = \gamma\,\Omega_1 + \delta\,\Omega'_1 . \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ interi e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Sostituendo nelle (I), e paragonando colle (6), troviamo

$$\begin{cases} a' = a\alpha + b\gamma\ , \quad b' = a\beta + b\delta \\ c' = c\alpha + d\gamma\ , \quad d' = c\beta + d\delta . \end{cases}$$

La trasformazione $\begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix}$, che conduce da $\wp(u|\omega, \omega')$ a $\wp(u|\Omega_1, \Omega'_1)$, è quindi il risultato delle due successive

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix},$$

la prima delle quali fa passare da $\wp(u|\omega, \omega')$ a $\wp(u|\Omega, \Omega')$ e la seconda da $\wp(u|\Omega, \Omega')$ a $\wp(u|\Omega_1, \Omega'_1)$; ma per questa ultima, che è di 1.° grado, la corrispondente $\bar{\wp}u$ non cangia [1].

Scriviamo simbolicamente la trasformazione composta così:

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma, a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma, c\beta + d\delta \end{pmatrix} .$$

Due tali trasformazioni $\begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$, legate da una relazione (7), essendo

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$$

una trasformazione qualunque di 1.° grado, si diranno fra loro *equivalenti*, come quelle che conducono alla medesima $\wp u$ trasformata. Il con-

---

[1] Questa proprietà della $\wp u$ di Weierstrass di restare immutata per tutte le trasformazioni di 1.° grado è quella appunto che qui, nella teoria della trasformazione, rende tanto più semplice la ricerca in confronto dell'antica teoria per le funzioni di Jacobi

$$\operatorname{sn} v, \ \operatorname{cn} v, \ \operatorname{dn} v.$$

cetto di equivalenza è evidentemente invertibile, come si vede anche dalla formola

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}$$

e poichè inoltre due trasformazioni equivalenti ad una terza sono anche equivalenti fra loro, potremo ripartire tutte le trasformazioni

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

di un dato grado n in *classi*, ponendo nella medesima classe tutte le infinite trasformazioni equivalenti fra loro. Così due trasformazioni qualunque saranno equivalenti o no, secondo che appartengono o non appartengono alla medesima classe.

§. 163.

Riduzione alla forma normale.

Stabilite queste nozioni fondamentali, dimostriamo subito il teorema:

Per ogni valore del grado n il numero delle classi, cioè il numero delle trasformazioni distinte, è sempre finito.

Per ciò dimostreremo che *in ogni classe* vi sono trasformazioni del tipo

$$\begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix}$$

col secondo coefficiente $b' = 0$. Sia infatti $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ una trasformazione qualunque della classe e sia $b \neq 0$. Se $a = 0$ basta osservare che si ha

$$\begin{pmatrix} 0, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b, & 0 \\ -d, & c \end{pmatrix}$$

per conseguire lo scopo proposto.

Siano ora adunque

$$a \neq 0 \ , \quad b \neq 0 \, ;$$

dimostriamo che si possono assegnare quattro interi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, con $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, tali che sia

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a', & 0 \\ c', & d' \end{pmatrix},$$

cioè con

(8) $$a\beta + b\delta = 0.$$

Indichiamo con σ il massimo comun divisore di a, b, che dividerà

$$ad - bc = n.$$

Dovendo essere per la (8)

$$\frac{\frac{b}{\sigma}}{\frac{a}{\sigma}} = -\frac{\beta}{\delta},$$

ed essendo ambedue le frazioni ridotte ai minimi termini, sarà

$$\beta = \mp\frac{b}{\sigma}, \quad \delta = \pm\frac{a}{\sigma}$$

e poichè un cangiamento simultaneo di segno in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ non altera evidentemente la trasformazione composta $\begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix}$, potremo assumere senz'altro

$$\beta = -\frac{b}{\sigma}, \quad \delta = \frac{a}{\sigma},$$

onde risulterà

$$a' = a\alpha + b\gamma = \sigma(\alpha\delta - \beta\gamma) = \sigma$$

$$d' = c\beta + d\delta = \frac{ad - bc}{\sigma} = \frac{n}{\sigma}.$$

Ora da

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \frac{a}{\sigma}\alpha + \frac{b}{\sigma}\gamma = 1,$$

equazione solubile in numeri interi α, γ perchè $\frac{a}{\sigma}$, $\frac{b}{\sigma}$ sono primi fra loro, si vede che indicando con α', γ' una particolare coppia di soluzioni, ogni altra sarà data dalle formole

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha' - \rho\frac{b}{\sigma} \\ \gamma &= \gamma' + \rho\frac{a}{\sigma} \end{aligned}\right\} \text{con } \rho \text{ intero qualunque}$$

e sarà quindi

$$c' = c\alpha' + d\gamma' + \rho\,\frac{n}{\sigma}\,.$$

Esistono adunque nella classe di $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ *infinite* trasformazioni col 2.° coefficiente *zero;* esse hanno tutte la forma

$$\text{(II)} \qquad \begin{pmatrix} \sigma, & 0 \\ \xi, & \dfrac{n}{\sigma} \end{pmatrix},$$

dove il 3.° coefficiente

$$\xi = c\alpha' + d\gamma' + \rho\,\frac{n}{\sigma}$$

è determinato soltanto rispetto al modulo $\frac{n}{\sigma}$. Due trasformazioni della forma normale (II) appartengono dunque a classe diversa se il divisore σ è diverso nelle due trasformazioni ovvero se, essendo lo stesso σ, sono diversi i valori di $\xi \left(\text{mod}\,\frac{n}{\sigma}\right)$.

Ad ogni divisore σ di n corrispondono quindi $\frac{n}{\sigma}$ classi distinte, onde vediamo che *il numero totale delle classi è dato dalla somma dei divisori di n.*

§. 164.

Trasformazioni imprimitive e primitive. Trasformazioni di grado composto.

Se con una trasformazione $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ di grado n si passa dalla $\wp(u\,|\,\omega, \omega')$ alla $\wp(u\,|\,\Omega, \Omega')$ indi, con una nuova trasformazione $\begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix}$ di grado m, dalla $\wp(u\,|\,\Omega, \Omega')$ alla $\wp(u\,|\,\bar{\Omega}, \bar{\Omega}')$, si ha infine

$$\wp(u\,|\,\bar{\Omega}, \bar{\Omega}')$$

espressa razionalmente per $\wp(u\,|\,\omega, \omega')$ colla trasformazione composta di

grado nm

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc', & ab'+bd' \\ ca'+dc', & cb'+dd' \end{pmatrix}.$$

Ora osserviamo che una trasformazione di grado n^2 della forma

$$\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & n \end{pmatrix}$$

si riduce propriamente ad una moltiplicazione dell'argomento giacchè, per la formola di omogeneità della $\wp u$

$$\wp\left(u \,|\, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right) = n^2 \wp(nu \,|\, \omega, \omega')$$

si esprime razionalmente per $\wp u$ colle formole di moltiplicazione dell'argomento. Ne risulta che se in una trasformazione $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ i quattro numeri a, b, c, d hanno un divisore comune r, avendosi

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r, & 0 \\ 0, & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{r}, & \frac{b}{r} \\ \frac{c}{r}, & \frac{d}{r} \end{pmatrix},$$

la trasformazione risulta dal comporre una moltiplicazione per r dell'argomento con una trasformazione. Una trasformazione $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ in cui i numeri a, b, c, d hanno un divisore comune dicesi per ciò *imprimitiva*, altrimenti *primitiva*. È chiaro che basterà limitarsi allo studio delle trasformazioni primitive, le formole di moltiplicazione dell'argomento essendo già note.

Possiamo già ora determinare quante trasformazioni *primitive* distinte esistono in un dato grado n, che sia la potenza esatta q^α di un numero primo q. Esse sono infatti tutte comprese nel simbolo

$$\begin{pmatrix} q^r, & 0 \\ \xi, & q^{\alpha-r} \end{pmatrix} \quad r = 0, 1, 2, \ldots \alpha,$$

dove ξ percorre un sistema completo di resti $\left(\text{mod } q^{\alpha-r}\right)$ esclusi, per valori di r diversi da 0 e da α, quelli divisibili per q. Indicando dunque

con N il numero cercato delle trasformazioni primitive distinte, avremo

$$N = q^{\alpha} + q^{\alpha-2}(q-1) + q^{\alpha-3}(q-1) + \ldots + (q-1) + 1$$

ossia

$$N = q^{\alpha-1}(q+1).$$

Dimostriamo ora il seguente teorema, che riduce sostanzialmente la ricerca delle trasformazioni a quelle il cui grado è un numero *primo: Ogni trasformazione, il cui grado n si decomponga nel prodotto di due numeri* P, Q, *è il risultato di due successive trasformazioni, l'una di grado* P *l'altra di grado* Q.

Consideriamo una trasformazione di grado $n = PQ$ già ridotta alla forma normale

$$\begin{pmatrix} \sigma, & 0 \\ \xi, & \frac{n}{\sigma} \end{pmatrix}$$

e cerchiamo di comporla con due trasformazioni normali

$$\begin{pmatrix} \tau, & 0 \\ \eta, & \frac{P}{\tau} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau', & 0 \\ \zeta, & \frac{Q}{\tau'} \end{pmatrix}$$

l'una di grado P, l'altra di grado Q; dovremo avere

$$\sigma = \tau\tau', \quad \xi = \eta\tau' + \frac{P}{\tau}\zeta, \quad \frac{n}{\sigma} = \frac{PQ}{\tau\tau'}.$$

Perchè, per qualunque ξ, si possano determinare η, ζ dall'equazione

$$\eta\tau' + \frac{P}{\tau}\zeta = \xi \tag{9}$$

basterà che $\tau' = \frac{\sigma}{\tau}$ e $\frac{P}{\tau}$ siano primi fra loro, cioè che τ sia il massimo comun divisore di σ, P ed avremo senz'altro

$$\begin{pmatrix} \sigma, & 0 \\ \xi, & \frac{n}{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau, & 0 \\ \eta, & \frac{P}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\tau}, & 0 \\ \zeta, & \frac{Q\tau}{\sigma} \end{pmatrix};$$

il nostro teorema è così già dimostrato.

Ma *supponiamo ora di più che* P, Q *siano primi fra loro.* Allora potremo soddisfare la (9) con un valore di η multiplo di $\frac{Q}{\tau'} = \frac{Q\tau}{\sigma}$. E infatti, posto

$$\eta = \frac{Q}{\tau'}\eta',$$

la (9) diventa

$$(9^*) \qquad Q\eta' + \frac{P}{\tau}\zeta = \xi,$$

che si può sempre soddisfare, essendo Q primo con $\frac{P}{\tau}$. Inoltre vediamo che dalla (9*) η', e quindi anche η, è perfettamente determinato rispetto al modulo $\frac{P}{\tau}$ dalla congruenza

$$Q\eta' \equiv \xi \left(\text{mod } \frac{P}{\tau}\right),$$

e similmente ζ è perfettamente determinato rispetto al modulo Q, e a più forte ragione rispetto a $\frac{Q}{\tau'}$, da

$$\frac{P}{\tau}\zeta \equiv \xi \ (\text{mod } Q).$$

Ne risulta che: *in questo modo di decomposizione*

$$\begin{pmatrix} \sigma, & 0 \\ \xi, & \frac{n}{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & , 0 \\ \frac{Q}{\tau'}\eta', & \frac{P}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau', & 0 \\ \zeta, & \frac{Q}{\tau'} \end{pmatrix}$$

la classe della trasformazione composta determina completamente quelle delle componenti.

Di più è facile vedere che la trasformazione composta sarà imprimitiva solo quando tale sia una delle componenti. Supponiamo infatti che un numero primo p divida simultaneamente

$$n = \tau . \tau', \quad \frac{n}{\sigma} = \frac{P}{\tau} . \frac{Q}{\tau'}, \quad \xi = Q\eta' + \frac{P}{\tau}\zeta;$$

uno solo dei due numeri τ, τ' sarà divisibile per p. Allora se p divide τ, sarà primo con $\frac{Q}{\tau'}$ e dividerà anche $\frac{P}{\tau}$ e però anche η', per cui la prima

trasformazione sarà impropria. Se invece p divide τ', si vedrà similmente che è impropria la seconda.

Di qui risulta che il numero delle trasformazioni primitive di grado $n = PQ$, con P, Q primi fra loro, è il prodotto dei numeri analoghi pei gradi P, Q. Dopo di ciò possiamo subito determinare il numero N delle trasformazioni primitive di un dato grado n. Decomponiamo infatti n nei suoi fattori primi distinti e sia

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r};$$

ricordando che vi sono

$$p^{\alpha-1}(p+1)$$

trasformazioni proprie distinte di grado p^{α}, avremo pel numero richiesto:

$$N = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \ldots p_r^{\alpha_r-1} (p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_r+1).$$

§. 165.

Trasformazioni di grado primo.

Ci proponiamo ora di stabilire le formole effettive per le trasformazioni il cui grado n è un numero primo, essendo queste, come si è visto, le trasformazioni elementari colle quali tutte le altre possono comporsi.

Per n primo vi sono soltanto $n+1$ trasformazioni distinte (§. 164), che potremo scrivere sotto forma normale

$$\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -\nu, & n \end{pmatrix},$$

dove ν percorre un sistema completo di resti (mod n), p. e. i numeri

$$0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Le formole (I), (I*), che legano i semi-periodi primitivi ω, ω' ai trasformati Ω, Ω', diventano:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= n\Omega, \quad \omega' = \Omega' \\ \Omega &= \frac{\omega}{n}, \quad \Omega' = \omega' \end{aligned}\right\} \text{ per } \begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \Omega, \quad \omega' = -\nu\Omega + n\Omega' \\ \Omega &= \omega, \quad \Omega' = \frac{\nu\omega + \omega'}{n} \end{aligned}\right\} \text{ per } \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -\nu, & n \end{pmatrix}.$$

Si osservi in particolare che le due trasformazioni

$$\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & n \end{pmatrix}$$

corrispondono rispettivamente alla divisione per n del primo o del secondo periodo.

Gli infiniti non equivalenti della funzione

$$\wp(u|\Omega, \Omega')$$

saranno nel primo caso nei punti

$$0, \frac{2\omega}{n}, 2 \cdot \frac{2\omega}{n}, \ldots (n-1)\frac{2\omega}{n}$$

e nel secondo nei punti

$$0, \frac{2\nu\omega+2\omega'}{n}, 2 \cdot \frac{2\nu\omega+2\omega'}{n}, \ldots (n-1)\frac{2\nu\omega+2\omega'}{n}.$$

Se, facendo uso di una notazione già introdotta per le formole di divisione dell'argomento (§. 114), poniamo

$$\tilde{\omega}_\infty = \frac{2\omega}{n}, \quad \tilde{\omega}_\nu = \frac{2\nu\omega+2\omega'}{n},$$

vediamo che nel primo caso gli infiniti della $\wp$ trasformata, che indicheremo con

$$\wp_\infty u,$$

sono nei punti

$$r\tilde{\omega}_\infty \quad (r = 0, 1, 2 \ldots n-1)$$

e nel secondo caso la $\wp$ trasformata, che indicheremo con $\wp_\nu u$, avrà gli infiniti nei punti

$$r\tilde{\omega}_\nu \quad (r = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Se di più osserviamo che questi infiniti sono tutti del 2.° ordine col termine d'infinito

$$\frac{1}{(u - r\tilde{\omega}_\nu)^2},$$

la formola generale (I) §. 105 (pag. 282) di decomposizione di una fun-

zione ellittica in elementi semplici ci darà immediatamente

$$(10) \qquad \wp_\nu u = C + \wp u + \sum_{r=1}^{r=n-1} \wp(u - r\tilde{\omega}_\nu),$$

dove C è una costante e ν prende gli $n+1$ valori

$$\infty\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 2 \ldots n-1.$$

Indichiamo con g_2, g_3 gli invarianti della primitiva $\wp u$ e con

$$G_2^{(\nu)}\,,\ G_3^{(\nu)}$$

quelli della trasformata $\wp_\nu u$; potremo determinare dalla (10) i valori di C e dei nuovi invarianti $G_2^{(\nu)}$, $G_3^{(\nu)}$ sviluppando i due membri in serie nell'intorno dell'origine e paragonando i coefficienti. Abbiamo così:

$$\frac{1}{u^2} + \frac{G_2^{(\nu)}}{20} u^2 + \frac{G_3^{(\nu)}}{28} u^4 + \ldots = C + \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots +$$
$$+ \sum_1^{n-1} \wp(r\tilde{\omega}_\nu) + \frac{u^2}{2} \sum_1^{n-1} \wp''(r\tilde{\omega}_\nu) + \frac{u^4}{24} \sum_1^{n-1} \wp^{\mathrm{IV}}(r\tilde{\omega}_\nu) + \ldots$$

e il paragone dei termini scritti ci dà

$$C = -\sum_r^{1\ldots n-1} \wp(r\tilde{\omega}_\nu)\,,\ G_2^{(\nu)} = g_2 + 10 \sum_r^{1\ldots n-1} \wp''(r\tilde{\omega}_\nu)\,,$$
$$G_3^{(\nu)} = g_3 + \frac{7}{6} \sum_r^{1\ldots n-1} \wp^{\mathrm{IV}}(r\tilde{\omega}_\nu),$$

per cui la (10) può scriversi

$$(\mathrm{II}) \qquad \wp_\nu u = \wp u + \sum_r^{1\ldots n-1} [\wp(u - r\tilde{\omega}_\nu) - \wp(r\tilde{\omega}_\nu)],$$

mentre per gli invarianti $G_2^{(\nu)}$, $G_3^{(\nu)}$ si hanno le formole

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} G_2^{(\nu)} = 60 \sum_r^{1\ldots n-1} \wp^2(r\tilde{\omega}_\nu) - (5n-6)\, g_2 \\ G_3^{(\nu)} = 140 \sum_r^{1\ldots n-1} \wp^3(r\tilde{\omega}_\nu) - 21\, g_2 \sum_r^{1\ldots n-1} \wp(r\tilde{\omega}_\nu) - (14n-15)\, g_3. \end{cases}$$

§. 166.

Distinzione del caso di $n=2$ e di n dispari.

Il secondo membro della formola di trasformazione (II) deve potersi cangiare in una funzione razionale di $\wp u$, ciò che ora vogliamo fare. Per ciò distinguiamo il caso di $n=2$ da quello in cui n è un numero primo dispari.

a) Trasformazioni di 2.° grado: Per $n=2$, ponendo in evidenza nella (II) i periodi 2Ω, $2\Omega'$ della $\wp$ trasformata, avremo le tre formole:

$$(11)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} & \wp_\infty u = \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \wp u + \wp(u-\omega) - \wp\omega = \wp u + \dfrac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp u - e_1} \\ \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix} & \wp_0 u = \wp\left(u \,\middle|\, \omega, \frac{\omega'}{2}\right) = \wp u + \wp(u-\omega') - \wp\omega' = \wp u + \dfrac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{\wp u - e_3} \\ \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 2 \end{pmatrix} & \wp_1 u = \wp\left(u \,\middle|\, \omega, \frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \wp u + \wp(u-\omega-\omega') - \wp(\omega+\omega') = \wp u + \dfrac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp u - e_2}, \end{cases}$$

in cui i secondi membri sono appunto razionali di 2.° grado in $\wp u$.

Ritornando sui risultati del Cap. XIII relativi all'andamento della $\wp(u;\, g_2, g_3)$ per valori reali degli invarianti, *possiamo utilizzare le trasformazioni del 2.° ordine per ridurre il calcolo delle funzioni $\wp u$ con discriminante negativo a quello delle $\wp u$ con discriminante positivo.* Per una funzione

$$\bar{\wp} u = \wp(u \mid \omega_1, \omega_3)$$

con invarianti reali e discriminante negativo possiamo infatti scegliere i periodi fondamentali $2\omega_1$, $2\omega_3$ in guisa che siano coniugati (§. 142, pag. 376). Se poniamo allora

$$\wp u = \wp(u \mid \omega, \omega'),$$

essendo

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 + \omega_3 \\ \omega' = -\omega_1 + \omega_3, \end{cases}$$

la $\wp u$ sarà ad invarianti reali e discriminante positivo e sarà legata alla $\bar{\wp u}$

dalla trasformazione di 2.° ordine $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, cioè dalla 3.ª delle (11):

$$\bar{\wp} u = \wp u + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp u - e_2},$$

formola che raggiunge lo scopo prefisso.

b) Trasformazioni d'ordine primo dispari.

Sia ora n un numero primo dispari.

In tal caso la (II) può scriversi:

$$\wp_\nu(u) = \wp u - \sum_r^{1\ldots(n-1)} \wp(r\tilde{\omega}_\nu) + \sum_s^{1\ldots\frac{n-1}{2}} \{\wp(u - s\tilde{\omega}_\nu) + \wp(u-(n-s)\tilde{\omega}_\nu)\}$$

$$\wp_\nu(u) = \wp u - \sum_r^{1\ldots(n-1)} \wp(r\tilde{\omega}_\nu) + \sum_s^{1\ldots\frac{n-1}{2}} \{\wp(u - s\tilde{\omega}_\nu) + \wp(u + s\tilde{\omega}_\nu)\},$$

ovvero per le formole d'addizione della $\wp u$:

$$\text{(IV)} \quad \wp_\nu u = \wp u - \sum_r^{1\ldots(n-1)} \wp(r\tilde{\omega}_\nu) + \sum_s^{1\ldots\frac{n-1}{2}} \frac{(2\wp u\,\wp(s\tilde{\omega}_\nu) - \frac{1}{2}g_2)(\wp u + \wp(s\tilde{\omega}_\nu)) - g_3}{[\wp u - \wp(s\tilde{\omega}_\nu)]^2}.$$

In questa formola di trasformazione il secondo membro è evidentemente una funzione razionale di $\wp u$ di grado n e precisamente di grado n al numeratore, di grado $n - 1$ al denominatore.

Rispetto ai coefficienti di questa funzione razionale si osservi che essi sono composti razionalmente con g_2, g_3 e con $\wp(\omega_\nu)$ poichè, per le formole di moltiplicazione, $\wp(r\omega_\nu)$ è razionale in $\wp\omega_\nu$, e siccome $\wp\omega_\nu$ è una radice dell'equazione per la divisione dei periodi, vediamo che i detti coefficienti sono funzioni algebriche di g_2, g_3. Essi saranno noti appena risoluta la risolvente di grado $n + 1$ dell'equazione per la divisione dei periodi (§. 115).

§. 167.

Risolubilità per radicali dell'equazione di trasformazione.

Data la $\wp u$, ciascuna delle $n + 1$ $\wp_\nu u$ trasformate si esprime razionalmente per $\wp u$ secondo la formola (IV). Ora vogliamo ricercare inver-

samente come data la $\wp_\nu u$, per un valore fisso di ν, si può determinare la $\wp u$. Abbiamo per ciò dalla (IV) un'equazione di grado n in $\wp u$, di cui è facile assegnare le radici. Data infatti $\wp_\nu u$, l'argomento u è determinato solo a meno del segno e di multipli dei periodi 2Ω, $2\Omega'$; cioè tutti i valori di u che danno il medesimo valore di $\wp_\nu u$ sono della forma

$$\pm u + k\tilde{\omega}_\nu + 2r\omega + 2s\omega' \begin{cases} k = 0, 1, 2, \ldots n-1 \\ r, s \text{ interi qualunque,} \end{cases}$$

onde le radici della (IV) sono

$$\wp u\,,\ \wp(u-\tilde{\omega}_\nu)\,,\ \wp(u-2\tilde{\omega}_\nu)\ldots\wp(u-(n-1)\tilde{\omega}_\nu).$$

Ora una qualunque di esse

$$y_r = \wp(u - r\tilde{\omega}_\nu)$$

è esprimibile razionalmente, colle formole d'addizione, per $\wp u$, $\wp' u$, e d'altronde, derivando la (IV), si ha

$$\wp'_\nu u = \wp' u\, \mathrm{F}(\wp u)\,,$$

essendo F razionale in $\wp u$. Dunque se, oltre $\wp_\nu u$, consideriamo come nota anche $\wp'_\nu u$, ogni radice y_r della (IV) è razionalmente esprimibile per la prima $y_0 = \wp u$. Siamo per ciò in presenza di un'equazione Abeliana di grado primo n e la risoluzione si effettua estraendo un radicale d'indice n. Quanto alle quantità che compariranno razionalmente sotto il radicale $\sqrt[n]{}$, saranno evidentemente

$$g_2\,,\ g_3\,,\ \wp\tilde{\omega}_\nu\,,\ \wp_\nu u\,,\ \wp'_\nu u.$$

È facile anche dare la effettiva formola di risoluzione; ma noi qui osserveremo soltanto ancora che la risoluzione delle equazioni di trasformazione include quella delle equazioni per la divisione dell'argomento. Per vederlo basta ricordare che la moltiplicazione per n dell'argomento si compone delle due successive trasformazioni $\begin{pmatrix} n, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, n \end{pmatrix}$. Così la teoria della trasformazione riduce effettivamente la risoluzione dell'equazione Abeliana composta di grado n^2, che si presenta nel problema della divisione per n dell'argomento, a quella di due successive equazioni Abeliane semplici di grado n.

§. 168.

Esistenza dell'equazione modulare fra gli invarianti assoluti.

Indichiamo con

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}\,, \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

l'invariante assoluto J della $\wp u$ primitiva e con

$$J' = \frac{G_2^3}{G_2^3 - 27\, G_3^2}$$

l'invariante assoluto di una qualunque delle $n+1$ $\bar{\wp} u$ trasformate, sicchè sarà

$$J' = J\left(\frac{\Omega'}{\Omega}\right),$$

e chiamando J'_ν l'invariante assoluto della $\wp_\nu u$ sarà dunque

$$J'_\infty = J(n\tau)\,,\ J'_0 = J\left(\frac{\tau}{n}\right),\ J'_1 = J\left(\frac{\tau+1}{n}\right) \ldots\ J'_{n-1} = J\left(\frac{\tau+(n-1)}{n}\right).$$

Ora sussiste l'importante teorema:

Fra l'invariante J *della* $\wp u$ *primitiva e l'invariante* J′ *di una qualunque* $\wp u$, *ottenuta per trasformazione d'ordine primo* n, *sussiste un'equazione algebrica*

$$\text{(V)} \qquad f(J, J') = 0$$

di grado $n+1$ *in* J′, *le cui* $n+1$ *radici in* J′ *sono date da*

$$J'_\infty = J(n\tau)\,,\ J'_0 = J\left(\frac{\tau}{n}\right),\ J'_1 = J\left(\frac{\tau+1}{n}\right) \ldots\ J'_{n-1} = J\left(\frac{\tau+(n-1)}{n}\right).$$

È questa l'equazione che prende il nome di *equazione modulare* (fra gli invarianti assoluti).

Per dimostrare il teorema, basta osservare che, secondo le formole (III) §. 165 che danno i valori degli invarianti G_2, G_3 trasformati, l'invariante J'_ν è una funzione razionale simmetrica di

$$\text{(12)} \qquad \wp\,\tilde{\omega}_\nu\,,\ \ \wp(2\,\tilde{\omega}_\nu) \ldots \wp\left(\frac{n-1}{2}\,\tilde{\omega}_\nu\right),$$

che sono radici di una medesima orizzontale dell'equazione per la divi-

sione dell'argomento nel quadro (C) del §. 114 (pag. 306). Questa funzione razionale simmetrica dei valori (12) ha quindi appunto $n+1$ valori distinti

$$J'_\infty\,,\ J'_0\,,\ J'_1 \ldots J'_{n-1}\,,$$

che sono dunque radici di una risolvente di grado $n+1$

$$F(J', g_2, g_3) = 0 \tag{13}$$

con coefficienti razionali in g_2, g_3. Ma se osserviamo che cangiando ω, ω' in $i\omega$, $i\omega'$ l'argomento τ e g_2 non cangiano, mentre g_3 cangia segno, si vede che nella (13) figurerà solo razionalmante g_3^2 e similmente poichè cangiando ω, ω' in $\varepsilon\omega$, $\varepsilon\omega'$ $\left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$ g_3 non muta e g_2 si cangia in $\varepsilon^2 g_2$, dovrà nella (13) g_2 comparire solo nelle potenze di g_2^3. Eliminando ora dalla (13) g_3^2 per mezzo della relazione

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}\,,$$

la (13) acquisterà la forma

$$\psi(J', J, g_2) = 0\,, \tag{14}$$

essendo ψ razionale nei tre argomenti.

Ma è facile vedere che in questa equazione g_2 non può figurare esplicitamente, che cioè coll'eliminazione di g_3 dalla (13) viene eliminato anche g_2. E infatti se cangiamo ω, ω' in $\lambda\omega$, $\lambda\omega'$, con λ qualunque, nella (14) J, J' restano inalterati, mentre g_2 si cangia in $\frac{g_2}{\lambda^4}$ e però g_2 deve necessariamente sparire.

Così è provata l'esistenza dell'equazione modulare (V).

Studieremo fra breve più da vicino ed in modo diretto le proprietà dell'equazione modulare (V). Ma fin d'ora osserviamo che, secondo i risultati del §. 116, siamo in grado di assegnare il suo gruppo di monodromia, che è definito dalle sostituzioni lineari

$$\nu' \equiv \frac{\alpha\nu + \beta}{\gamma\nu + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{n})$$

sugli indici degli $n+1$ rami J'_ν

$$J'_\infty\,,\ J'_0\,,\ J'_1 \ldots J'_{n-1}.$$

§. 169.

Formole di trasformazione per la σu.

Cerchiamo ora di esprimere anche le σu coi periodi trasformati

$$\sigma\left(u \,|\, \frac{\omega}{n}, \omega'\right), \quad \sigma\left(u \,|\, \omega, \frac{\nu\omega+\omega'}{n}\right)$$

per la σu primitiva. Se osserviamo che si ha

$$\sigma\left(u \,|\, \omega, \frac{\nu\omega+\omega'}{n}\right) = \sigma\left(u \,|\, -\frac{\nu\omega+\omega'}{n}, \omega\right)$$

$$\sigma\,(u \,|\, \omega, \omega') = \sigma\,(u \,|\, -(\nu\omega+\omega'), \omega),$$

vediamo che tutto si riduce a trovare la formola che esprime $\sigma\left(u \,|\, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ per σu, cioè la formola che dà per la σu l'effetto della divisione per n del primo periodo.

Ora la σ trasformata

$$\bar{\sigma} u = \sigma\left(u \,|\, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$$

può anche considerarsi, secondo il §. 101, come una funzione intera periodica di 3.ª categoria coi periodi 2ω, $2\omega'$ e si può quindi esprimere per la σu, appena se ne determinino nel primo parallelogrammo dei periodi gli infinitesimi. Questi sono nei punti

$$u_0 = 0, \quad \frac{2\omega}{n}, \quad 2 \,.\, \frac{2\omega}{n}, \quad \ldots (n-1) \,.\, \frac{2\omega}{n}$$

e si ha per ciò:

$$\bar{\sigma} u = e^{G(u)} \prod_{r=0}^{r=n-1} \sigma\left(u - r \,.\, \frac{2\omega}{n}\right), \tag{15}$$

dove $G(u)$ è un polinomio di 2.° grado in u.

Supponiamo dapprima n dispari e scriviamo la (15) così;

$$\bar{\sigma} u = e^{G_1(u)} \,.\, \sigma u \prod_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \sigma\left(s \,.\, \frac{2\omega}{n} - u\right) \sigma\left(s \,.\, \frac{2\omega}{n} + u\right),$$

dove $G_1(u)$ sarà nuovamente un polinomio di 2.° grado in u e poichè

$\bar{\sigma} u$, σu sono dispari, mentre il prodotto nel 2.° membro è pari, sarà

$$G_1(u) = \frac{1}{2} a u^2 + b \quad (a, b \text{ costanti}),$$

onde avremo

$$\bar{\sigma} u = C e^{\frac{1}{2} a u^2} \sigma u \prod_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \sigma\left(s \cdot \frac{2\omega}{n} - u\right) \sigma\left(s \cdot \frac{2\omega}{n} + u\right).$$

Per determinare la costante C, basta dividere dall'una e dall'altra parte per u e passare al limite per $u = 0$; si ottiene così:

$$\text{(VI)} \qquad \bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} a u^2} \sigma u \prod_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \frac{\sigma\left(s \cdot \frac{2\omega}{n} - u\right) \sigma\left(s \cdot \frac{2\omega}{n} + u\right)}{\sigma^2\left(s \cdot \frac{2\omega}{n}\right)}.$$

In fine, per determinare la costante a, si indichino con $\bar{\eta}$, $\bar{\eta}'$ i semiperiodi di 2.ª specie della σu coi periodi di 1.ª specie $2\bar{\omega} = \frac{2\omega}{n}$, $2\bar{\omega}' = 2\omega'$, talchè sarà

$$\bar{\eta}\bar{\omega}' - \bar{\eta}'\bar{\omega} = \frac{\pi i}{2},$$

cioè

$$\text{(16)} \qquad n\bar{\eta}\omega' - \bar{\eta}'\omega = n\frac{\pi i}{2}.$$

Cangiando allora nella (VI) successivamente u in $u + 2\omega = u + 2n\bar{\omega}$ ed in $u + 2\omega' = u + 2\bar{\omega}'$, si ricava subito

$$\text{(17)} \qquad a = \frac{n(\bar{\eta} - \eta)}{\omega} = \frac{\bar{\eta}' - n\eta'}{\omega'}$$

e la coincidenza di questi due valori per a risulta subito dalla (16).

Alla (VI) si può dare un differente aspetto, ricordando la formola

$$\frac{\sigma\left(s \cdot \frac{2\omega}{n} - u\right) \sigma\left(s \cdot \frac{2\omega}{n} + u\right)}{\sigma^2\left(s \cdot \frac{2\omega}{n}\right) \sigma^2 u} = \wp u - \wp\left(s \cdot \frac{2\omega}{n}\right),$$

e scrivendola quindi

$$\text{(VI*)} \qquad \bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} a u^2} \sigma^n u \prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \left\{ \wp u - \wp \left(s \, . \, \frac{2\omega}{n} \right) \right\} .$$

Dalle (VI), (VI*) si potrebbero ora dedurre le formole di trasformazione per le σ pari

$$\sigma_1 u \ , \quad \sigma_2 u \ , \quad \sigma_3 u$$

e combinando per divisione le formole così ottenute, si avrebbero le formole di trasformazione per

$$\operatorname{sn} v \ , \quad \operatorname{cn} v \ , \quad \operatorname{dn} v \, ,$$

come furono poste da Jacobi nei: *Fundamenta nova.*

§. 170.

Trasformazione di Landen.

Ci limiteremo a dedurre le formole di trasformazione di 2.° ordine per $\operatorname{sn} v$, a stabilire cioè per questa funzione ellittica la formola di duplicazione del rapporto τ dei periodi. Interpretata per l'integrale ellittico di 1.ª specie, questa conduce alla celebre trasformazione scoperta dal matematico inglese *Landen* (1775-1780), scoperta che ha preceduto la costruzione della teoria degli integrali ellittici di Legendre ed è stata la sorgente dell'intera teoria della trasformazione.

Ritorniamo alla formola (15) di trasformazione per la σu e supponiamo ora $n = 2$. Avremo

$$\bar{\sigma} u = \sigma \left(u \,|\, \frac{\omega}{2} \, , \, \omega' \right) = e^{G(u)} \sigma u \ \sigma (u - \omega) \, ,$$

che, per la formola

$$\sigma_1 u = e^{\eta u} \ \frac{\sigma (\omega - u)}{\sigma \omega} \, ,$$

possiamo scrivere:

$$\bar{\sigma} u = e^{G_1(u)} \sigma u \, . \, \sigma_1 u \, .$$

Il polinomio di 2.° grado $G_1(u)$ deve essere pari e si ha quindi

$$\bar{\sigma} u = C \, e^{\frac{1}{2} a u^2} \ \sigma u \ \sigma_1 u \, ,$$

con C, a costanti. Si trova subito

$$C = 1 \ , \quad a = \frac{\bar{\eta} - \eta}{\omega} \ ,$$

onde

$$\text{(VII)} \qquad \sigma\left(u \,|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = e^{\frac{\bar{\eta}-\eta}{\omega} u^2} \sigma u \, \sigma_1 u .$$

Mutando in questa u in $u+\omega'$, si trova la formola di trasformazione per $\sigma_3 u$:

$$\text{(VII*)} \qquad \sigma_3\left(u \,|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = e^{\frac{\bar{\eta}-\eta}{\omega} u^2} \sigma_2 u \, \sigma_3 u$$

ed analogamente si dedurrebbero le formole per $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$.

Indichiamo con $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ i valori di e_1, e_2, e_3 rispondenti ai nuovi periodi

$$2\bar{\omega} = \omega \ , \quad 2\bar{\omega}' = 2\omega'$$

e dividendo la (VII) per la (VII*) col ricordare le formole (C) §. 133 avremo

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_3}} \operatorname{sn}(v_1, 2\tau) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\operatorname{sn}(v, \tau) \operatorname{cn}(v, \tau)}{\operatorname{dn}(v, \tau)}$$

con

$$v_1 = \sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_3} \, . \, u \ , \quad v = \sqrt{e_1 - e_3} \, u .$$

Se poniamo

$$M = \frac{\sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}} \ ,$$

potremo scrivere la formola così;

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{sn}(Mv, 2\tau) = M \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v} .$$

Indicando con $4\bar{K}$, $2i\bar{K}'$ i periodi di $\operatorname{sn}(v, 2\tau)$ corrispondenti a $4K$, $2iK'$ per $\operatorname{sn}(v, \tau)$, abbiamo

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} \bar{K} = \bar{\omega}\sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_3} = M \dfrac{K}{2} \\ i\bar{K}' = \bar{\omega}'\sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_3} = M i K' \end{cases}$$

e potremo determinare il *moltiplicatore* M della (18) e il modulo $\bar{k}=k(2\tau)$ colle considerazioni seguenti. Pongasi nella (18) $v=\frac{K}{2}$ e poichè $\mathrm{sn}(\bar{K}, 2\tau)=1$, avremo

$$M=\frac{\mathrm{dn}\,\frac{K}{2}}{\mathrm{sn}\,\frac{K}{2}\,\mathrm{cn}\,\frac{K}{2}},$$

Ma dalle formole

$$\mathrm{sn}\,(v+K)=\frac{\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}\,,\quad \mathrm{dn}\,(v+K)=\frac{k'}{\mathrm{dn}\,v}\,,$$

ponendo $v=-\frac{K}{2}$, deduciamo

$$\mathrm{sn}\,\frac{K}{2}=\frac{\mathrm{cn}\,\frac{K}{2}}{\mathrm{dn}\,\frac{K}{2}}\,,\quad \mathrm{dn}^2\,\frac{K}{2}=k',$$

onde

$$M=\frac{\mathrm{dn}^2\,\frac{K}{2}}{\mathrm{cn}^2\,\frac{K}{2}}=1+k'.$$

Ora moltiplichiamo i due membri della (18) per

$$v-i\,K'=\frac{1}{M}\,(Mv-i\,\bar{K}')$$

e, ricordando che i residui di $\mathrm{sn}\,v$, $\mathrm{cn}\,v$, $\mathrm{dn}\,v$ in $v=iK'$ sono rispettivamente $\frac{1}{k}$, $\frac{-i}{k}$, $-i$, troveremo

$$\bar{k}=\frac{1-k'}{1+k'}\ ^{(1)}.$$

---

(1) Rispetto alla funzione modulare $k(\tau)$, possiamo scrivere la formola

$$k(2\tau)=\frac{1-\sqrt{1-k^2(\tau)}}{1+\sqrt{1-k^2(\tau)}},$$

formola che dà l'effetto della duplicazione dell'argomento.

Ed ora, ponendo in evidenza nella (18) i moduli anzichè i periodi, avremo la formola di trasformazione

$$\text{(VIII)} \qquad \operatorname{sn}\left[(1+k')\,v\,,\ \frac{1-k'}{1+k'}\right] = (1+k')\,\frac{\operatorname{sn}(v,k)\operatorname{cn}(v,k)}{\operatorname{dn}(v,k)}\,,$$

che è la formola della trasformazione di Landen.

§. 171.

Applicazione della trasformazione di Landen.

La trasformazione di Landen si può utilmente applicare al calcolo numerico degli integrali ellittici di 1.ª specie. Poniamo per ciò

$$y = \operatorname{sn}[(1+k')\,v\,,\bar{k}]\ ,\quad x = \operatorname{sn}(v,k)\ ,\quad \bar{k} = \frac{1-k'}{1+k'}$$

ed avremo

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-\bar{k}^2\,y^2)}} = (1+k')\,dv\ ,\quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2\,x^2)}} = dv.$$

Supponiamo il caso ordinario delle applicazioni in cui k, quindi anche $\bar{k}$, è reale positivo e minor d'uno ed, osservando che y si annulla con x, avremo

$$\text{(20)} \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2\,x^2)}} = \frac{1}{1+k'}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-\bar{k}^2\,y^2)}}$$

e la (VIII) diverrà

$$\text{(21)} \qquad y = (1+k')\,\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}\,.$$

Con questa trasformazione irrazionale si cangia dunque un integrale ellittico di 1.ª specie di modulo k in un altro di modulo

$$\text{(22)} \qquad \bar{k} = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{k^2}{(1+k')^2}$$

e si avranno ancora le formole

$$(22^*) \qquad k = \frac{2\sqrt{\bar{k}}}{1+\bar{k}}\,, \quad 1+k' = \frac{2}{1+\bar{k}}\,,$$

onde la (20) potrà scriversi

$$(20^*) \qquad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-\bar{k}^2 y^2)}} = \frac{2}{1+\bar{k}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2 x^2)}}$$

Essendo $0 < k < 1$, il modulo trasformato

$$\bar{k} = \frac{k^2}{(1+k')^2}$$

sarà $< k^2$ e quindi più vicino a zero. Ripetendo n volte la trasformazione (20), si arriverà ad un modulo $< k^{2^n}$, vicino quindi a zero quanto ci piace.

Colla trasformazione inversa (20*) passiamo dal modulo $\bar{k}$ al modulo

$$k = \frac{2}{1+\bar{k}}\sqrt{\bar{k}} > \sqrt{\bar{k}}$$

e, ripetendola n volte, ad un modulo così vicino ad uno quanto ci piace. Nelle applicazioni numeriche converrà fare uso della scala discendente o ascendente dei moduli, secondo che k è più prossimo a 0 ovvero ad 1, e nel primo caso si ridurrà il calcolo dell'integrale a quello di un arco circolare, nel secondo al calcolo di logaritmi o funzioni iperboliche.

§. 172.

La trasformazione di Landen nelle amplitudini.

Rendiamo le formole precedenti atte al calcolo logaritmico, introducendo le amplitudini degli integrali ellittici col porre

$$y = \operatorname{sen}\psi\,, \quad x = \operatorname{sen}\varphi$$

e la (21) diventerà:

$$\operatorname{sen}\psi = (1+k')\,\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,,$$

da cui si ottiene subito

$$\cos\psi = \frac{\cos^2\varphi - k' \operatorname{sen}^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \text{ (1)},$$

e quindi

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{(1+k')\operatorname{tang}\varphi}{1-k'\operatorname{tang}^2\varphi}.$$

Derivando otteniamo

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = (1+k')\,\frac{1+k'\operatorname{tang}^2\varphi}{(1-k'\operatorname{tang}^2\varphi)^2}\,\frac{\cos^2\psi}{\cos^2\varphi},$$

il che dimostra che ψ è sempre crescente per φ crescente e inoltre ai valori

$$0\,,\ \frac{\pi}{2}\,,\ \pi\,,\ 3\,\frac{\pi}{2}\,,\ \ldots\ldots \text{ per } \varphi$$

corrispondono i valori duplicati

$$0\,,\ \pi\,,\ 2\pi\,,\ 3\pi\ \ldots\ldots \text{ per } \psi.$$

Ora la (23), ridotta a forma intera, ci dà l'altra

$$\text{(24)} \qquad \operatorname{tang}(\psi-\varphi) = k'\operatorname{tang}\varphi\,,$$

che si presta al calcolo logaritmico di ψ, dato che sia φ. Scrivendo poi questa formola così

$$(1+\bar{k})\operatorname{tang}(\psi-\varphi) = (1-\bar{k})\operatorname{tang}\varphi\,,$$

ovvero

$$\operatorname{sen}(\psi-\varphi)\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos(\psi-\varphi) = -\bar{k}\,\{\operatorname{sen}\varphi\cos(\psi-\varphi)+\cos\varphi\operatorname{sen}(\psi-\varphi)\},$$

ne deduciamo

$$\text{(24*)} \qquad \operatorname{sen}(2\varphi-\psi) = \bar{k}\operatorname{sen}\psi\,,$$

formola che si presta al calcolo di φ dato ψ. Le (20), (20*) diventano

(1) La determimazione del segno risulta da ciò, che per $\varphi = 0$ è $\psi = 0$.

allora

$$(25)\qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{1}{1+k'} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\bar{k}^2 \operatorname{sen}^2 \psi}}$$

$$(25^*)\qquad \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\bar{k}^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} = \frac{2}{1+\bar{k}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

e si farà uso della prima o della seconda, secondo che si vorrà passare da k a $\bar{k}$, o viceversa.

Supponiamo ora di ripetere n volte la trasformazione (25) e indichiamo con

$$\psi\ ,\ \psi_1\ ,\ \psi_2\ ,\ \ldots\ \psi_{n-1}$$

le successive amplitudini e con

$$\bar{k}\ ,\ \bar{k}_1\ ,\ \bar{k}_2\ ,\ \ldots\ \bar{k}_{n-1}$$

i successivi moduli trasformati; avremo:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{1+\bar{k}}{2} \cdot \frac{1+\bar{k}_1}{2} \cdots \frac{1+\bar{k}_{n-1}}{2} \int_0^{\psi_{n-1}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\bar{k}_{n-1}^2 \operatorname{sen}^2 \psi}}\ ,$$

ove le ψ_i si calcoleranno successivamente dalle formole

$$\operatorname{tang}(\psi_i - \psi_{i-1}) = \bar{k}'_{i-1} \operatorname{tang} \psi_{i-1}\ ,$$

essendo $\bar{k}'_{i-1}$ il modulo complementare di $\bar{k}_{i-1}$. Ora si osservi che il prodotto infinito

$$(1+\bar{k})\ (1+\bar{k}_1)\ (1+\bar{k}_2) \ldots (1+\bar{k}_n) \ldots$$

è certamente convergente perchè $\bar{k}_n < \bar{k}_{n-1}^2$ e quindi esisterà pure un limite determinato per $n=\infty$ dell'integrale

$$\frac{1}{2^n} \int_0^{\psi_{n-1}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\bar{k}_{n-1}^2 \operatorname{sen}^2 \psi}}\ ,$$

e poichè

$$\frac{\psi_{n-1}}{2^n} < \frac{1}{2^n} \int_0^{\psi_{n-1}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\bar{k}_{n-1}^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} < \frac{\psi_{n-1}}{2^n}\ \frac{1}{\bar{k}'_{n-1}}\ ,$$

si vede che $\frac{\psi_{n-1}}{2^n}$ ha lo stesso limite.

Ora se, fra i limiti d'approssimazione voluta, è

$$(1+\bar{k})\ (1+\bar{k}_1)\ \ldots\ (1+\bar{k}_{n-1})\ \frac{\psi_{n-1}}{2^n}\left(1-\frac{1}{\bar{k}'_{n-1}}\right)=0$$

si avrà pure, entro i medesimi limiti d'approssimazione:

$$(26)\qquad \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}=(1+\bar{k})\ (1+\bar{k}_1)\ \ldots\ (1+\bar{k}_{n-1})\ \frac{\psi_{n-1}}{2^n}\,,$$

formola molto adatta al calcolo numerico, a causa della rapida convergenza del prodotto infinito. Se facciamo nella (26) $\varphi=\frac{\pi}{2}$, avremo anche

$$\frac{\psi}{2}=\frac{\psi_1}{2^2}=\frac{\psi_2}{2^3}=\ldots=\frac{\psi_{n-1}}{2^n}=\frac{\pi}{2}$$

e ne otterremo quindi il notevole sviluppo in prodotto infinito

$$(26^*)\qquad \frac{2\,\mathrm{K}}{\pi}=(1+\bar{k})\ (1+\bar{k}_1)\ (1+\bar{k}_2)\ \ldots\ (1+\bar{k}_n)\ \ldots\,,$$

onde la (26) si scriverà

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}=\frac{2\,\mathrm{K}}{\pi}\lim_{n=\infty}\frac{\psi_{n-1}}{2^n}\,.$$

I successivi moduli trasformati $\bar{k}$, $\bar{k}_1\ldots$ si calcoleranno facilmente, coll'uso delle ordinarie tavole trigonometriche, ponendo

$$k=\mathrm{sen}\,\theta\,,\ \bar{k}=\mathrm{sen}\,\theta_1\,,\ \bar{k}_1=\mathrm{sen}\,\theta_2\,,\ \ldots\ \bar{k}_{n-1}=\mathrm{sen}\,\theta_n,$$

per cui avremo

$$\bar{k}=\frac{1-k'}{1+k'}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\,,\ \bar{k}_1=\frac{1-\cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}\ldots,$$

cioè

$$\mathrm{sen}\,\theta_1=\mathrm{tang}^2\frac{\theta}{2}\,,\ \ \mathrm{sen}\,\theta_2=\mathrm{tang}^2\frac{\theta_1}{2}\,,\ \ \mathrm{sen}\,\theta_3=\mathrm{tang}^2\frac{\theta_2}{2}\ldots.$$

Formole analoghe potrebbero stabilirsi per l'applicazione ripetuta della trasformazione inversa.

§. 173.

Media aritmetico-geometrica $M(a, b)$ secondo Lagrange e Gauss.

La scala dei moduli nell'applicazione ripetuta della trasformazione di Landen sta in una semplice relazione colla teoria della *media aritmetico-geometrica*, della quale si occuparono Lagrange e Gauss. Daremo ancora un cenno di questo argomento storicamente molto importante, che ha segnato la via per la quale Gauss, prevenendo le ricerche di Abel e Jacobi, aveva già costruito la teoria delle funzioni ellittiche senza dare pubblicità alcuna ai risultati conseguiti [1].

Siano a, b due numeri reali positivi e supponiamo p. e.

$$a > b.$$

Costruiamo le due medie, aritmetica e geometrica di a, b:

$$\bar{a} = \frac{a+b}{2}, \quad \bar{b} = \sqrt{ab} \text{ [2]}$$

e da $\bar{a}$, $\bar{b}$ deduciamo nello stesso modo

$$\bar{a}_1 = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}, \quad \bar{b}_1 = \sqrt{\bar{a}\,\bar{b}},$$

e così continuiamo costruendo

$$\bar{a}_2 = \frac{\bar{a}_1+\bar{b}_1}{2}, \quad \bar{b}_2 = \sqrt{\bar{a}_1\,\bar{b}_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{a}_n = \frac{\bar{a}_{n-1}+\bar{b}_{n-1}}{2}, \quad \bar{b}_n = \sqrt{\bar{a}_{n-1}\,\bar{b}_{n-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Le due serie di numeri positivi

$$(27) \qquad \begin{cases} a, \bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2 \ldots\ldots \bar{a}_n \ldots\ldots \\ b, \bar{b}, \bar{b}_1, \bar{b}_2 \ldots\ldots \bar{b}_n \ldots\ldots \end{cases}$$

---

[1] Gauss. *Werke* Bd. III. Nachlass.

[2] Per questo radicale e tutti i seguenti s'intendono scelti i valori positivi.

sono decrescente la prima, crescente la seconda, e convergono ambedue verso il medesimo limite, che si dice la media aritmetico-geometrica dei due numeri a, b e si indica con Gauss col simbolo

$$\mathrm{M}\,(a, b).$$

Per dimostrare quanto sopra è asserito basta osservare che, ponendo

$$k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\,, \quad \text{indi} \quad k' = \frac{b}{a}\,,$$

e ritenendo le notazioni del §. precedente, si ha

$$\begin{cases} \bar{a} = a\,\dfrac{1+k'}{2} = \dfrac{a}{1+\bar{k}} \\[2ex] \bar{b} = \sqrt{a\,b} \;= a\sqrt{k'} \end{cases}$$

e in generale

$$\bar{a}_n = \frac{\bar{a}_{n-1}}{1+\bar{k}_n} = \frac{a}{(1+\bar{k})\,(1+\bar{k}_1)\ldots(1+\bar{k}_n)}$$

$$\bar{b}_n = \bar{a}_{n-1}\sqrt{\bar{k}'_{n-1}}\,.$$

Per la formola (26*) si ha quindi subito

$$\lim_{n=\infty} \bar{a}_n = \frac{\pi a}{2\,\mathrm{K}}$$

e d'altronde

$$\lim_{n=\infty} \frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_{n-1}} = \lim \sqrt{\bar{k}'_{n-1}} = 1\,,$$

quindi

$$\mathrm{M}\,(a, b) = \lim_{n=\infty} \bar{a}_n = \lim_{n=\infty} \bar{b}_n = \frac{\pi a}{2\,\mathrm{K}}\,.$$

Così sono dimostrate le nostre asserzioni ed è inoltre ritrovata la formola

$$\text{(IX)} \qquad \frac{1}{\mathrm{M}\,(a, b)} = \frac{2\,\mathrm{K}}{\pi a} = \frac{2}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}\,,$$

che esprime l'inversa della media aritmetico geometrica per un integrale

completo ellittico di 1.ª specie a modulo

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} .$$

La proprietà delle due serie (27) di convergere verso un limite comune M (a, b) si può del resto dimostrare colle seguenti considerazioni elementari [1]. Essendo

$$(\bar{a} - \bar{b})\ (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a}^2 - \bar{b}^2 = \frac{1}{4}\ (a - b)^2$$

si vede che $\bar{b} < \bar{a}$ e così

$$\bar{b} < \bar{a}\ ,\ \bar{b}_1 < \bar{a}_1\ ,\ \bar{b}_2 < \bar{a}_2 \ldots \bar{b}_n < \bar{a}_n \ldots ,$$

cioè ogni termine della serie inferiore è minore del corrispondente della superiore.

Si ha poi evidentemente

$$\bar{a} < a\ ,\ \bar{a}_1 < \bar{a}\ ,\ \bar{a}_2 < \bar{a}_1 \ldots$$

$$\bar{b} > b\ ,\ \bar{b}_1 > \bar{b}\ ,\ \bar{b}_2 > \bar{b}_1 \ldots$$

e però la prima serie è continuamente decrescente, la seconda crescente; di più si ha

$$\frac{\bar{a} - \bar{b}}{a - b} = \frac{a - b}{4\ (\bar{a} + \bar{b})} = \frac{a - b}{2\ (a + b) + 4\ \bar{b}} < \frac{1}{2}\ ,$$

indi

$$\bar{a} - \bar{b} < \frac{1}{2}\ (a - b)$$

$$\bar{a}_1 - \bar{b}_1 < \frac{1}{2}\ (\bar{a} - \bar{b}) < \frac{1}{4}\ (a - b)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{a}_n - \bar{b}_n < \frac{1}{2^{n+1}}\ (a - b)\ ,$$

dopo di che risulta evidente l'esistenza di un limite comune M (a, b) per le due serie.

---

[1] GAUSS. *l. c.*

Se nella formola (IX) cangiamo b in $c=\sqrt{a^2-b^2}$, manifestamente k si cangia in k' e perciò K in K', onde abbiamo:

$$\text{(IX*)} \qquad \frac{1}{\mathrm{M}(a,c)} = \frac{2\,\mathrm{K}'}{\pi a} = \frac{2}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}\,.$$

La quantità $q=e^{\pi i \tau}=e^{\frac{-\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}$ di Jacobi si può quindi anche scrivere

$$q = e^{-\pi\frac{\mathrm{M}(a,b)}{\mathrm{M}(a,c)}}$$

e, se introduciamo coi simboli di Gauss le tre quantità

$$\mathrm{P}=\sqrt{\frac{a}{\mathrm{M}(a,b)}}\,,\quad \mathrm{Q}=\sqrt{\frac{b}{\mathrm{M}(a,b)}}\,,\quad \mathrm{R}=\sqrt{\frac{c}{\mathrm{M}(a,b)}}\,,$$

avremo evidentemente

$$\mathrm{P}=\sqrt{\frac{2\,\mathrm{K}}{\pi}}\,,\quad \mathrm{Q}=\sqrt{\frac{2\,\mathrm{K}k'}{\pi}}\,,\quad \mathrm{R}=\sqrt{\frac{2\,\mathrm{K}k}{\pi}}\,,$$

e varranno gli sviluppi in serie di potenze di q, già dati da Gauss:

$$\mathrm{P}=1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\,,\quad \mathrm{Q}=1+2\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\,,\quad \mathrm{R}=2\sum_1^\infty q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}$$

che per noi risultano già dalle formole dimostrate al §. 158.

Capitolo XVI.

Funzioni modulari ellittiche.

§. 174.

Definizione delle funzioni modulari. — Loro sottogruppo.

Strettamente connessa colla teoria delle funzioni ellittiche è la teoria delle funzioni modulari (ellittiche), la quale a sua volta non è che un capitolo della grande teoria delle funzioni automorfe. Già in vari punti di questo corso (cf. particolarmente i Cap. XI, XII, XV) abbiamo toccato delle proprietà di due funzioni fondamentali nella classe delle funzioni

modulari e cioè dell'invariante assoluto $J(\tau)$ e del quadrato del modulo di Legendre $k^2(\tau)$. Ora ci proponiamo di dare alcune poche nozioni sulla teoria generale delle funzioni modulari, rimandando per uno studio effettivo dell'interessante argomento all'opera di Klein-Fricke: *Theorie der elliptischen Modulfunctionen.*

Definiamo le funzioni modulari (algebriche) nel modo seguente: *Ogni funzione algebrica di* $J(\tau)$ *che, considerata come funzione di* τ, *sia uniforme dicesi una funzione modulare (algebrica).*

Oltre le funzioni modulari *algebriche*, si considerano anche delle funzioni modulari *trascendenti;* ma noi qui parleremo soltanto delle prime e le diremo senz'altro *funzioni modulari.*

Sia $\varphi = \varphi(\tau)$ una funzione modulare e sia

$$f(\varphi, J) = 0\,, \tag{1}$$

dove f indica una funzione razionale intera nei due argomenti, l'equazione algebrica *irriducibile* che la lega all'invariante assoluto $J(\tau)$. Osserviamo in primo luogo che essendo, per un assegnato valore di τ, $\varphi(\tau)$ una radice della (1) tutte le altre radici saranno date dall'espressioni

$$\varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right), \tag{2}$$

dove $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ è una qualunque sostituzione del gruppo modulare. Che tutte le espressioni (2) siano radici della (1) si vede subito osservando che se nel semipiano positivo tracciamo una linea continua, che vada da τ al punto equivalente $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$, l'invariante assoluto $J(\tau)$ descrive un cammino chiuso e $\varphi(\tau)$ si cangia con continuità in $\varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)$. D'altronde *tutte* le radici della (1) sono date da espressioni (2) poichè, la (1) essendo per ipotesi irriducibile, se facciamo descrivere a J un conveniente cammino chiuso, passiamo da una radice $\varphi(\tau)$ ad un'altra qualunque; ora, come si è visto al §. 121, possiamo far descrivere a $J(\tau)$ un cammino chiuso qualunque facendo muovere τ da τ ad un punto equivalente $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ per un conveniente cammino.

Supponiamo ora che la (1) sia di grado m rispetto alla φ e siano

$$\varphi_1\,,\ \varphi_2 \ldots \varphi_m$$

le sue radici. Ogni valore (2) dovrà eguagliare uno di questi m, e siccome se le due sostituzioni

$$U = \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} , \quad U' = \begin{pmatrix} \alpha' , \beta' \\ \gamma' , \delta' \end{pmatrix} ,$$

eseguite sull'argomento τ di $\varphi(\tau)$, danno eguali risultati

$$\varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \varphi\left(\frac{\alpha'\tau+\beta'}{\gamma'\tau+\delta'}\right) ,$$

la sostituzione $U U'^{-1}$ lascia $\varphi(\tau)$, invariata si conclude: *Esistono nel gruppo modulare* Γ *infinite sostituzioni*

$$g_1 = 1 \ , \ g_2 \ , \ g_3 \ldots$$

che lasciano $\varphi(\tau)$ *invariata; esse formano evidentemente in* Γ *un sottogruppo* G. Diremo per ciò che la funzione modulare $\varphi(\tau)$ appartiene al sottogruppo G, od anche che G è il sottogruppo riproduttivo di $\varphi(\tau)$.

Di più se

$$t_1 = 1 \ , \ t_2 \ , \ t_3 \ldots t_m$$

sono m particolari sostituzioni di Γ che cangiano $\varphi(\tau)$ in

$$\varphi_1 = \varphi(\tau) \ , \quad \varphi_2 = \varphi\left(\frac{\alpha_2\tau+\beta_2}{\gamma_2\tau+\delta_2}\right) \ldots \varphi_m = \varphi\left(\frac{\alpha_m\tau+\beta_m}{\gamma_m\tau+\delta_m}\right) ,$$

vediamo subito che qualunque sostituzione γ di Γ si potrà porre sotto la forma

$$\gamma = t_r \, g_i \begin{pmatrix} r = 1 , 2 , \ldots m \\ i = 1, 2, 3 \ldots \infty \end{pmatrix} ,$$

onde concludiamo: *Il sottogruppo* G *di* Γ *che lascia invariata la funzione modulare* $\varphi(\tau)$ *ha indice finito in* Γ *e precisamente eguale al grado* m *a cui* φ *comparisce nell'equazione* (1), *che la lega all'invariante assoluto.*

Dobbiamo subito osservare che mentre per l'eguaglianza

$$J(\tau) = J(\tau')$$

è *necessario* e *sufficiente* che τ, τ' siano equivalenti rispetto a Γ, per la eguaglianza

$$\varphi(\tau) = \varphi(\tau')$$

è bensì sufficiente, *ma non in generale necessario* che τ, τ' siano equivalenti rispetto al sottogruppo G, cui φ appartiene.

E invero, se la (1) è di grado n in J, per ogni valore assegnato di $\varphi(\tau)$ si hanno n valori distinti di $J(\tau)$ e se

$$\tau_1 \ , \ \tau_2 \ldots \tau_n$$

sono n corrispondenti valori di τ, fra questi non ve ne saranno due equivalenti rispetto a Γ e tanto meno rispetto a G. Questo numero n, che indica quante volte la funzione modulare $\varphi(\tau)$ riprende il medesimo valore in punti *non* equivalenti rispetto al sottogruppo riproduttivo G, si dirà la *valenza* di $\varphi(\tau)$. Se $n=1$, allora $J(\tau)$ è funzione razionale di $\varphi(\tau)$ e questa è monovalente; tale è per esempio la funzione modulare $k^2(\tau)$.

Osserviamo ora che tutte le radici

$$\varphi_1 \ , \ \varphi_2 \ldots \varphi_m$$

della (1) sono, come è chiaro, altrettante funzioni modulari e se il sottogruppo riproduttivo della prima è G, quelli di $\varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_m$ saranno i rispettivi sottogruppi trasformati

$$G_2 = t_2 \, G \, t_2^{-1} \ , \ G_3 = t_3 \, G \, t_3^{-1} \ldots G_m = t_m \, G \, t_m^{-1} \ ^{(1)}.$$

In particolare si osservi che: *Se il sottogruppo riproduttivo* G *della funzione modulare* $\varphi_1 = \varphi(\tau)$ *è invariante in* Γ, *le altre funzioni modulari* $\varphi_2(\tau), \ldots \varphi_m(\tau)$, *radici della* (1), *apparterranno al medesimo sottogruppo* G.

Dai teoremi generali sulle funzioni algebriche segue allora che ogni radice φ_r della (1) è razionalmente esprimibile per φ_1 e J, giacchè ad ogni coppia di valori φ_1, J corrisponde *un solo* valore di φ_r.

§. 175.

Diramazione di una funzione modulare $\varphi(\tau)$ rispetto all'invariante assoluto $J(\tau)$.

Fino ad ora abbiamo senz'altro supposto che l'equazione algebrica (1) sia tale che φ, considerata come funzione di τ, risulti *monodroma*. Vo-

---

(1) Pongasi invero

$$\varphi_r(\tau) = \varphi(\tau_r) \ , \ \tau_r = \frac{\alpha_r \tau + \beta_r}{\gamma_r \tau + \delta_r}$$

e sia

$$\varphi(\tau_r) = \varphi_r(\tau) = \varphi_r(\tau') = \varphi(\tau'_r) \ , \ \tau'_r = \frac{\alpha_r \tau' + \beta_r}{\gamma_r \tau' + \delta_r} \ ,$$

sarà τ'_r legata a τ_r da una sostituzione g di G e però τ a τ' appunto da $t_r \, g \, t_r^{-1}$.

gliamo ora ricercare quali sono le condizioni necessarie e sufficienti cui deve soddisfare la (1) perchè ciò accada. La risposta viene facilmente fornita dalle proprietà dell'invariante assoluto, stabilite al Cap. X (vedi particolarmente §. 121), mediante le considerazioni seguenti. Supponiamo adunque che $\varphi(\tau)$ sia monodroma in τ e funzione algebrica di J definita dalla (1). Consideriamo un punto qualunque $J = J_1$ del piano complesso J, *diverso da uno dei tre valori* 0, 1, ∞, che corrispondono ai vertici della rete modulare. Se facciamo descrivere a J un piccolo circuito chiuso attorno a J_1 e, scelto per valore di τ corrispondente al valore J_1 di J uno qualunque degli infiniti valori equivalenti corrispondenti, esaminiamo il corrispondente cammino descritto da τ, vediamo che sarà questo un cammino chiuso attorno a τ_1 e perciò gli m rami

$$\varphi_1 , \varphi_2 \ldots \varphi_m$$

della funzione algebrica φ, essendo per ipotesi monodromi in τ, ritorneranno ciascuno col proprio valore. Dunque:

I punti di diramazione della funzione modulare $\varphi(\tau)$, considerata come funzione algebrica di $J(\tau)$, si potranno presentare soltanto per i tre valori

$$J = 0 \ , \ J = 1 \ , \ J = \infty .$$

Esaminiamo ora quali specie di diramazione si avranno in questi punti. Per vederlo basta osservare che per un circuito chiuso descritto da J, che giri *tre* volte attorno a $J_1 = 0$, τ descrive un giro semplice attorno ad un vertice della rete modulare, equivalente al vertice $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, e similmente per un circuito chiuso di J, che giri *due* volte attorno a $J_1 = 1$, τ gira una volta attorno ad un vertice della rete, equivalente al vertice $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$, onde vediamo: *Attorno a $J = 0$ quei rami della funzione algebrica φ che non corrono isolati si permutano ciclicamente tre a tre; e similmente attorno a $J = 1$ ogni ramo, o corre isolato, o subisce una trasposizione con un altro ramo.*

Quanto alla diramazione in $J = \infty$, non occorre ulteriormente specificarla, poichè essa risulta già fissata dalle diramazioni attorno a $J = 0$, $J = 1$ [1].

---

[1] E infatti, avendosi i tre soli punti critici $J = 0$, $J = 1$, $J = \infty$, un giro attorno a $J = \infty$ equivale a un giro complessivo attorno ai due punti $J = 0$ $J = 1$.

Ora è bene importante che le condizioni, così trovate come necessarie, siano anche sufficienti, come viene precisato dalla proposizione seguente, che costituisce il così detto *teorema di diramazione* (Verzweigungssatz) di Klein:

Affinchè l'equazione algebrica irriducibile

$$f(\varphi, J) = 0 \tag{1}$$

definisca una funzione modulare $\varphi(\tau)$ *è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le condizioni seguenti:*

1.ª la funzione algebrica φ *di* J *sia diramata soltanto per* $J = 0, 1, \infty$.
2.ª per $J = 0$ *i rami restino isolati, o si permutino ciclicamente tre a tre.*
3.ª per $J = 1$ *ogni ramo corra isolato, o si permuti per trasposizione con un altro.*

Che le condizioni siano necessarie si è già visto; resta ora a dimostrarsi che sono sufficienti. Dobbiamo provare cioè che, soddisfatte queste condizioni, se per un particolare valore τ_1 di τ fissiamo uno dei rami φ_1 e lo continuiamo analiticamente, ne risulterà una funzione *monodroma* di τ:

$$\varphi_1 = \varphi(\tau).$$

Consideriamo nel semipiano positivo τ un cammino finito chiuso e privo di nodi s, che non passi per alcun vertice della rete modulare e racchiuda quindi un'area semplice finita, che conterrà nel suo interno un numero finito di vertici e dimostriamo che per un tale cammino s le m determinazioni di φ:

$$\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$$

ritornano ciascuna col valore iniziale. E infatti, per considerazioni analoghe a quelle del §. 80, vediamo che se s producesse un'effettiva permutazione di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ potremmo decomporre l'area in due aree minori, inserendo una linea semplice interna, che eviti ancora il passaggio pei vertici, e l'uno o l'altro dei due contorni chiusi s_1, s_2 delle aree parziali dovrebbe produrre una permutazione di $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$. Così continuando, come al §. 80, troveremmo contorni chiusi, piccoli a piacere, che permuterebbero $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$.

Ora ciò è impossibile perchè se un tale contorno non gira attorno ad un vertice della rete, J descrive un piccolo contorno chiuso, che non gira attorno nè a $J = 0$ nè a $J = 1$, e però $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$ singolar-

mente si riproducono. Ma, quando anche τ giri attorno ad un vertice della rete, J girerà attorno a $J=0$ o a $J=1$ tre o due volte rispettivamente e però, per le ipotesi fatte, $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$ riprenderanno con continuità i valori iniziali. Dopo ciò è evidente che per qualunque cammino chiuso descritto da τ, comunque intrecciato, $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$ si riproducono. Il teorema di diramazione è così dimostrato.

Ora i teoremi generali di esistenza delle funzioni algebriche, corrispondenti a superficie *Riemanniane* date a priori, permettono di asserire, che, assegnando ad arbitrio il modo di diramazione della funzione algebrica φ di J, tali funzioni esisteranno effettivamente, e, purchè siano soddisfatte le condizioni del teorema di diramazione, condurranno ad altrettante funzioni modulari.

I teoremi ora indicati ci permettono dunque di riconoscere l'esistenza di infiniti sottogruppi d'indice finito nel gruppo modulare e di costruirli effettivamente.

Per altro è da osservarsi che ogni equazione algebrica (1), soddisfacente alle condizioni del teorema di diramazione, definisce propriamente non un solo sottogruppo G del gruppo modulare Γ, ma insieme anche tutti i sottogruppi affini

$$G_1 = G \ , \quad G_2 = t_2 \, G \, t_2^{-1} \ , \ \ldots \ G_m = t_m \, G \, t_m^{-1} \, .$$

§. 176.

Sottogruppi d'indice finito e loro poligono fondamentale.

Ogni funzione modulare appartiene, come si è visto, ad un sottogruppo G d'indice finito m del gruppo modulare Γ. Per dimostrare inversamente che per ogni sottogruppo G del gruppo modulare Γ, il cui indice in Γ sia finito, esistono funzioni modulari a gruppo riproduttivo G, occorre premettere alcune nozioni generali sui sottogruppi d'indice finito del gruppo modulare e sui loro campi fondamentali.

Sia dunque G un sottogruppo d'indice finito m in Γ e distribuiamo tutte le sostituzioni di Γ, rispetto al sottogruppo G, nel quadro:

$$a) \qquad \Gamma = \begin{cases} g_1 \ , & g_2 \ , & g_3 \ \ldots \\ t_2 \, g_1 \ , & t_2 \, g_2 \ , & t_2 \, g_3 \ \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_m \, g_1 \ , & t_m \, g_2 \ , & t_m \, g_3 \ \ldots \ ; \end{cases}$$

coi medesimi simboli delle sostituzioni indicheremo i (doppî) triangoli della rete relativa al gruppo Γ, considerandoli come derivati p. e. dal triangolo fondamentale, che indicheremo col simbolo 1 [1].

Due sostituzioni di Γ

$$\gamma\ ,\ \gamma'\ ,$$

o i due corrispondenti triangoli, si diranno *relativamente equivalenti*, od equivalenti rispetto al sottogruppo G, quando l'un triangolo deriva dall'altro con una sostituzione g di G, quando si abbia cioè

$$\gamma' = \gamma g_i\ ,$$

sicchè due sostituzioni, o triangoli, saranno relativamente equivalenti o no, secondo che nel quadro a) figurano nella medesima linea orizzontale, o in orizzontali diverse. Se prendiamo adunque da ciascuna orizzontale del quadro a) un triangolo ad arbitrio, avremo un sistema di m triangoli

$$T_1\ ,\ T_2 \ldots T_m\ ,$$

che si può dire un *sistema completo di triangoli non equivalenti*, giacchè qualunque altro triangolo della rete sarà equivalente ad uno e ad uno solo di questi.

Ora dimostriamo che possiamo scegliere i triangoli $T_1, T_2 \ldots T_m$ in guisa che ciascuno sia aderente ad un altro almeno di essi per un lato e il loro insieme formi quindi un'area connessa. Per ciò prendiamo ad arbitrio un triangolo, p. e. il fondamentale T', e associamovi quei triangoli aderenti a T' che non sono relativamente equivalenti a T nè fra loro; per ciascuno dei triangoli aggiunti si proceda nel medesimo modo, aggiungendo al complesso dei triangoli già prima ottenuti ogni nuovo triangolo aderente, quando non trovi il suo equivalente, rispetto a G, nei triangoli del complesso. Siccome fra $m+1$ triangoli presi ad arbitrio ve ne sono almeno due relativamente equivalenti, il processo descritto condurrà ad un insieme di un numero finito $r \leq m$ di triangoli aderenti

$$(3) \qquad T'\ ,\ T'' \ldots T^{(r)}\ ,$$

così costituito che ogni triangolo aderente ad uno di questi r triangoli trovi il suo equivalente, rispetto a G, in uno dei triangoli stessi. È ben facile ora vedere che si ha necessariamente $r = m$, onde risulta la

---

[1] Cf. Cap. II, pag. 95.

verità della proposizione enunciata. E infatti osserviamo che se un triangolo qualunque U della rete è equivalente, rispetto a G, ad uno dei triangoli (3) p. e. a $T^{(i)}$, anche un triangolo U′, aderente ad U per un lato, sarà equivalente ad un triangolo in (3). In vero quella sostituzione g di G, che porta U in $T^{(i)}$, porterà U′ in un triangolo aderente a $T^{(i)}$ e quindi relativamente equivalente ad uno della serie stessa (3). E siccome in fine possiamo passare da un triangolo qualsiasi V al fondamentale per una serie finita di triangoli successivamente aderenti, ne risulta appunto che V sarà relativamente equivalente ad un triangolo (3).

L'insieme di triangoli così scelti

$$T', T'', T''' \ldots T^{(m)}$$

forma un poligono P, limitato da archi di circoli di riflessione del gruppo modulare, ed in questo poligono P riconosciamo il campo o *poligono fondamentale* del sottogruppo G, diciamo cioè che: *Ogni punto del semipiano positivo è equivalente, rispetto al sottogruppo* G, *ad un punto del poligono* P, *mentre due punti del poligono non sono fra loro relativamente equivalenti, fatta eccezione dai punti del contorno, che si ordinano in coppie di punti equivalenti.*

La prima cosa è subito evidente, poichè ogni punto del semipiano positivo appartiene ad un triangolo della rete, che è relativamente equivalente ad un triangolo di P. Supponiamo ora che M, N siano due punti di P relativamente equivalenti; essi dovranno necessariamente trovarsi sul contorno di P. E infatti se p. e. M fosse interno a P, sia che si trovasse sopra un lato interno o in un vertice della rete modulare, la sostituzione di G che porta M in N porterebbe un triangolo di P, contenente M, in un altro triangolo di P, ciò che è assurdo. Prendiamo invece un punto M sul contorno di P, cioè sopra un lato esterno l di P. Quel triangolo della rete che è aderente esternamente a P lungo l trova il suo equivalente in un triangolo $T^{(i)}$ di P ed è chiaro, per quanto precede, che il lato l' di $T^{(i)}$ equivalente a l sarà pure un lato esterno di P. Vediamo adunque che: *I lati esterni del poligono* P *si ordinano a coppie di lati coniugati, cioè relativamente equivalenti rispetto al sottogruppo* G.

Per ciò anche i punti del contorno di P si ordinano a coppie di punti equivalenti e si vede subito che ogni punto del contorno ne ammette così uno ed uno solo relativamente equivalente sul contorno stesso.

Osserviamo però che, nell'ordinamento dei lati del poligono fondamentale in coppie di lati coniugati, può darsi benissimo che un lato l risulti coniugato a sè stesso, il che significa allora che il triangolo di P, che ha l per lato, è relativamente equivalente a quello aderente lungo l esternamente. In tal caso, la sostituzione di G che cangia l in sè stesso è ellittica a periodo 2 ed ha su l un punto fisso, che divide l in due tratti coniugati; allora riguardiamo l come costituito di due lati per diritto e il detto punto fisso come nuovo vertice, a cui corrisponde un angolo piatto. In generale è da osservarsi che se un punto P percorre un lato l del contorno in verso positivo, l'equivalente P′ percorre il lato coniugato nel senso opposto.

Applicando al poligono fondamentale P di G tutte le sostituzioni di G stesso otteniamo una rete di poligoni, come P, che ricopre una ed una sola volta tutto il semipiano positivo, come risulta da quanto sopra abbiamo dimostrato. Ora se consideriamo le μ coppie di lati coniugati di P e le μ sostituzioni di G

$$g_1 \,,\; g_2 \cdots g_\mu \,, \tag{4}$$

che portano un lato nel coniugato, insieme alle loro inverse

$$g_1^{-1} \,,\; g_2^{-1} \cdots g_\mu^{-1} \,,$$

facilmente vediamo che: *L'intero sottogruppo si genera combinando le* μ *sostituzioni* (4) *e le loro potenze.* E invero le μ sostituzioni (4) e le loro inverse bastano già a trasportare P in tutti i poligoni aderenti della rete ora considerata e d'altra parte si può passare dal poligono fondamentale P ad uno qualunque della rete per una successione di poligoni l'uno all'altro aderenti. (Cf. Cap. II).

§. 177.

Esistenza di funzioni modulari appartenenti ad un dato sottogruppo.

Immaginiamo ora di tagliare dal semipiano positivo l'area poligonale P ed, assoggettando quest'area ad una deformazione continua [1]

[1] Come nella teoria della connessione si riguarda l'area come formata da un velo perfettamente flessibile ed estendibile, che può traversare liberamente sè stesso.

nello spazio, di saldare insieme i lati coniugati sì che ciascuna coppia di punti equivalenti dia luogo ad un unico punto. Ne risulterà una superficie chiusa R tale che, supponendo dapprima l'esistenza della corrispondente funzione modulare $\varphi(\tau)$, ad ogni punto della superficie corrisponderà una ed una sola coppia di valori φ, J per la funzione modulare φ e l'invariante assoluto J, e viceversa ad ogni coppia di valori φ, J soddisfacente all'equazione (1) $f(\varphi, J) = 0$ uno ed un solo punto della superficie R. La prima cosa è evidente, per la monodromia di $\varphi(\tau)$, $J(\tau)$; la seconda poi risulta da ciò che, se si ha simultaneamente

$$J(\tau) = J(\tau_1) \ , \quad \varphi(\tau) = \varphi(\tau_1) \ ,$$

i valori τ, τ_1 sono legati da una sostituzione del sottogruppo G, cioè sono relativamente equivalenti, e per ciò i due punti supposti su R necessariamente coincidono.

Secondo quanto abbiamo detto al §. 83, la superficie chiusa R non è altro che la superficie Riemanniana per l'equazione algebrica

$$f(\varphi, J) = 0;$$

soltanto gli m fogli, che nell'ordinaria rappresentazione sono collocati l'uno sull'altro, qui si trovano l'uno accanto all'altro e sono rappresentati dagli m triangoli di P, in ciascuno dei quali $J(\tau)$ ripete appunto tutti i suoi valori.

Il genere p della superficie Riemanniana si valuta subito, applicando la nota formola d'Eulero generalizzata, citata al §. 92:

$$F + V = C + 2 - 2p.$$

Da queste considerazioni e dai teoremi d'esistenza delle funzioni algebriche, corrispondenti a superficie Riemanniane date a priori, si può ora dedurre l'importante teorema: *Dato ad arbitrio un sottogruppo di indice finito m del gruppo modulare* Γ, *esistono sempre funzioni modulari appartenenti al sottogruppo* G.

E infatti costruiamo il poligono fondamentale P di G e, nel modo descritto al principio del presente §, conformiamolo a superficie chiusa R. Sopra ciascuno degli m triangoli in cui R è diviso sono distesi una volta i valori di $J(\tau)$ e possiamo riguardare R come una superficie Riemanniana a m fogli. Soltanto attorno ai vertici, ove per J si hanno i valori

$$J = 0 \ , \quad J = 1 \ , \quad J = \infty \ ,$$

avviene scambio dei fogli e, come subito si vede, il modo dello scambio corrisponde appunto alle condizioni del teorema di diramazione. Se ora prendiamo una funzione algebrica φ di J appartenente alla superficie Riemanniana R, della cui esistenza ci assicurano i teoremi generali, essa, considerata come funzione di τ, sarà monodroma come c'insegna il teorema di diramazione, cioè sarà una funzione modulare. Per dimostrare poi che la $\varphi(\tau)$ rimarrà invariata per tutte le sostituzioni di G basterà provare la cosa per le μ sostituzioni (4) generatrici di G. Sia $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ una tale sostituzione, che cangia dunque un lato l di P nel lato coniugato l'. Le due funzioni

$$\varphi(\tau)\ ,\quad \varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$

coincidono lungo l perchè, mentre τ percorre l, $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ percorre l' e in punti corrispondenti di l, l' (che sulla superficie chiusa R coincidono in un medesimo punto) la φ ha il medesimo valore, onde si conclude che è sempre $\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \varphi(\tau)$.

In fine per essere certi che nessun'altra sostituzione di Γ, oltre quelle di G, lascia φ invariata, cioè che $\varphi(\tau)$ appartiene realmente al sottogruppo G e non ad un sottogruppo più ampio, basterà scegliere la funzione algebrica φ di J in guisa che pel medesimo valore generico di J la φ assuma m valori distinti, ciò che è sempre possibile.

§. 178.

Il poligono fondamentale del sottogruppo $G \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \pmod 2$.

Limitandoci ai principii fondamentali, esposti nei §§. precedenti, per quanto riguarda la teoria generale delle funzioni modulari, tratteremo ora di alcune poche funzioni modulari, che furono le prime studiate e diedero il nome all'intera classe. E in primo luogo riprenderemo lo studio della funzione modulare $k^2(\tau)$ (§. 135), appartenente al sottogruppo

$$G \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \pmod 2,$$

e legata all' invariante assoluto J (τ) dalla relazione

$$J = \frac{4}{27} \frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}, \tag{5}$$

per determinarne il poligono fondamentale, che consisterà di 6 triangoli della rete del gruppo modulare Γ. Potremmo a questo oggetto applicare il processo generale descritto al §. 176, ma preferiamo procedere, come già al Cap. II per lo studio del gruppo modulare, ampliando il gruppo G colla riflessione $z' = -z_0$ e considerando quindi il gruppo ampliato G_0, composto delle sostituzioni di 1.ª e 2.ª specie della forma

$$\begin{cases} z' = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}. \pmod 2 \\ z' = \dfrac{\alpha z_0 - \beta}{\gamma z_0 - \delta}. \end{cases}$$

Le riflessioni contenute nel sottogruppo G_0 hanno la forma

$$z' = \frac{\alpha z_0 - \beta}{\gamma z_0 - \delta}, \quad \alpha^2 - \beta\gamma = 1$$

con $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod 2$ e perciò le rette e i circoli di riflessione saranno dati dalle equazioni (Cf. §. 18):

$$x = n, \quad \left(x - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{\gamma^2},$$

dove n è un intero qualunque e si ha $\gamma \equiv 0 \pmod 2$ con $\alpha^2 \equiv 1 \pmod \gamma$. Consideriamo il triangolo T del semipiano positivo, limitato entro la striscia compresa fra le due rette successive di riflessione

$$x = 0, \quad x = -1,$$

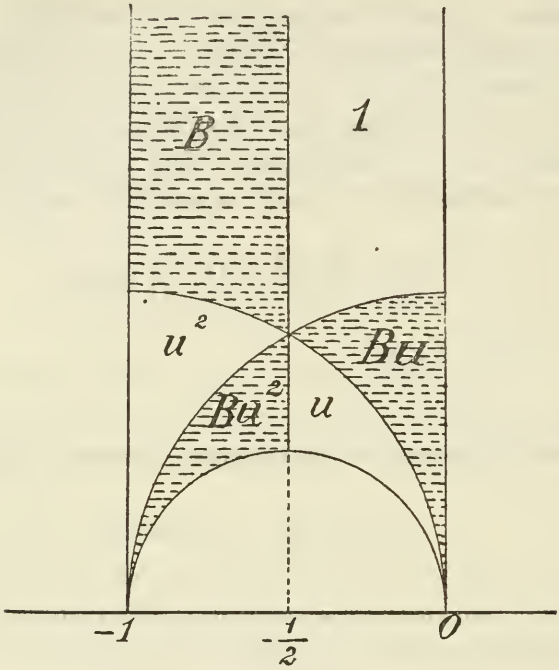
esternamente al circolo di riflessione

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ (vedi fig. 13)}.$$

Questo triangolo T, coi tre angoli nulli, non è attraversato da alcun altro circolo o retta di riflessione di G_0 e rappresenta il triangolo fondamentale del gruppo G_0, come si dimostra con considerazioni del tutto

simili a quelle dei §§. 18, 19. Ogni punto del semipiano positivo è equivalente, rispetto a G_0, ad uno e *ad un solo* punto di T; l'ultima cosa

Fig. 13.



risultando da ciò che nessuna sostituzione di G_0 trasforma T in sè medesimo. E infatti cerchiamo in generale le sostituzioni di 1.ª e 2.ª specie che lasciano fisso T, senza nemmeno esigere che appartengano al gruppo modulare. In primo luogo troviamo fra queste la sostituzione ellittica a periodo 3

$$\text{U)}\ z' = -\frac{1}{z+1}$$

che produce sui vertici $0, -1, \infty$ di T la permutazione ciclica $(0, -1, \infty)$ e il suo quadrato U^2) $z' = -\frac{z+1}{z}$ che produce la permutazione $(0, \infty\ -1)$. Nessun'altra sostituzione di 1.ª specie può lasciar fisso T, perchè dovrebbe lasciar fisso uno dei tre vertici e permutare gli altri due e componendola con U o con U^2 si avrebbe una sostituzione che lascierebbe fisso ∞ e permuterebbe $(0, -1)$. Ora una tale sostituzione

esiste effettivamente ed è

$$z' = -(z+1);$$

ma, essendo a determinante -1, scambia i due semipiani e, invece di lasciar fisso T, lo cangia nel suo simmetrico rispetto all'asse reale. Così adunque di sostituzioni di 1.ª specie che lascino fisso T vi sono solo le tre

$$1, \; U, \; U^2,$$

appartenenti al gruppo modulare Γ. Vi ha poi anche la riflessione B

$$\text{B)} \quad z' = -z_0 - 1$$

che lascia fisso T, e quindi le tre di 2.ª specie

$$B, \; BU, \; BU^2;$$

nè ve ne possono essere altre. Tutte sei queste sostituzioni appartengono al gruppo modulare ampliato Γ_0, ma non a G_0, onde segue quanto sopra è asserito [1]. Nella figura 13 sono rappresentati i 6 triangoli della rete modulare in cui T si decompone; i nomi di questi 6 triangoli sono appunto quelli

$$1, \; U, \; U^2, \; B, \; BU, \; BU^2$$

delle 6 sostituzioni di Γ_0, che costituiscono il gruppo riproduttivo di T.

Volendo ora ottenere il poligono fondamentale del gruppo $G \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ (mod 2), basterà associare al triangolo T il suo simmetrico rispetto all'asse immaginario e nel quadrilatero così formato, racchiuso dalle due rette $x = \mp 1$ all'esterno dei due circoli

$$\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

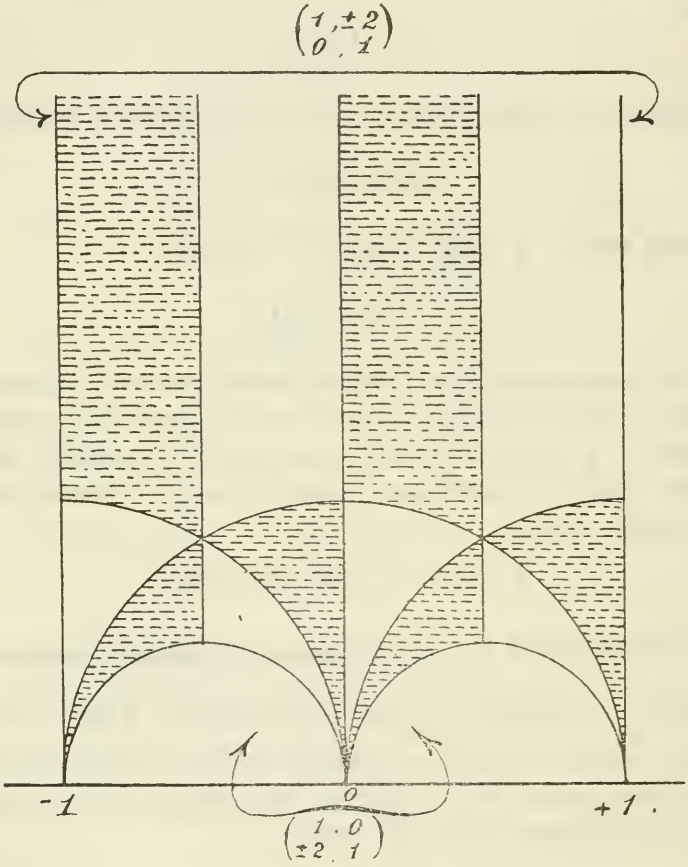
avremo appunto il poligono fondamentale di G (vedi fig. 14). Ogni punto del semipiano positivo è equivalente, rispetto al sottogruppo G, ad un

---

[1] Risulta di più: *Il gruppo modulare* Γ_0 *è il più ampio, nel quale* G_0 *sia contenuto come sottogruppo invariante.*

punto e ad uno solo di questo poligono P, a meno che il punto non trovisi sul contorno, nel qual caso esso è equivalente al punto del contorno, simmetrico rispetto all'asse immaginario. (Cf. §. 21). I lati del quadrilatero P sono due a due coniugati, i rettilinei fra loro, i circolari fra loro; le ri-

Fig. 14.



spettive sostituzioni di G, che cangiano l'uno nell'altro i lati coniugati, sono

$$\begin{pmatrix} 1, & \pm 2 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \pm 2, & 1 \end{pmatrix}.$$

Se ne conclude (§. 176): *Il sottogruppo* G *del gruppo modulare* Γ, *definito dalla congruenza* $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ (mod 2), *si genera mediante*

le due sostituzioni elementari (paraboliche):

$$\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \end{pmatrix} \text{ (1)}$$

Se, conformemente a quanto si è detto nel §. precedente, si saldano insieme i lati coniugati di P, si ha una superficie Riemanniana (di genere zero) a 6 fogli che si diramano in $J=0$ tre a tre, in $J=1$ due a due e medesimamente in $J=\infty$. Essa è la superficie di Riemann per l'equazione algebrica (5).

§. 179.

Distribuzione dei valori di $k^2(\tau)$ nel suo poligono fondamentale.

Esaminiamo ora la distribuzione dei valori di $k^2(\tau)$ nel suo poligono fondamentale. Dalle espressioni analitiche per prodotti infiniti e per serie, date al Cap. XIII, in particolare ad es. dalle (IV) pag. 398 o dalle (XVI) pag. 413, risulta che $k^2(\tau)$ è reale su tutto l'asse immaginario e quindi in punti simmetrici rispetto all'asse immaginario (come pure in punti simmetrici rispetto ad ogni circolo di riflessione di G_0) assume valori coniugati. Basterà dunque esaminarne l'andamento sul contorno del triangolo fondamentale di G_0, ove $k^2(\tau)$ sarà sempre reale e non potrà passare due volte pel medesimo valore. All'infinito sull'asse immaginario $q=e^{\pi i \tau}$ si annulla e perciò anche $k^2(i\infty)=0$. In virtù della formola (pag. 357)

$$k^2\left(-\frac{1}{\tau}\right)=1-k^2(\tau) ,$$

si ha

$$k^2(i)=\frac{1}{2} , \quad k^2(0)=1 ,$$

sicchè sull'asse immaginario da ∞ a 0 $k^2(\tau)$ va sempre crescendo per valori reali da 0 a 1. Ora la sostituzione

$$\text{U)} \quad \tau'=-\frac{1}{\tau+1}$$

---

(1) Si osservi che il sottogruppo G contiene soltanto sostituzioni paraboliche ed iperboliche, ma nessuna ellittica.

cangia l'asse immaginario nel lato semi-circolare

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\,,$$

sul quale, movendo τ da 0 a -1, $k^2(\tau)$, a causa della formola (pag. 357)

$$k^2\left(\frac{-1}{\tau+1}\right)=\frac{1}{1-k^2(\tau)}\,,$$

andrà crescendo da 1 a ∞. In fine se si osserva che la sostituzione

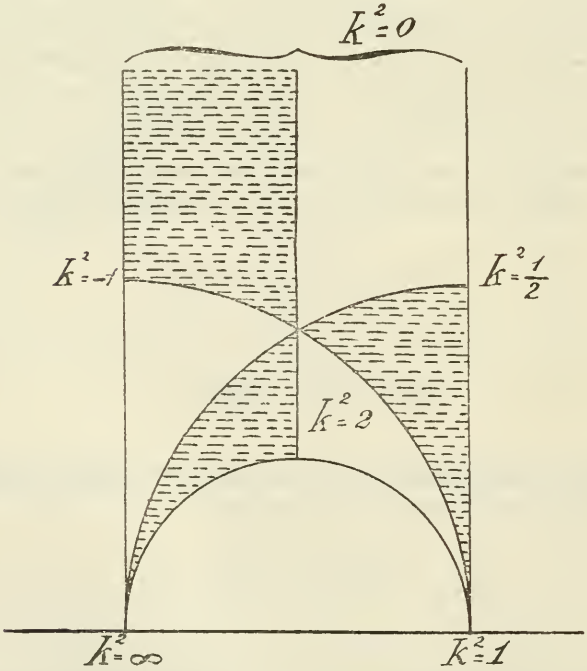
$$\mathrm{U}^2)\quad \tau'=-\frac{\tau+1}{\tau}\,,$$

cangia l'asse immaginario nel lato rettilineo $x=-1$ e d'altronde si ha

$$k^2\left(-\frac{\tau+1}{\tau}\right)=\frac{k^2(\tau)-1}{k^2(\tau)}\,,$$

si vede che sul lato $x=-1$, $k^2(\tau)$ va crescendo per valori negativi da $-\infty$ a 0 (vedi fig. 15). In tutto l'interno del triangolo fondamen-

Fig. 15.



tale T di G_0 il coefficiente dell'immaginario in $k^2(\tau)$ serba sempre lo

stesso segno (perchè ivi $k^2(\tau)$ non è mai reale) e poichè nel triangolo simmetrico rispetto all'asse immaginario prende i valori coniugati e d'altronde nel quadrilatero fondamentale di G assume (una volta) ogni possibile valore [1], ne risulta che nell'interno di T $k^2(\tau)$ prenderà una ed una sola volta tutti i valori col coefficiente dell'immaginario di un medesimo segno, che si riconosce subito essere il negativo dall'andamento di $k^2(\tau)$ sul contorno.

Se distendiamo i valori di $k^2(\tau)$ nel suo piano complesso, abbiamo il risultato: *La funzione modulare $k^2(\tau)$ dà la rappresentazione biunivoca conforme del triangolo fondamentale di G_0 sul semipiano negativo.*

§. 180.

La funzione $k^2(\tau)$ come uniformizzante.

Osserviamo che nel semipiano positivo, a distanza finita, $k^2(\tau)$ non prende mai uno dei tre valori

$$0\ ,\ 1\ ,\ \infty\ ,$$

valori che assume soltanto, o meglio verso i quali converge, andando ai punti limiti del campo, che sono il punto $\tau=\infty$ e i punti razionali dell'asse reale. E siccome con una sostituzione

$$\tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\ ,\ \begin{pmatrix}\alpha\ ,\ \beta\\ \gamma\ ,\ \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1\ ,\ 0\\ 0\ ,\ 1\end{pmatrix} \pmod 2$$

del gruppo G riproduttivo di $k^2(\tau)$ si passa da $\tau=\infty$ a tutti i punti razionali dell'asse reale della forma $\frac{\alpha}{\gamma}$ con $(\alpha,\gamma)\equiv(1,0)$ (mod 2), dal punto $\tau=0$ a tutti i punti $\frac{\beta}{\delta}$ con $(\beta,\delta)\equiv(0,1)$ (mod 2) e infine da $\tau=-1$ a tutti i punti $\frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}=\frac{r}{s}$ con $(r,s)\equiv(1,1)$ (mod 2) ne concludiamo:

La funzione modulare $k^2(\tau)$ assume i valori $0, 1, \infty$ *(o meglio converge verso di essi) soltanto all'infinito e nei punti razionali $\frac{r}{s}$ dell'asse reale*

---

[1] Basta osservare che $k^2(\tau)$ è legato a $J(\tau)$ dalla (5) e ricordare quanto si dimostrò al §. 120 riguardo all'invariante assoluto.

con r, s interi primi fra loro e precisamente converge verso i valori 0, 1, ∞ *secondo che*

$$(r, s) \equiv (1, 0)\ , \equiv (0, 1)\ , \equiv (1, 1) \pmod 2.$$

Questa proprietà della funzione modulare $k^2(\tau)$, di *non* prendere i valori

$$k^2 = 0\ ,\ 1\ ,\ \infty\ ,$$

dà luogo ad un'importante applicazione, che vogliamo ora accennare. Sia

$$w = \mathrm{F}(z)$$

una funzione analitica di z comunque polidroma, ma così costituita che soltanto girando attorno ad uno dei tre punti

$$z = 0\ ,\ 1\ ,\ \infty\ ,$$

avvenga scambio dei rami, che sia cioè diramata soltanto in $z = 0, 1, \infty$ e quivi del resto in modo affatto arbitrario. Se poniamo $z = k^2(\tau)$ e riguardiamo $w = \mathrm{F}(z)$ come funzione di τ, diciamo $w = \varphi(\tau)$, basterà fissare per un valore iniziale τ_0 di τ la scelta fra uno dei valori di $\mathrm{F}(k^2(\tau_0))$ per avere completamente fissata la funzione analitica $w = \varphi(\tau)$. Ora diciamo che *essa è in ogni caso una funzione monodroma di* τ. Per vederlo basta ripetere le considerazioni fatte al §. 175, a proposito del teorema di diramazione, e ricordare che per un cammino chiuso descritto da τ la $z = k^2(\tau)$ non può girare attorno a $z = 0, 1, \infty$.

Questo risultato si esprime anche dicendo che per la relazione funzionale $w = \mathrm{F}(z)$, ove la w si dirami, in modo del resto arbitrario, attorno a $z = 0, 1, \infty$ soltanto, la variabile ausiliaria τ è una variabile *uniformizzante*, cioè tale che per essa si esprimono ad un tempo la variabile indipendente $z = k^2(\tau)$ e la funzione $w = \varphi(\tau)$ quali funzioni uniformi. Suppongasi in particolare che la w sia funzione algebrica di z e diramata soltanto nei punti $z = 0, 1, \infty$; applicando il teorema generale precedente ed osservando che in tal caso, essendo w legata algebricamente a $k^2(\tau)$, lo è anche all'invariante assoluto $\mathrm{J}(\tau)$, otteniamo il teorema:

Qualunque funzione algebrica di $k^2(\tau)$, *che sia diramata soltanto per*

$$k^2 = 0\ ,\ k^2 = 1\ ,\ k^2 = \infty\ ,$$

e quivi del resto in modo affatto arbitrario, è una funzione modulare algebrica di τ.

§. 181.

Le funzioni modulari $\sqrt[n]{k^2(\tau)}$, $\sqrt[n]{1-k^2(\tau)}$.

Da quanto abbiamo ora detto risulta in particolare che, indicando con n un numero intero positivo qualunque, le funzioni

$$\sqrt[n]{k^2(\tau)} \ , \ \sqrt[n]{1-k^2} = \sqrt[n]{k'^2}$$

sono funzioni modulari; le fisseremo perfettamente convenendo di prendere per $\tau = i$ il valore aritmetico del radicale $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

I poligoni fondamentali delle funzioni modulari

$$\Phi(\tau) = \sqrt[n]{k^2(\tau)} \ , \ \Psi(\tau) = \sqrt[n]{k'^2(\tau)} \ ,$$

che constano di $6n$ triangoli del gruppo modulare Γ, sono facili a determinarsi. Basta per ciò considerare che la superficie Riemanniana, corrispondente ad es. alla prima equazione algebrica

$$\Phi^n = k^2 ,$$

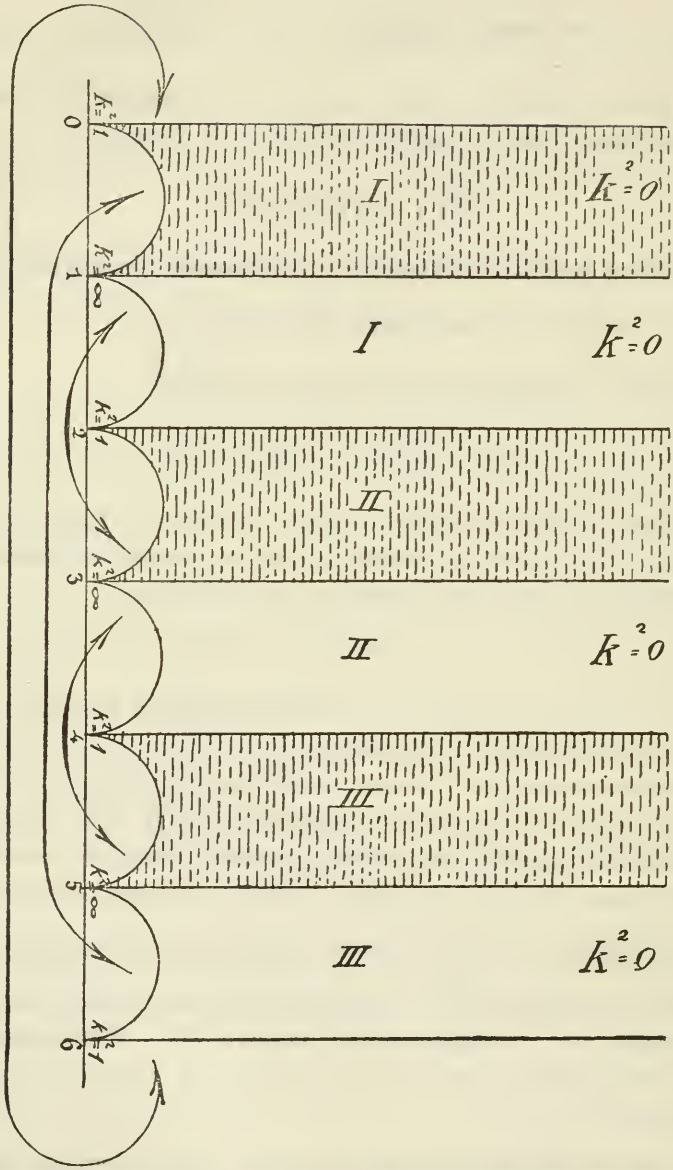
consta di n fogli sopra ognuno dei quali sono distesi una volta i valori di k^2 ed ha i due punti di diramazione $k^2 = 0$, $k^2 = \infty$, ove gli n fogli si riuniscono in un ciclo. Ora se consideriamo il poligono fondamentale di k^2, che consta di due successivi triangoli di G_0 (§. 178) e rappresenta un foglio della superficie Riemanniana, basterà prendere n successivi di questi poligoni derivati dal fondamentale colla ripetuta applicazione della traslazione $S^2 = \begin{pmatrix} 1 , & 2 \\ 0 , & 1 \end{pmatrix}$ e saldare quindi i due lati rettilinei estremi mediante la sostituzione S^{2n} e i circolari nel modo indicato dalle freccie nella figura, ove è rappresentato il caso $n = 3$ [1]. Effettivamente, con questa corrispondenza dei lati, si vede subito che in $k^2 = 0$, $k^2 = \infty$

---

[1] È da notarsi che tutti questi lati circolari sono fra loro equivalenti non solo rispetto a G_0 ma anche rispetto a G e per ciò le sostituzioni che congiungono i lati appartengono al gruppo $G \equiv \begin{pmatrix} 1 , & 0 \\ 0 , & 1 \end{pmatrix}$ (mod 2), come è confermato dai calcoli del testo.

i tre fogli sono riuniti ciclicamente, laddove per $k^2 = 1$ non vi ha diramazione.

Fig. 16.



Calcoliamo subito le $n+1$ sostituzioni generatrici del sottogruppo di $\Phi(\tau)$. Una di esse sarà la $S^{2n} = \begin{pmatrix} 1, & 2n \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ che congiunge i lati rettilinei e

un'altra la sostituzione

$$U = \begin{pmatrix} 4n-1 , & -2n \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

che congiunge i lati estremi circolari. Quanto alle intermedie $n-1$, esse debbono trasformare il lato circolare cogli estremi nei due punti $2r-1$, $2r$ nel contiguo cogli estremi $2r+1$, $2r$ (per $r=1, 2, 3 \ldots\ldots n-1$). Una tale sostituzione si compone della riflessione sulla retta $x=2r$ e della riflessione sull'ultimo circolo, e si trova quindi per la sua espressione

$$\begin{pmatrix} 4r+1 , & -8r^2 \\ 2 & , -(4r-1) \end{pmatrix} \quad r=1, 2, 3 \ldots n-1.$$

Concludiamo adunque che: *Le sostituzioni generatrici del sottogruppo riproduttivo della funzione modulare*

$$\Phi(\tau) = \sqrt[n]{k^2(\tau)}$$

sono le $n+1$ *sostituzioni seguenti*

$$S^{2n} = \begin{pmatrix} 1, & 2n \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 4n-1, & -2n \\ 2 & , -1 \end{pmatrix}, \quad U_r = \begin{pmatrix} 4r+1, & -8r^2 \\ 2 & , -(4r-1) \end{pmatrix} (r=1, 2, \ldots n-1).$$

Analogamente si determinerebbero le $n+1$ sostituzioni generatrici del gruppo riproduttivo di

$$\Psi(\tau) = \sqrt[n]{k'^2(\tau)}.$$

Ma del resto basta osservare che si ha

$$k'^2(\tau) = k^2\left(-\frac{1}{\tau}\right),$$

per vedere che si otterranno le sostituzioni domandate trasformando le precedenti per mezzo della

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Potremmo ora domandarci come si possono definire *aritmeticamente* le sostituzioni di questi gruppi riproduttivi di $\Phi(\tau)$, $\Psi(\tau)$, di cui conosciamo le sostituzioni generatrici. Ma nello stato attuale della teoria vi è una sola specie di sottogruppi del gruppo modulare che siamo in grado

di definire aritmeticamente e questi sono i sottogruppi *congruenziali*, le cui sostituzioni sono perfettamente caratterizzate da congruenze cui debbono soddisfare i coefficienti. (Cf. §. 128). Ora i gruppi superiori non sono mai gruppi congruenziali salvo i casi

$$n = 8\ ,\ 4\ ,\ 2\ ,$$

come si può vedere dimostrato nell'opera di Klein-Fricke [1]. Ci limiteremo allo studio delle funzioni modulari

$$\sqrt[4]{k}\ ,\ \sqrt[4]{k'}\ ,$$

che, colle loro potenze 2.ª e 4.ª sono, come si è detto, le uniche radici di $k^2(\tau)$, $k'^2(\tau)$ appartenenti a sottogruppi congruenziali.

Queste furono in effetto le prime funzioni modulari studiate; e noi vogliamo ora caratterizzarne perfettamente il sottogruppo riproduttivo con congruenze (mod 16), secondo le formole che Hermite per primo fece conoscere.

§. 182.

Le funzioni modulari $\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k}$, $\psi(\tau) = \sqrt[4]{k'}$.

Poniamo con Hermite

$$\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k}\ ,\ \psi(\tau) = \sqrt[4]{k'}$$

e precisiamo il valore che prenderemo per la radice quarta, ricorrendo alle formole (IV) pag. 398, con che avremo:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi(\tau) = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i \tau}{8}} \prod\limits_{n=1}^{n=\infty} \dfrac{1+e^{2n\pi i\tau}}{1+e^{(2n-1)\pi i\tau}} \\[2ex] \psi(\tau) = \prod\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1-e^{(2n-1)\pi i\tau}}{1+e^{(2n-1)\pi i\tau}} . \end{cases}$$

Ricerchiamo l'effetto che una sostituzione qualunque $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ del gruppo modulare Γ produce su $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, per il che già basterebbe conoscere

---

[1] Bd. I, pag. 659 e ss.

quello delle sostituzioni elementari

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Intanto dalle espressioni analitiche (6), indicando con r un intero qualunque, deduciamo immediatamente le formole:

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi(\tau+2r) = e^{\frac{\pi i r}{4}} \varphi(\tau) \\ \psi(\tau+2r) = \psi(\tau) \end{cases} \qquad (7^*) \quad \begin{cases} \varphi(\tau+2r+1) = e^{\frac{(2r+1)\pi i}{8}} \cdot \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} \\ \psi(\tau+2r+1) = \frac{1}{\psi(\tau)}, \end{cases}$$

che danno in particolare l'effetto prodotto da $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$.

D'altronde avendosi

$$k^2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = k'^2(\tau), \quad k'^2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = k^2(\tau),$$

cioè

$$\varphi^8\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi^8(\tau), \quad \psi^8\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \varphi^8(\tau),$$

risulta che

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right), \quad \psi\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

non possono differire da $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$ rispettivamente che per radici 8.ᵉ dell'unità. Ma, per τ puramente immaginario, $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ sono reali e positive e perciò abbiamo senz'altro le formole

$$(8) \qquad \varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau), \quad \psi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \varphi(\tau).$$

Ciò premesso, possiamo stabilire le formole generali richieste distinguendo le sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ del gruppo modulare Γ nelle solite 6 classi rispetto al sottogruppo $G \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ (mod 2). Consideriamo dapprima una sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ di G, supponiamo cioè $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ (mod 2); dico

che sussisterà la formola:

$$(9) \qquad \varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\alpha^2+\alpha\beta-1)}\,\varphi(\tau)\left(\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \pmod 2\right).$$

Per dimostrare questa formola, osserviamo che essa sussiste per le due sostituzioni generatrici di G (§. 178)

$$\begin{pmatrix}1, & \pm 2\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & 0\\ \pm 2, & 1\end{pmatrix},$$

cioè si ha

$$\varphi(\tau\pm 2) = e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\,\varphi(\tau) \;.\; \varphi\left(\frac{\tau}{\pm 2\tau+1}\right) = \varphi(\tau),$$

poichè la prima è un caso particolare delle (7) e la seconda risulta dalle (7), (8), osservando che si ha

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ \pm 2, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & \mp 2\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}.$$

Per dimostrare che la (9) sussiste in generale basterà dunque provare che, supposta vera per la sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, essa sussiste anche per le due sostituzioni

$$\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0\\ \pm 2, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\pm 2\beta, & \beta\\ \gamma\pm 2\delta, & \delta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_2, & \beta_2\\ \gamma_2, & \delta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & \pm 2\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, & \pm 2\alpha+\beta\\ \gamma, & \pm 2\gamma+\delta\end{pmatrix}.$$

Ma si ha per ipotesi

$$\varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\alpha\beta+\alpha^2-1)}\,\varphi(\tau)$$

e quindi

$$\varphi\left(\frac{\alpha_1\tau+\beta_1}{\gamma_1\tau+\delta_1}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\alpha\beta+\alpha^2-1)}\varphi\left(\frac{\tau}{\pm 2\tau+1}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\alpha\beta+\alpha^2-1)}\varphi(\tau)$$

$$\varphi\left(\frac{\alpha_2\tau+\beta_2}{\gamma_2\tau+\delta_2}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\alpha\beta+\alpha^2-1)}\varphi(\tau\pm 2)=e^{\frac{\pi i}{8}(\alpha\beta+\alpha^2-1\pm 2)}\varphi(\tau),$$

onde basterà verificare le congruenze

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\pm 2\beta)\beta+(\alpha\pm 2\beta)^2&\equiv\alpha\beta+\alpha^2\\ \alpha(\pm 2\alpha+\beta)+\alpha^2&\equiv\alpha\beta+\alpha^2\pm 2\end{aligned}\right\}\pmod{16};$$

tale verifica è immediata, ove si rifletta che α è dispari, β pari.

2.° caso

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\pmod{2}.$$

Poichè

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta, & \alpha\\ -\delta, & \gamma\end{pmatrix}$$

e si ha

$$\begin{pmatrix}-\beta, & \alpha\\ -\delta, & \gamma\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\pmod{2},$$

risulterà per la (9)

$$\varphi\left(\frac{-\beta\tau+\alpha}{-\delta\tau+\gamma}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\beta^2-\alpha\beta-1)}\varphi(\tau)$$

e, cangiando τ in $-\frac{1}{\tau}$, avremo dunque

$$(10)\qquad \varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\beta^2-\alpha\beta-1)}\psi(\tau)\left[\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\right].$$

3.° caso

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\pmod{2}.$$

Si ha

$$\begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,, & -1\\ 0\,, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\,, & \alpha+\beta\\ \gamma\,, & \gamma+\delta\end{pmatrix}$$

ed è

$$\begin{pmatrix}\alpha\,, & \alpha+\beta\\ \gamma\,, & \gamma+\delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1\,, & 0\\ 0\,, & 1\end{pmatrix}\pmod 2\,,$$

onde per la (9)

$$\varphi\left(\frac{\alpha\tau+(\alpha+\beta)}{\gamma\tau+(\gamma+\delta)}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\alpha\beta+1)}\varphi(\tau)$$

e, mutando τ in $\tau-1$, segue per le (7*)

$$(11)\qquad \varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\cdot\frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}\left[\begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,, & 1\\ 0\,, & 1\end{pmatrix}\right].$$

4.° caso

$$\begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1\,, & 1\\ 1\,, & 0\end{pmatrix}\pmod 2.$$

Essendo

$$\begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\,, & 1\\ -1\,, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta\,, & \alpha\\ -\delta\,, & \gamma\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-\beta\,, & \alpha\\ -\delta\,, & \gamma\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1\,, & 1\\ 0\,, & 1\end{pmatrix},$$

siamo subito ridotti al caso precedente ed abbiamo

$$(12)\qquad \varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=e^{\frac{-\pi i}{8}\alpha\beta}\frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)},\ \text{per}\ \begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1\,, & 1\\ 1\,, & 0\end{pmatrix}\pmod 2.$$

5.° caso

$$\begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}0\,, & 1\\ 1\,, & 1\end{pmatrix}\pmod 2.$$

Colla formola

$$\begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,, & -1\\ 0\,, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\,, & \alpha+\beta\\ \gamma\,, & \gamma+\delta\end{pmatrix}$$

si riduce al 2.° caso e si trova

$$(12^*)\qquad \varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}(\alpha\beta+\beta^2-1)}\frac{1}{\psi(\tau)},\ \text{per}\ \begin{pmatrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}0\,, & 1\\ 1\,, & 1\end{pmatrix}\pmod 2.$$

6.° caso
$$\begin{pmatrix}\alpha\,,\ \beta\\ \gamma\,,\ \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1\,,\ 0\\ 1\,,\ 1\end{pmatrix} \pmod 2.$$

Si riduce al precedente, osservando che

$$\begin{pmatrix}\alpha\,,\ \beta\\ \gamma\,,\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\,,\ -1\\ +1\,,\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta\,,\ \alpha\\ -\delta\,,\ \gamma\end{pmatrix},$$

e si ha quindi

$$\varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(-\alpha\beta+\alpha^2-1)}\cdot\frac{1}{\varphi(\tau)}. \tag{13}$$

Riepiloghiamo le formole trovate nel quadro seguente:

$$(A)\quad \begin{cases}
\text{I)}\ \begin{pmatrix}\alpha\,,\ \beta\\ \gamma\,,\ \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1\,,\ 0\\ 0\,,\ 1\end{pmatrix};\quad \varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\alpha^2+\alpha\beta-1)}\cdot\varphi(\tau)\\[2ex]
\text{II)}\ \begin{pmatrix}\alpha\,,\ \beta\\ \gamma\,,\ \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\,,\ 1\\ 1\,,\ 0\end{pmatrix};\quad \varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\beta^2-\alpha\beta-1)}\cdot\psi(\tau)\\[2ex]
\text{III)}\ \begin{pmatrix}\alpha\,,\ \beta\\ \gamma\,,\ \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1\,,\ 1\\ 0\,,\ 1\end{pmatrix};\quad \varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\,\frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}\\[2ex]
\text{IV)}\ \begin{pmatrix}\alpha\,,\ \beta\\ \gamma\,,\ \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1\,,\ 1\\ 1\,,\ 0\end{pmatrix};\quad \varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{-\pi i}{8}\alpha\beta}\,\frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}\\[2ex]
\text{V)}\ \begin{pmatrix}\alpha\,,\ \beta\\ \gamma\,,\ \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\,,\ 1\\ 1\,,\ 1\end{pmatrix};\quad \varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\alpha\beta+\beta^2-1)}\,\frac{1}{\psi(\tau)}\\[2ex]
\text{VI)}\ \begin{pmatrix}\alpha\,,\ \beta\\ \gamma\,,\ \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1\,,\ 0\\ 1\,,\ 1\end{pmatrix};\quad \varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(-\alpha\beta+\alpha^2-1)}\cdot\frac{1}{\varphi(\tau)},
\end{cases}$$

ove le congruenze s'intendono prese rispetto al modulo 2. Si hanno subito le formole analoghe per $\psi(\tau)$, osservando che

$$\psi(\tau) = \varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right);$$

per tal modo si trovano le formole:

$$
(A^*)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\text{I)} & \psi\left(\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\delta^2-\gamma\delta-1)}\,\psi(\tau) \\[2ex]
\text{II)} & \varphi\left(\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma^2+\gamma\delta-1)}\,\varphi(\tau) \\[2ex]
\text{III)} & \psi\left(\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(\gamma\delta+\delta^2-1)}\,\dfrac{1}{\psi(\tau)} \\[2ex]
\text{IV)} & \varphi\left(\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(-\gamma\delta+\gamma^2-1)}\,\dfrac{1}{\varphi(\tau)} \\[2ex]
\text{V)} & \psi\left(\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}\gamma\delta}\,\dfrac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} \\[2ex]
\text{VI)} & \psi\left(\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e^{\frac{-\pi i}{8}\gamma\delta}\,\dfrac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}\,,
\end{array}
\right.
$$

in corrispondenza alle formole egualmente numerate nella tabella (A).

Da queste formole si trae immediatamente l'enunciato teorema che i sottogruppi riproduttivi di $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ sono perfettamente definiti da congruenze. E invero la tabella (A) dimostra che la funzione modulare $\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k}$ si riproduce per tutte e sole le sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ che soddisfano alle congruenze

$$
(14)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \pmod{2} \\[2ex]
\alpha\beta+\alpha^2 \equiv 1 \pmod{16}\,,
\end{array}
\right.
$$

la quale ultima può anche surrogarsi colle due seguenti

$$
(15)\qquad \left\{
\begin{array}{ll}
\beta \equiv 0 \pmod{16} & \text{con } \alpha \equiv \pm 1 \pmod{8} \\
\beta \equiv 8 \pmod{16} & \text{con } \alpha \equiv \pm 3 \pmod{8}\,.
\end{array}
\right.
$$

Quanto al sottogruppo riproduttivo di $\psi(\tau)$, esso non è altro che il trasformato del precedente per mezzo della sostituzione $T = \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix}$ e può definirsi analogamente per congruenze.

Capitolo XVII.

Equazioni modulari per l'invariante assoluto e per la funzione modulare $\sqrt[4]{k}$.— Metodo di Hermite per la risoluzione dell'equazione generale di 5.° grado.

§. 183.

Considerazioni preliminari.

Una delle più importanti proprietà delle funzioni modulari è di dar luogo alle così dette *equazioni modulari*, che possono considerarsi sia come formole di moltiplicazione, sia come formole di divisione dell'argomento per un numero intero n e, più in generale, come formole di trasformazione di ordine n.

Già al §. 168 abbiamo dimostrato l'esistenza dell'equazione modulare per l'invariante assoluto $J(\tau)$, deducendola dalle formole di trasformazione della funzione ellittica $\wp u$. Ci proponiamo ora di stabilire in modo più diretto l'esistenza e le proprietà delle equazioni modulari, fondandoci unicamente sulle proprietà delle funzioni modulari.

Dobbiamo per ciò in primo luogo ritornare allo sviluppo di $J(\tau)$ per potenze di

$$q = e^{\pi i \tau},$$

che già al §. 119 abbiamo visto possedere la forma

$$J(\tau) = \frac{A}{q^2} + a_0 + a_1 q^2 + a_2 q^4 + \ldots + a_n q^{2n} + \ldots,$$

per precisare la natura dei coefficienti in questo sviluppo. A tale scopo ricorriamo all'espressione di $J(\tau)$ per k^2:

$$J(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(1-k^2 k'^2)^3}{(k^2 k'^2)^2},$$

osservando che secondo le formole (XVI) pag. 413 si ha

$$\sqrt{k} = 2 q^{\frac{1}{4}} \frac{\sum_1^\infty q^{n(n+1)}}{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}} = 2 q^{\frac{1}{4}} \frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}.$$

Eseguendo il quoziente delle due serie del secondo membro, col determinare i coefficienti di questo quoziente colle note formole ricorrenti, vediamo subito che questi coefficienti sono tutti numeri interi e si ha

$$\sqrt{k} = 2\, q^{\frac{1}{4}} (1 - 2\, q + 5\, q^2 - 10\, q^3 + \ldots .)$$

da cui

$$k^2 = 2^4 q\, (1 - 8\, q + 44\, q^2 - 152\, q^3 + \ldots .)$$

$$k'^2 = 1 - 16\, q + 128\, q^2 - 704\, q^3 + \ldots ,$$

e sostituendo in $J(\tau)$ avremo

$$J(\tau) = \frac{1}{12^3 q^2} (1 + a_1 q^2 + a_2 q^4 + a_3 q^6 + \ldots .) ,$$

dove le a sono tutti numeri interi [1] e la serie contiene solo le potenze pari di q, a causa della formola $J(\tau+1) = J(\tau)$. In ciò che segue, per evitare coefficienti frazionarii, è conveniente sostituire a $J(\tau)$, come invariante assoluto, la funzione

$$j(\tau) = 12^3\, J(\tau) ,$$

che non ne differisce che pel fattore numerico 12^3; avremo così per lo sviluppo di $j(\tau)$

$$\text{(I)} \qquad j(\tau) = \frac{1}{q^2} + 744\, q^2 + 196844\, q^4 + \ldots . ,$$

gli altri coefficienti della serie ordinata per potenze di q^2 essendo numeri interi. Ricordiamo che questo sviluppo vale per tutto il campo d'esistenza della funzione, cioè in tutto il semipiano positivo τ.

A fondamento delle ricerche sulle equazioni modulari porremo le osservazioni seguenti. Supponiamo che sia $F(\tau)$ una funzione *finita, continua e monodroma* di τ in tutto il semipiano positivo e che inoltre $F(\tau)$ rimanga, come $j(\tau)$, invariata per *tutte* le sostituzioni del gruppo modulare Γ. Allora $F(\tau)$, considerata come funzione di $j(\tau)$, sarà monodroma in j, perchè per ogni cammino chiuso descritto da j nel suo piano, τ subisce appunto una sostituzione del gruppo modulare. Poichè inoltre per ogni valore finito di j la funzione $F(\tau) = \Theta(j)$ per ipotesi è finita, sarà in generale $\Theta(j)$ una trascendente intera in j; e viceversa è chiaro che

---

[1] In particolare si ha

$$a_1 = 744 \ , \ a_2 = 196884.$$

ogni trascendente intera di j è una funzione finita, continua e monodroma di τ nel semipiano positivo e rimane invariata per qualunque sostituzione del gruppo modulare. Ma supponiamo di più che la funzione $\Theta(j)$ si comporti per $j=\infty$ come una potenza intera e positiva j^n di j, che cioè $\frac{\Theta(j)}{j^n}$ converga per $j=\infty$ verso un valore determinato e finito; ne concluderemo subito che $\Theta(j)$ è un polinomio razionale intero in j. Si ha dunque il teorema fondamentale:

Ogni funzione finita, continua e monodroma di τ nel semipiano positivo, che si riproduca per ogni sostituzione $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ del gruppo modulare, e per $j=\infty$ si comporti come una potenza di j, è una funzione razionale intera dell'argomento j.

§. 184.

Esistenza dell'equazione modulare per $j(\tau)$.

Perveniamo direttamente alla teoria delle equazioni modulari proponendoci il seguente problema: *Come cangia $j(\tau)$ quando sull'argomento τ si eseguisca una sostituzione lineare*

$$\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

a coefficienti interi e a determinante

$$a\,d-b\,c=n$$

positivo[1] *qualunque?*

Per risolvere questo problema cerchiamo in primo luogo quanti valori distinti assume

$$j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$

per tutte le possibili sostituzioni $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ col medesimo determinante n.

---

[1] Il determinante $ad-bc$ deve essere positivo, affinchè $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ resti nel semipiano positivo.

Se $\begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix}$ è un'altra sostituzione col medesimo determinante n, avremo

$$j\left(\frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'}\right)=j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$

allora e allora soltanto che si abbia

$$\frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'}=\frac{\alpha\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}+\beta}{\gamma\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}+\delta}$$

cioè

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\alpha+c\beta, & b\alpha+d\beta \\ a\gamma+c\delta, & b\gamma+d\delta \end{pmatrix},$$

essendo $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ una qualunque sostituzione del gruppo modulare. Diremo allora che le due sostituzioni $\begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ sono equivalenti. Con un processo affatto analogo a quello usato nei §§. 162, 163 si vedrà che ad ogni sostituzione $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ se ne potrà sostituire una equivalente del tipo normale

$$\begin{pmatrix} \sigma, & \nu \\ 0, & \dfrac{n}{\sigma} \end{pmatrix},$$

dove σ è un divisore di n e ν è determinato soltanto rispetto al modulo n. Ne risulta che il numero dei valori distinti di

$$j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right),$$

per tutte le possibili sostituzioni $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ di un dato determinante, è sempre un numero finito. E siccome valgono anche qui i teoremi del §. 164 rispetto alla composizione delle sostituzioni, potremo limitare la nostra ricerca al caso in cui n sia eguale ad un numero primo p. Allora i valori distinti di

$$j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right),\quad ad-bc=p$$

saranno $p+1$ soltanto e cioè

$$(3) \qquad j(p\tau)\,,\; j\left(\frac{\tau}{p}\right),\; j\left(\frac{\tau+1}{p}\right)\ldots j\left(\frac{\tau+p-1}{p}\right).$$

D'altronde per una sostituzione qualunque $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ del gruppo modulare, eseguita su τ, questi $p+1$ valori di $j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ si permutano semplicemente fra loro, poichè da

$$j\left(\frac{a\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}+b}{c\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}+d}\right)=j\left(\frac{a'\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}+b'}{c'\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}+d'}\right)$$

segue anche

$$j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=j\left(\frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'}\right).$$

Ora, essendo r un intero positivo qualunque, poniamo

$$(4) \qquad F_r(\tau)=j^r(p\tau)+j^r\left(\frac{\tau}{p}\right)+j^r\left(\frac{\tau+1}{p}\right)+\ldots+j^r\left(\frac{\tau+p-1}{p}\right)$$

e sarà evidentemente $F_r(\tau)$ una funzione finita, continua e monodroma di τ in tutto il semipiano positivo, che resterà inoltre invariata per tutte le sostituzioni del gruppo modulare, avendo queste per effetto di permutare fra loro i termini della somma nel secondo membro della (4). Ma dallo sviluppo in serie (I) per $j(\tau)$ abbiamo

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} j(p\tau)=q^{-2p}(1+744\,q^{2p}+196844\,q^{4p}+\ldots)\\ j\left(\dfrac{\tau+\nu}{p}\right)=\varepsilon^{-\nu}\,q^{-\frac{2}{p}}\left(1+744\,\varepsilon^{\nu}\,q^{\frac{2}{p}}+196844\,\varepsilon^{2\nu}q^{\frac{4}{p}}+\ldots\right)\end{cases}$$

$$\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

onde si vede che $F_r(\tau)$ per $j=\infty$ si comporta come j^{rp}, cioè il quoziente

$$\frac{F_r(\tau)}{j^{rp}}$$

ha un limite finito e diverso da zero per $j=\infty$. Dunque $F_r(\tau)$ è un

polinomio razionale intero in j (§. 183). Se poniamo

$$j_\infty = j(p\tau)\ ,\ j_0 = j\left(\frac{\tau}{p}\right)\ ,\ j_1 = j\left(\frac{\tau+1}{p}\right)\ldots j_{p-1} = j\left(\frac{\tau+(p-1)}{p}\right)$$

e costruiamo il polinomio di grado $p+1$ nella variabile j'

$$(j'-j_\infty)\ (j'-j_0)\ (j'-j_1)\ldots(j'-j_{p-1}) = j'^{p+1} + \alpha_1 j'^p + \alpha_2 j'^{p-1} + \ldots + \alpha_p j' + \alpha_{p+1}\ ,$$

i coefficienti α saranno polinomii razionali interi in $j(\tau)$. Siamo così direttamente arrivati all'esistenza dell'equazione modulare col teorema:

Se $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ *è una sostituzione a coefficienti interi e a determinante primo p, fra le funzioni di* τ

$$j' = j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\ ,\ j = j(\tau)$$

sussiste un'equazione algebrica di grado $p+1$ *in* j':

$$\text{(III)} \qquad f(j', j) = j'^{p+1} + \alpha_1 j'^p + \alpha_2 j'^{p-1} + \ldots + \alpha_p j' + \alpha_{p+1} = 0\ ,$$

i cui coefficienti α *sono polinomii razionali interi in* j.

Questa è l'equazione modulare fra j, j' e le sue $p+1$ radici in j' sono

$$j_\infty = j(p\tau)\ ,\ j_0 = j\left(\frac{\tau}{p}\right)\ ,\ j_1 = j\left(\frac{\tau+1}{p}\right)\ldots j_{p-1} = j\left(\frac{\tau+(p-1)}{p}\right).$$

§. 185.

Gruppo di monodromia dell'equazione modulare.

Vogliamo ora determinare direttamente il gruppo di monodromia dell'equazione modulare, confermando così i risultati ottenuti alla fine del §. 168. Dobbiamo per ciò far percorrere a $j(\tau)$ nel suo piano complesso un cammino chiuso qualunque ed esaminare come si permutano corrispondentemente i $p+1$ rami

$$j_\infty\ ,\ j_0\ ,\ j_1\ldots j_{p-1}$$

della funzione algebrica j' di j. Un cammino chiuso qualsiasi, descritto da $j(\tau)$, produce su τ una sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ del gruppo modulare e

basterà per ciò esaminare l'effetto sui $p+1$ rami delle sostituzioni elementari

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Per la prima $j_\infty = j(p\tau)$ non cangia, mentre

$$j_\nu = j\left(\frac{\tau+\nu}{p}\right)$$

si cangia in

$$j\left(\frac{\tau+\nu+1}{p}\right) = j_{\nu+1};$$

dunque gli indici ν dei $p+1$ rami subiscono la sostituzione lineare

a) $$\nu' \equiv \nu + 1 \pmod{p}$$

Per l'altra sostituzione

$$\tau' = -\frac{1}{\tau}$$

i due rami

$$j_\infty = j(p\tau), \quad j_0 = j\left(\frac{\tau}{p}\right)$$

si permutano fra loro, giacchè

$$j\left(-\frac{p}{\tau}\right) = j\left(\frac{\tau}{p}\right), \quad j\left(-\frac{1}{p\tau}\right) = j(p\tau).$$

E se indichiamo con $j_{\nu'}$ il ramo in cui va j_ν per ν diverso da 0, ∞, dovremo avere

$$j\left(\frac{-\frac{1}{\tau}+\nu}{p}\right) = j\left(\frac{\nu\tau-1}{p\tau}\right) = j\left(\frac{\tau+\nu'}{p}\right),$$

e perciò

$$\frac{\nu\tau-1}{p\tau} = \frac{\alpha\frac{\tau+\nu'}{p}+\beta}{\gamma\frac{\tau+\nu'}{p}+\delta} = \frac{\alpha\tau+(\alpha\nu'+\beta p)}{\gamma\tau+(\gamma\nu'+\delta p)},$$

essendo $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ una sostituzione del gruppo modulare. Il paragone dei

coefficienti in queste due sostituzioni lineari a determinante p dà

$$\alpha = \pm \nu \ , \quad \alpha \nu' + \beta p = \mp 1 \ ,$$

onde

$$\nu \nu' \equiv -1 \pmod{p} \ ,$$

formola che vale anche per $\nu = 0, \infty$ come sopra si è visto. Dunque la sostituzione $\begin{pmatrix} 0 \ , & 1 \\ -1 \ , & 0 \end{pmatrix}$ produce sugli indici dei rami la sostituzione

$$b) \qquad \nu' \equiv -\frac{1}{\nu} \pmod{p}.$$

E siccome colle due sostituzioni $a)$, $b)$ si genera, come sappiamo, l'intero gruppo modulare (mod p)

$$\text{(IV)} \qquad \nu' \equiv \frac{a\nu + b}{c\nu + d} \pmod{p} \ , \quad ad - bc \equiv 1 \ ,$$

si conclude che questo è il gruppo richiesto di monodromia.

Del resto è anche facile vedere quale sostituzione del gruppo di monodromia (IV) si produce per una sostituzione qualsiasi $\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$ del gruppo modulare. Supposto invero

$$j_\nu \left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \right) = j_{\nu'}(\tau) \ ,$$

avremo

$$j \left(\frac{\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} + \nu}{p} \right) = j \left(\frac{(\alpha + \gamma\nu)\tau + (\beta + \delta\nu)}{p\gamma\tau + p\delta} \right) = j \left(\frac{\tau + \nu'}{p} \right) ,$$

quindi

$$\frac{(\alpha + \gamma\nu)\tau + (\beta + \delta\nu)}{p\gamma\tau + p\delta} = \frac{\alpha' \frac{\tau + \nu'}{p} + \beta'}{\gamma' \frac{\tau + \nu'}{p} + \delta'} = \frac{\alpha'\tau + (\alpha'\nu' + \beta' p)}{\gamma'\tau + (\gamma'\nu' + \delta' p)} \ ,$$

essendo $\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$ un'altra sostituzione del gruppo modulare. Se ne trae

$$\alpha + \gamma\nu = \pm \alpha' \ , \quad \beta + \delta\nu = \pm (\alpha'\nu' + \beta' p)$$

onde

$$\nu' \equiv \frac{\delta\nu+\beta}{\gamma\nu+\alpha} \pmod{p}$$

e se ne conclude: *La sostituzione* $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ *del gruppo modulare produce sui* $p+1$ *indici dei rami della funzione algebrica* j' *la sostituzione*

$$\nu' \equiv \frac{\delta\nu+\beta}{\gamma\nu+\alpha} \pmod{p}. \tag{5}$$

Siccome questo gruppo sui $p+1$ rami è transitivo (anzi doppiamente transitivo), si vede che: *L'equazione modulare* (III) *è irriducibile.*

§. 186.

Diramazione di j' rapporto a j e poligono fondamentale di $j\left(\frac{\tau}{p}\right)$.

Mediante i risultati ora conseguiti è facile studiare l'effettiva diramazione della funzione modulare j' rapporto a j, ciò che ci fornirà un esempio semplice ed istruttivo della teoria generale al §. 175. Se $j=a$ è punto qualunque del piano complesso j, e τ_1 il punto corrispondente del triangolo fondamentale, per un giro di j attorno ad a, supposto dapprima $a \neq 0, 12^3, \infty$, sopra una piccola curva chiusa, τ girerà una sola volta attorno a τ_1 e ciascun ramo j_ν tornerà col proprio valore, cioè non vi sarà diramazione di j'. Se poi $a=0$, ovvero $a=12^3$, o infine $a=\infty$, avremo corrispondentemente

$$\tau_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \tau_1 = i, \quad \tau_1 = \infty$$

e un giro positivo di j attorno ad a produrrà rispettivamente le sostituzioni

$$-\frac{\tau+1}{\tau}, \quad -\frac{1}{\tau}, \quad \tau+1$$

sopra τ. Avremo quindi sugli indici ν dei rami di j' rispettivamente le sostituzioni:

$$\alpha)\ \nu' \equiv \frac{1}{1-\nu}, \quad \beta)\ \nu' \equiv -\frac{1}{\nu}, \quad \gamma)\ \nu' \equiv \nu+1 \pmod{p}.$$

La α) è a periodo 3 e quindi i rami si permutano attorno a $j=0$ tre a tre e potranno restare eventualmente isolati due rami corrispondenti alle radici della congruenza

$$\nu^2-\nu+1\equiv 0 \pmod p$$

ossia

$$(2\nu-1)^2\equiv -3 \pmod p.$$

Dunque quando $\left(\frac{-3}{p}\right)=+1$, cioè p è della forma $6r+1$, due rami restano isolati e i rimanenti $p-1=6r$ si permutano 3 a 3; che se invece p è della forma $6r+5$, allora tutti i $p+1$ rami si permutano 3 a 3. Nel caso particolare $p=3$ il solo ramo

$$j_2=j\left(\frac{\tau+2}{3}\right)$$

resta isolato, permutandosi ciclicamente i tre restanti.

Similmente dalla β) si vede che in $j=12^3$ tutti i rami si scambiano 2 a 2, se p è della forma $4n+3$; e invece due dei rami corrono isolati, se p è della forma $4n+1$.

In fine per $j=\infty$ abbiamo in ogni caso un ramo isolato, mentre i p rimanenti si scambiano ciclicamente.

Volendo rappresentare la superficie Riemanniana, corrispondente all'equazione algebrica modulare (III), basterà costruire, secondo il §. 177, il poligono fondamentale di una delle sue radici, p. e. di

$$j\left(\frac{\tau}{p}\right),$$

ed esaminare la distribuzione dei suoi lati in coppie di lati coniugati. Ora dalla (5) risulta subito che le sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ del gruppo modulare Γ, che lasciano invariata la funzione modulare $j\left(\frac{\tau}{p}\right)$, sono tutte e sole quelle per le quali $\beta\equiv 0 \pmod p$. Queste formano in Γ un sottogruppo congruenziale G d'indice finito $=p+1$, che è il sottogruppo riproduttivo di $j\left(\frac{\tau}{p}\right)$. I $p+1$ valori distinti che assume $j_0=j\left(\frac{\tau}{p}\right)$ per le sostituzioni di Γ sono, come sappiamo

$$j(p\tau)=j\left(-\frac{1}{p\tau}\right),\ j\left(\frac{\tau+\nu}{p}\right),$$

percorrendo ν un sistema completo di resti (mod p), onde si rileva che un sistema completo di $p+1$ sostituzioni di Γ, non equivalenti rispetto a G, è dato da

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{\nu} = \begin{pmatrix} 1, & \nu \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

ove ν percorra un sistema completo di resti (mod p). Ogni altra sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ di Γ sarà equivalente, rispetto a G, ad una di queste, cioè sarà

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b, & a \\ -d, & c \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & r \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & ra+b \\ c, & rc+d \end{pmatrix},$$

essendo $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ una sostituzione di G, che ha cioè $b \equiv 0$ (mod p). Si vede di qui che sono equivalenti a T tutte quelle sostituzioni che hanno $\alpha \equiv 0$ (mod p), che se invece $\alpha \not\equiv 0$ (mod p) sarà $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ equivalente a quella S^r per la quale

$$r\alpha \equiv \beta \pmod{p}.$$

Ciò premesso ed escludendo il caso di $p=2$, che si tratta subito direttamente, supponiamo p dispari e prendiamo per i $p+1$ rappresentanti le $p+1$ sostituzioni

$$\left(S^{-\frac{p-1}{2}} \ldots S^{-2}, S^{-1}, 1, S, S^2 \ldots S^{\frac{p-1}{2}}\right), T.$$

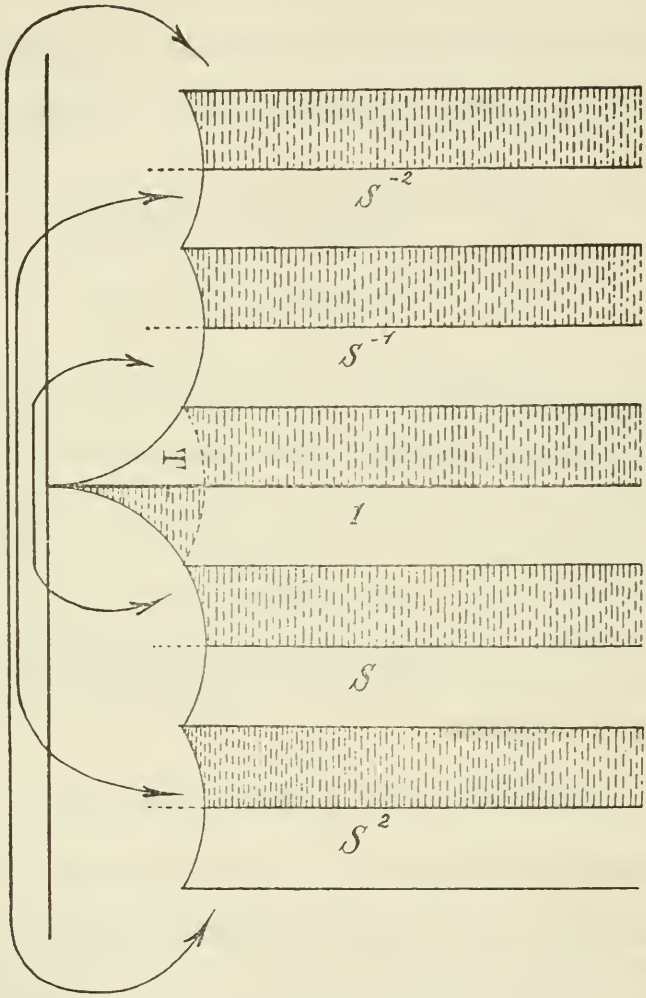
Il poligono fondamentale di $j\left(\frac{\tau}{p}\right)$, cioè del sottogruppo $\beta \equiv 0$ mod p), potrà costituirsi coi $p+1$ (doppii) triangoli omonimi della rete modulare, come è rappresentato nella figura 17 a pag. 496 per $p=5$. Per ricercare poi come sono coniugati due a due i lati e quali sono le sostituzioni (generatrici del sottogruppo G) che li congiungono, basta applicare la regola generale del §. 177 ed osservare che al triangolo S^r ($r \not\equiv 0$) del poligono è aderente pel lato (circolare) esterno il triangolo

$$TS^r = \begin{pmatrix} r, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix},$$

il quale, secondo la regola sopra notata, è relativamente equivalente a quel triangolo $S^{r'}$ del poligono pel quale si ha

$$rr' \equiv -1 \pmod{p},$$

Fig. 17.



e per la corrispondente sostituzione che ne congiunge i lati si trova subito

$$\tau' = \frac{r'\tau - kp}{\tau - r}, \tag{6}$$

supposto

$$rr' + 1 = kp.$$

Al triangolo ST aderente a T per un lato esterno, essendo

$$ST = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix},$$

è equivalente T stesso, i cui due lati esterni sono dunque coniugati e la sostituzione che li congiunge è

$$\tau' = \frac{\tau}{\tau+1},$$

che del resto si ottiene come caso particolare dalla (6) ove si faccia $r'=1$, $r=-1$. Restano soltanto i due lati rettilinei del poligono, che sono congiunti dalla sostituzione

$$S^p = \begin{pmatrix} 1, & p \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Così adunque: L'intero sottogruppo G, definito dalla congruenza $\beta \equiv 0 \pmod{p}$, è generato dalle sostituzioni

$$\begin{pmatrix} 1, & p \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r', & -p\dfrac{rr'+1}{p} \\ 1, & -r \end{pmatrix}, \quad rr' \equiv -1 \pmod{p},$$

percorrendo r, r' le coppie incongrue che danno $rr' \equiv -1 \pmod{p}$. La superficie Riemanniana chiusa, che si ottiene saldando i lati coniugati, offre naturalmente la diramazione già studiata al principio del presente §. Si potrà facilmente, colla nota formola della teoria della connessione, calcolare il *genere* della superficie Riemanniana e si vedrà che esso è zero solo nei casi

$$p = 3, 5, 7, 13 \text{ [1]}.$$

---

[1] Per calcolare il genere P della superficie Riemanniana si ha la formola già citata al §. 92

$$(\alpha) \qquad P = \sum \frac{r-1}{2} - m + 1,$$

ove m è il numero dei fogli (qui $= p+1$), r è il numero dei fogli congiunti ciclicamente in ogni punto di diramazione. Basta ora distinguere i quattro casi

§. 187.

Proprietà dei coefficienti dell'equazione modulare.

Andiamo ora a studiare più da vicino i polinomii $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}$ razionali interi in j, che sono i coefficienti dell'equazione modulare (III) §. 184. In primo luogo, tenendo conto degli sviluppi (I), (II) in serie di potenze di q^2, facilmente valutiamo il loro grado. Intanto, avendosi

$$-\alpha_1 = j_\infty + j_0 + j_1 + \ldots + j_{p-1},$$

nello sviluppo di α_1 per potenze di q^2 la più alta potenza negativa, che vi comparisce, è q^{-2p} che vi ha il coefficiente -1; onde per la (I) α_1 è un polinomio di grado p in j e la potenza j^p vi comparisce col coefficiente -1.

Con considerazioni analoghe si vede che i gradi di $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ rispetto a j non superano p. Quanto all'ultimo

$$\alpha_{p+1} = j_\infty\, j_0\, j_1 \ldots j_{p-1}\ ^{(1)},$$

esso contiene nello sviluppo in potenze di q^2 come più alta potenza negativa $q^{-2(p+1)}$ col coefficiente $+1$ e si ha per ciò

$$\alpha_{p+1} = j^{p+1} + b_1 j^p + b_2 j^{p-1} \ldots,$$

essendo le b coefficienti numerici. Da tuttociò si raccoglie che l'equazione modulare (III) può scriversi sotto la forma

$$\text{(V)} \qquad (j'^p - j)\,(j' - j^p) = \sum_{r,s}^{0\ldots p} c_{rs}\, j'^r j^s,$$

---

che può offrire p rispetto al modulo 12, cioè i quattro casi:

$$p = 12n+1\,,\ 12n+5\,,\ 12n+7\,,\ 12n+11$$

ed applicando la formola (α) si trova ordinatamente

$$\mathrm{P} = n-1\,,\ n\,,\ n\,,\ n+1\,,$$

ciò che dà immediatamente i risultati enunciati del testo. Ulteriormente si ha $\mathrm{P}=1$ per

$$p = 11\,,\ 17\,,\ 19 \text{ ecc.}$$

(1) Si suppone p impari.

dove $c_{r,s}$ è un coefficiente numerico e, per quanto sopra è detto

$$c_{p,p} = 0 .$$

Dimostriamo ora l'importante proprietà: *Tutti i coefficienti* c_{rs} *dell'equazione modulare* (V) *sono numeri interi divisibili per* p.

In primo luogo dimostriamo che l'*equazione modulare* (V)

$$f(j', j) = (j'^p - j)(j' - j^p) = \sum_{r,s}^{0\ldots p} c_{r,s}\, j'^r j^s = 0$$

è simmetrica in j', j. Si ha infatti, qualunque sia τ

$$f(j(p\tau), j(\tau)) = 0 ,$$

e cangiando τ in $\frac{\tau}{p}$

$$f\left(j(\tau), j\left(\frac{\tau}{p}\right)\right) = 0 ,$$

cioè

$$f(j, j') = 0 ,$$

ossia

$$j^{p+1} + j'^{p+1} - j'^p j^p - j j' - \sum c_{rs}\, j^r j'^s = 0 .$$

Se questa non coincidesse colla precedente, sottraendole si avrebbe per j' un'equazione di grado inferiore a $p+1$, ciò che è contrario alla dimostrata irriducibilità dell'equazione modulare; dunque si ha

$$c_{rs} = c_{sr}$$

e la (V) può scriversi

$$\text{(V*)} \qquad (j'^p - j)(j' - j^p) = \sum_{r=0}^{r=p} \sum_{s=0}^{s=r-1} c_{rs}\,(j'^r j^s + j^r j'^s) + \sum_{s=0}^{s=p-1} c_{ss}\, j'^s j^s .$$

Per determinare i coefficienti c_{rs} osserviamo che questa equazione diventa un'identità se vi si fa

$$j = j(\tau) = q^{-2} \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s\, q^{2s}$$

$$j' = j(p\tau) = q^{-2p} \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s\, q^{2ps} .$$

Ora, per la legge di formazione della potenza p^{ma} di una serie, risulta di qui

$$j^p = q^{-2p} \sum_s a_s^p\, q^{2ps} + p\, q^{-2(p-1)} \sum_s a'_s\, q^{2s} ,$$

dove le a' sono, come le a, numeri interi.

Ma si ha, pel teorema di Fermat

$$a_s^p \equiv a_s \pmod{p} \ , \quad a_0 = 1$$

e la precedente può scriversi

$$j^p = q^{-2p} \sum_s a_s q^{2ps} + p q^{-2(p-1)} \sum_s b_s q^{2s} ,$$

essendo le b altri numeri interi, onde risulta

$$(j'^p - j)\ (j' - j^p) = p q^{-2(p^2-p-1)} \sum_s d_s q^{2s},$$

ove le d sono nuovamente numeri interi.

Sostituiamo questo sviluppo nel primo membro della (V), ponendo nel secondo membro per

$$j'^r j^s + j^r j'^s \ , \quad j'^s j^s$$

i loro sviluppi per potenze di q^2, che cominciano rispettivamente coi termini

$$q^{-2(pr+s)} \ , \quad q^{-2s(p+1)},$$

aventi per coefficiente $+1$. Nel secondo membro della (V*) non possono comparire due termini colla stessa più alta potenza di q; poichè da

$$pr+s = pr'+s'$$

segue $s = s'$, $r = r'$. Paragonando adunque dalle due parti i coefficienti delle potenze negative di q, cominciando dalla più alta, avremo ogni volta delle equazioni lineari nelle c, delle quali ciascuna conterrà una sola nuova incognita c_{rs} col coefficiente $= 1$ [1]. Dunque tutti i coefficienti c sono numeri interi divisibili per p c. d. d.

---

[1] Se si scrivono i coefficienti c_{rs} nel quadro

$$\begin{array}{lllll}
c_{p-1\,,\,p-1} & & & & \\
c_{p-1\,,\,p-2} & c_{p-2\,,\,p-2} & & & \\
c_{p-1\,,\,p-3} & c_{p-2\,,\,p-3} & c_{p-3\,,\,p-3} & & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
c_{p-1\,,\,1} & c_{p-2\,,\,1} & c_{p-3\,,\,1} & \cdots\ c_{11} & \\
c_{p-1\,,\,0} & c_{p-2\,,\,0} & c_{p-3\,,\,0} & \cdots\ c_{10} & c_{00}\,,
\end{array}$$

è chiaro che verranno così successivamente determinati i coefficienti della 1.ª colonna (dall'alto in basso) poi quelli della 2.ª della 3.ª ecc.

§. 188.

Gruppo algebrico dell'equazione modulare.

Ora che conosciamo la natura dei coefficienti dell'equazione modulare (V) possiamo completare la ricerca del §. 185, ove abbiamo dimostrato che il gruppo di monodromia di questa equazione contiene le $\frac{p(p^2-1)}{2}$ sostituzioni sugli indici

$$\text{(IV)} \qquad \nu' \equiv \frac{a\nu+b}{c\nu+d}, \quad ad-bc \equiv 1 \pmod{p},$$

e determinare anche il suo gruppo algebrico o di Galois *nel campo dei numeri razionali.* Il gruppo algebrico deve contenere quello di monodromia come sottogruppo invariante e si sa dalla teoria dei gruppi di sostituzioni che il più ampio gruppo, contenente come sottogruppo invariante il gruppo (IV), è quello formato da tutte le possibili sostituzioni lineari sugli indici

$$\nu' \equiv \frac{a\nu+b}{c\nu+d} \pmod{p}, \quad ad-bc \not\equiv 0.$$

In questo gruppo $H_{p(p^2-1)}$ di $p(p^2-1)$ sostituzioni il gruppo di monodromia (IV), che indichiamo con $H'_{\frac{p(p^2-1)}{2}}$, è contenuto come sottogruppo invariante d'indice 2; e si noti che H′ contiene tutte le sostituzioni pari di H. Pertanto il gruppo algebrico dell'equazione modulare coinciderà o con H′, o con H. Per decidere quale dei due casi abbia luogo, consideriamo la radice quadrata del discriminante D dell'equazione modulare

$$\text{(7)} \qquad \sqrt{D} = \prod_{\nu=0}^{\nu=p-1} (j_\infty - j_\nu) \prod_{\nu,\nu'} (j_\nu - j_{\nu'}),$$

il secondo prodotto essendo esteso a tutte le $\frac{p(p-1)}{2}$ combinazioni degli indici ν, ν' presi nella serie $0, 1, 2 \ldots p-1$ colla condizione $\nu < \nu'$. Questa è una funzione razionale (intera) delle radici dell'equazione modulare, invariabile per le sostituzioni di H′, non per quelle di H, ed è quindi un polinomio razionale intero in j con coefficienti numerici. Se il

gruppo algebrico coincide con H′, questi coefficienti saranno numeri razionali e nel caso opposto invece dovranno contenere un'irrazionalità quadratica $\sqrt{A}$, con A numero razionale, la cui aggiunta abbasserà il gruppo algebrico al gruppo di monodromia. Poniamo

$$\sqrt{D} = \Theta(j),$$

essendo Θ un polinomio razionale intero in j e calcoliamo il coefficiente a della più alta potenza di j in Θ. Sostituiamo per ciò nel secondo membro della (7) per j_∞, j_ν i loro sviluppi (II) in serie:

$$j_\infty = q^{-2p}(1+a_1 q^{2p}+\ldots), \quad j_\nu = \varepsilon^{-\nu} q^{-\frac{2}{p}}\left(1+a_1 \varepsilon^{\nu} q^{\frac{2}{p}}+\ldots\right)$$

$$\left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}\right)$$

e vedremo subito che la più alta potenza di q^{-1} nel 2.° membro è data da

$$q^{-(2p^2+p-1)}$$

ed il suo coefficiente sarà

$$a = \prod_{\nu,\nu'} (\varepsilon^{\nu} - \varepsilon^{\nu'}). \tag{8}$$

Dunque $\Theta(j)$ è di grado $p^2 + \frac{p-1}{2}$ in j e si ha

$$\Theta(j) = a j^{p^2+\frac{p-1}{2}} + \ldots,$$

i termini seguenti essendo di grado inferiore a $p^2 + \frac{p-1}{2}$ e il coefficiente a avendo il valore (8). Si osservi ora che

$$a^2 = \prod_{\nu,\nu'} (\varepsilon^{\nu} - \varepsilon^{\nu'})^2$$

non è altro che il discriminante dell'equazione

$$x^p - 1 = 0,$$

e per ciò, indicando con s_r la somma delle potenze r^{me} delle sue radici,

si ha

$$a^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{p-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p-1} & s_p & \dots & s_{2(p-1)} \end{vmatrix}$$

e poichè $s_r = 1 + \varepsilon^r + \varepsilon^{2r} \dots + \varepsilon^{(p-1)r}$ è eguale a p se $r \equiv 0 \pmod p$, e invece

$$s_r = \frac{\varepsilon^{pr} - 1}{\varepsilon^r - 1} = 0 \quad \text{per } r \not\equiv 0 \pmod p,$$

avremo

$$a^2 = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^p$$

e quindi

$$a = p^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}.$$

Se ne conclude adunque: *Il gruppo algebrico dell'equazione modulare è il gruppo lineare totale*

$$\nu' \equiv \frac{a\nu + b}{c\nu + d} \pmod p, \quad ad - bc \not\equiv 0.$$

L'irrazionalità numerica, la cui aggiunta lo abbassa al gruppo di monodromia, è data da $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$.

§. 189.

Equazione modulare per $\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k}$ e sue radici.

Il processo indicato al §. 187 pel calcolo dei coefficienti $c_{r,s}$ potrebbe servire a dare le effettive equazioni modulari per $j(\tau)$. Ma i valori effettivi dei coefficienti c_{rs} sono numeri tanto grandi, anche per piccoli valori di p, che i calcoli indicati riuscirebbero laboriosissimi. Soltanto per $p=2$ è calcolata la forma *esplicita* dell'equazione modulare (da Stephen

Smith) e pei casi $p = 3, 5, 7, 13$, in cui il genere della superficie Riemanniana riesce zero, il Klein, utilizzando il modo di diramazione della superficie di Riemann, ha dato delle formole che implicitamente determinano le corrispondenti equazioni modulari [1].

Assai più semplici riescono le equazioni modulari per altre funzioni (modulari) teoricamente più complicate di $j(\tau)$ [2]. Così è per le equazioni modulari della funzione

$$\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k},$$

che furono le prime calcolate (da Jacobi e Sohncke). Vogliamo ora trattare di queste particolari equazioni modulari e costruirle effettivamente pei valori più bassi di p.

Partiamo dalla seguente osservazione generale. Se $\Phi(\tau)$ è una qualsiasi funzione modulare, legata a $J(\tau)$ dall'equazione algebrica

$$F(\Phi(\tau), J(\tau)) = 0,$$

cangiando in questa τ in $\frac{\tau}{n}$ avremo

$$F\left(\Phi\left(\frac{\tau}{n}\right), J\left(\frac{\tau}{n}\right)\right) = 0.$$

Ora se prendiamo l'equazione modulare

$$f\left(J(\tau), J\left(\frac{\tau}{n}\right)\right) = 0$$

---

[1] *Math. Annalen.* Bd. XIV.

[2] P. e. nel caso $p = 2$ noi abbiamo potuto stabilire, studiando la trasformazione di Landen (§. 170), la semplice formola

$$k(\tau) = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}}{1 + \sqrt{1 - k^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}},$$

che è una forma dell'equazione modulare per $p = 2$. È manifesto che la relazione fra

$$J(\tau) = \frac{4}{27}\,\frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4(1 - k^2)^2} \text{ e } J\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

è molto più complicata.

e fra le tre equazioni scritte eliminiamo $J(\tau)$, $J\left(\frac{\tau}{n}\right)$, avremo evidentemente una relazione della forma

$$\Psi\left(\Phi(\tau)\ ,\ \Phi\left(\frac{\tau}{n}\right)\right)=0,$$

essendo Ψ una funzione razionale intera (irriducibile) dei suoi due argomenti. Questa si dirà l'equazione modulare per $\Phi(\tau)$.

Consideriamo dunque in particolare la funzione modulare

$$\varphi(\tau)=\sqrt[4]{k}$$

e, supponendo senz'altro p numero primo dispari, ricerchiamo le proprietà dell'equazione modulare

$$\text{(VI)}\qquad f\left(\varphi(\tau)\ ,\ \varphi\left(\frac{\tau}{p}\right)\right)=0,$$

che, ponendo

$$u=\varphi(\tau)\ ,\quad v=\varphi\left(\frac{\tau}{p}\right),$$

scriveremo anche

$$\text{(VI*)}\qquad f(u,v)=0,$$

indicando $f(u,v)$ una funzione razionale, intera ed irriducibile dei due argomenti u, v.

Cerchiamo in primo luogo il grado della (VI) in $\varphi\left(\frac{\tau}{p}\right)$ e le sue radici. Per ciò bisogna far descrivere a $\varphi(\tau)$ nel suo piano complesso tutti i possibili cammini chiusi ed osservare quanti e quali valori diversi assume $\varphi\left(\frac{\tau}{p}\right)$. Per far descrivere a $\varphi(\tau)$ un cammino chiuso, bisogna cangiare τ secondo una sostituzione $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ del sottogruppo Λ di $\varphi(\tau)$ §. 182, e deve essere quindi

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\pmod 2\ ,\quad \alpha\beta+\alpha^2\equiv 1\pmod{16}.$$

Il valore nel quale $\varphi\left(\frac{\tau}{p}\right)$ si cangierà con continuità sarà

$$\varphi\left(\frac{1}{p}\ \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right),$$

sicchè è da vedersi quanti valori distinti assume questa espressione percorrendo $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ le sostituzioni del detto sottogruppo Λ. Ora si avrà

$$\varphi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{p\gamma\tau+p\delta}\right)=\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right),$$

con a, b, c, d numeri interi ed $ad-bc=p$, tutte le volte che si abbia

$$\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ p\gamma, & p\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\alpha_1+p\gamma\beta_1, & \beta\alpha_1+p\delta\beta_1\\ \alpha\gamma_1+p\gamma\delta_1, & \beta\gamma_1+p\delta\delta_1\end{pmatrix},$$

essendo

$$\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}$$

un'altra sostituzione di Λ, cioè

$$\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\pmod{2},\quad \alpha_1^2+\alpha_1\beta_1\equiv 1\pmod{16}.$$

Approfittando dell'indeterminazione di $\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}$, possiamo ridurre $\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}$ ad una forma normale nel modo seguente:

1.° caso — Supponiamo dapprima che sia

$$\alpha\not\equiv 0\pmod{p};$$

prendasi

$$\gamma_1=-p\gamma\equiv 0\pmod{2},\quad \delta_1=\alpha\equiv 1\pmod{2},$$

onde risulterà

$$c=\alpha\gamma_1+p\gamma\delta_1=0,$$

indi si determini α_1, β_1 in guisa che sia

$$\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1=\alpha\alpha_1+p\gamma\beta_1=1$$

e inoltre sia soddisfatta la congruenza

$$\alpha_1^2+\alpha_1\beta_1\equiv 1\pmod{16},$$

ciò che con considerazioni elementari si vede esser sempre possibile.

Allora la sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \delta_1 \end{pmatrix}$ appartiene al sottogruppo Λ e si ha

$$\begin{cases} a = \alpha\alpha_1 + p\gamma\beta_1 = 1 \ , & b = \alpha_1\beta + p\delta\beta_1 \\ c = 0 \ , & d = \beta\gamma_1 + p\delta\delta_1 = p \ , \end{cases}$$

onde, essendo

$$a^2 + ab \equiv 1 \pmod{16},$$

risulta

$$b \equiv 0 \pmod{16}.$$

Ponendo

$$b = 16\nu,$$

avremo dunque

$$\varphi\left(\frac{1}{p}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \varphi\left(\frac{\tau+16\nu}{p}\right). \tag{9}$$

Osserviamo poi che b e quindi ν è perfettamente determinato (mod p), poichè si ha per le precedenti

$$b \equiv \alpha_1\beta \pmod{p} \ , \quad \alpha_1\alpha \equiv 1 \pmod{p},$$

onde

$$\alpha b \equiv \beta \pmod{p},$$

cioè

$$16\alpha\nu \equiv \beta \pmod{p}.$$

I valori distinti dell'espressione (9) corrispondono ai valori incongrui di ν (mod p) e si ottengono così le p radici dell'equazione modulare (VI)

$$\varphi\left(\frac{\tau}{p}\right), \ \varphi\left(\frac{\tau+16}{p}\right), \ \varphi\left(\frac{\tau+2\,.\,16}{p}\right) \ldots \varphi\left(\frac{\tau+16\,(p-1)}{p}\right),$$

corrispondenti all'ipotesi $\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$.

2.° caso — Sia ora $\alpha \equiv 0 \pmod{p}$. Allora si può scrivere:

$$\varphi\left(\frac{1}{p}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \varphi\left(\frac{\frac{\alpha}{p}\,.\,p\tau+\beta}{\gamma\,.\,p\tau+p\delta}\right)$$

e siccome $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{p}, & \beta \\ \gamma, & p\delta \end{pmatrix}$ è una sostituzione $\equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ (mod 2), per le for-

mole (A) §. 182, avremo

$$\varphi\left(\frac{1}{p}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=e^{\frac{\pi i}{8}\left(\frac{\alpha^2}{p^2}+\frac{\alpha\beta}{p}-1\right)}\varphi(p\tau).$$

Ma, essendo p impari, si ha

$$p^2\equiv 1 \pmod 8\ ,\quad p^4\equiv 1 \pmod{16}$$

e però

$$\frac{\alpha^2}{p^2}+\frac{\alpha\beta}{p}-1\equiv p^2(\alpha^2+p\alpha\beta)-1 \pmod{16},$$

e siccome

$$\alpha^2+p\alpha\beta=\alpha^2+\alpha\beta+(p-1)\alpha\beta\equiv 1 \pmod{16}$$

avremo

$$e^{\frac{\pi i}{8}\left(\frac{\alpha^2}{p^2}+\frac{\alpha\beta}{p}-1\right)}=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=\left(\frac{2}{p}\right).$$

Si conclude quindi che, quando $\alpha\equiv 0 \pmod p$, si ha

$$\varphi\left(\frac{1}{p}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\varphi(p\tau),$$

che è una nuova ed ultima radice dell'equazione modulare (VI). Abbiamo così dimostrato il teorema:

L'equazione modulare (VI) *è del grado* $p+1$ *in* $v=\varphi\left(\frac{\tau}{p}\right)$ *e le sue* $p+1$ *radici, per un valore dato di* $u=\varphi(\tau)$, *sono date dalle espressioni*

$$v_\infty=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\varphi(p\tau)\ ,\quad v_0=\varphi\left(\frac{\tau}{p}\right)\ ,\quad v_1=\varphi\left(\frac{\tau+16}{p}\right)\ldots\ v_r=\varphi\left(\frac{\tau+16r}{p}\right)$$
$$\ldots\ v_{p-1}=\varphi\left(\frac{\tau+16(p-1)}{p}\right).$$

§. 190.

Gruppo di monodromia ed algebrico dell'equazione modulare

$$\text{(VI*)}\quad f(u,v)=0.$$

Dimostriamo ora che *il gruppo di monodromia dell'equazione modulare* (VI*) *è precisamente lo stesso che quello dell'equazione modulare per l'invariante assoluto* (§. 185).

Per fare descrivere ad $u = \varphi(\tau)$, nel suo piano complesso, un cammino chiuso dobbiamo cangiare τ in

$$\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},$$

essendo $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ una sostituzione del sottogruppo Λ di $\varphi(\tau)$, cioè

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \pmod 2$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta \equiv 1 \pmod{16}.$$

Ora i $p+1$ rami di v

$$v_\infty = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \varphi(p\tau), \quad v_\nu = \varphi\left(\frac{\tau+16\nu}{p}\right)$$

si permutano fra loro nello stesso modo di

$$j(p\tau), \quad j\left(\frac{\tau+16\nu}{p}\right)$$

e, supposto quindi che v_ν si cangi in $v_{\nu'}$, si avrà per la (5) §. 185

$$16\nu' \equiv \frac{\delta \,.\, 16\nu+\beta}{\gamma \,.\, 16\nu+\alpha} \pmod p \tag{10}$$

che, determinando b dalla congruenza

$$16b \equiv \beta \pmod p$$

e ponendo

$$a = \delta, \quad c = 16\gamma, \quad d = \alpha,$$

ha la forma

$$\nu' \equiv \frac{a\nu+b}{c\nu+d}, \quad ad-bc \equiv 1 \pmod p \tag{11}$$

del gruppo di monodromia per l'invariante assoluto. È poi facile vedere che qualunque sostituzione (11) si trova nel gruppo di monodromia di $f(u, v)$, per il che basta dimostrare che vi si trovano le due elementari

$$\nu' \equiv \nu + 1, \quad \nu' \equiv -\frac{1}{\nu} \pmod p.$$

Ora la prima si ottiene subito, facendo

$$\alpha = 1 \ , \ \beta = 16 \ , \ \gamma = 0 \ , \ \delta = 1$$

e per la seconda basterà prendere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ p. e. in guisa che soddisfino le congruenze

$$\begin{cases} \alpha \equiv 0 \pmod{p} \ , \ \beta \equiv 16 \pmod{p} \ , \ 16\gamma \equiv -1 \pmod{p} \ , \ \delta \equiv 0 \pmod{p} \\ \alpha \equiv 1 \pmod{8} \ , \ \beta \equiv 0 \pmod{16} \ , \quad \gamma \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

e l'eguaglianza $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

A tale scopo prendiamo

$$\alpha = p\alpha' \ , \ \beta = 16\beta' \ , \ \gamma = 2\gamma' \ , \ \delta = p\delta'$$

e dovremo determinare $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ in guisa che soddisfino le congruenze

$$p\alpha' \equiv 1 \pmod{8} \ , \ \beta' \equiv 1 \pmod{p} \ , \ 32\gamma' \equiv -1 \pmod{p}$$

e l'eguaglianza

$$p^2\alpha'\delta' - 32\beta'\gamma' = 1 \tag{12}$$

che include, a causa di $32\gamma' \equiv -1 \pmod{p}$, la congruenza $\beta' \equiv 1 \pmod{p}$. Possiamo scegliere α', γ' in guisa che soddisfino le congruenze superiori

$$p\alpha' \equiv 1 \pmod{8} \ , \ 32\gamma' \equiv -1 \pmod{p}$$

e *siano inoltre primi fra loro* e allora la (12) è risolubile in numeri interi δ', β' c. d. d.

Apparirà dalle ricerche seguenti (§. 191) che anche nell'equazione modulare $f(u, v) = 0$ i coefficienti numerici sono tutti interi, onde si pone la questione quale sia il gruppo algebrico di questa equazione modulare *nel campo dei numeri razionali.* Con considerazioni perfettamente analoghe a quelle del §. 188 si dimostra che il gruppo algebrico è ancora il gruppo lineare totale

$$v' \equiv \frac{av+b}{cv+d} \quad (ad - bc \not\equiv 0 \pmod{p})$$

e l'irrazionalità numerica, la cui aggiunta lo abbassa al gruppo di monodromia, è data da $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$.

§. 191.

Proprietà della equazione modulare $f(u, v) = 0$.

Dimostriamo ora alcune proprietà dell'equazione modulare (VI*), che ne faciliteranno la costruzione effettiva.

Scriviamo l'equazione modulare, ordinata per le potenze di v, nel modo seguente:

$$\text{(VII)} \qquad v^{p+1} + B_1 v^p + B_2 v^{p-1} + \ldots + B_p v + B_{p+1} = 0 ,$$

ove le B sono funzioni razionali in u e stabiliamo le successive proprietà:

1.ª proprietà: I coefficienti B *sono polinomii razionali interi in* u.

Per dimostrarlo basta osservare che nessuna delle $p+1$ radici della (VII)

$$v_\infty = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \varphi(p\tau) \ , \ v_\nu = \varphi\left(\frac{\tau + 16\nu}{p}\right)$$

può diventare infinita, se tale non diventa anche u. E infatti, per quanto si è visto al §. 180, affinchè v_∞ o v_ν diventino infinite bisogna che l'argomento $p\tau$ o $\frac{\tau + 16\nu}{p}$ acquisti un valore razionale $\frac{a}{b}$ con a, b impari; ma allora anche τ acquista un tale valore e $u = \varphi(\tau)$ diventa pure infinita.

2.ª proprietà: L'ultimo coefficiente B_{p+1} *dell'equazione modulare è dato da*

$$B_{p+1} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} u^{p+1}.$$

Si osservi per ciò che le radici della equazione modulare si annullano soltanto quando l'argomento

$$p\tau \quad \text{o} \quad \frac{\tau + 16\nu}{p}$$

è un numero razionale della forma $\frac{a}{b}$ con $(a, b) \equiv (1, 0) \pmod 2$ (§. 180); ma allora avendo τ la medesima forma, anche u si annulla. Ne segue che B_{p+1} consta di una sola potenza di u, sia

$$B_{p+1} = A u^r.$$

Ora si ha

$$(13) \qquad B_{p+1} = v_\infty v_0 v_1 \ldots v_{p-1} = A u^r,$$

e per determinare l'esponente r ed il coefficiente A basta sviluppare dall'una parte e dall'altra per potenze di q secondo la formola

$$u = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} (1 - q + 2 q^2 - 3 q^3 + \ldots),$$

che ponendo

$$q^{\frac{1}{8}} = Q,$$

si scrive

$$(14) \qquad u = \sqrt{2}\, Q \{1 - Q^8 + 2 Q^{16} - 3 Q^{24} + \ldots\}.$$

Per gli sviluppi di v_∞, v_ν ne deduciamo quindi

$$(15) \quad \begin{cases} v_\infty = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \varphi(p\tau) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \sqrt{2}\, Q^p (1 - Q^{8p} + 2 Q^{16p} + \ldots) \\ v_\nu = \varphi\left(\frac{\tau + 16\nu}{p}\right) = \varepsilon^\nu \sqrt{2}\, Q^{\frac{1}{p}} \left(1 - \varepsilon^{8\nu} Q^{\frac{8}{p}} + 2 \varepsilon^{16\nu} Q^{\frac{16}{p}} + \ldots\right). \end{cases}$$

Sostituendo nella (13) e paragonando le potenze più basse di Q ne risulta appunto

$$r = p + 1 \quad , \quad A = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

3.ª proprietà: Ciascun polinomio B_s *può porsi sotto la forma*

$$B_s = u^{r_s} A_s (u^8)$$

dove r_s *è il minimo resto positivo del prodotto* ps (mod 8) *e* A_s *è razionale intero in* u^8.

Suppongasi che nel polinomio B_s figuri il termine

$$a u^r;$$

questo, sviluppato per potenze di Q, dà per termine colla minima potenza di Q

$$a\, 2^{\frac{r}{2}} Q^r$$

e tutte le altre potenze di Q provenienti da quel termine hanno esponenti $\equiv r$ (mod 8).

Ora si ha

$$B_s = (-1)^s \sum v_\infty v_0 v_1 \ldots v_{s-2},$$

la somma essendo estesa alle combinazioni s ad s delle radici $v_\infty, v_0 \ldots v_{p-1}$. Sostituendo nel secondo membro gli sviluppi (15), tutte le potenze di Q hanno esponenti dell'una o dell'altra delle due forme

$$p + \frac{s-1}{p} + 8kp + \frac{8k'}{p}, \quad \frac{s+8k}{p} \quad \text{(con } k, k' \text{ interi)};$$

e dovendo queste potenze trovare le loro equivalenti negli sviluppi dei varii termini au^r di B_s, nè potendo darsi che per gli sviluppi di due o più di tali termini si elidano completamente le potenze di Q, si avrà necessariamente una delle due congruenze:

$$pr \equiv p^2 + s - 1, \text{ ovvero } pr \equiv s \pmod 8,$$

cioè in ogni caso, poichè $p^2 \equiv 1 \pmod 8$

$$r \equiv ps \pmod 8,$$

e però

$$r = r_s + 8m \quad (m \text{ intero}).$$

4.ª *proprietà: L'equazione modulare non muta, cangiando rispettivamente* u, v *in* $v, (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} u$.

Si ha invero identicamente

$$f\left(\varphi(\tau), (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \varphi(p\tau)\right) = 0$$

e quindi anche

$$f\left(\varphi\left(\frac{\tau}{p}\right), (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \varphi(\tau)\right) = 0;$$

dunque l'equazione

$$f\left(v, (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} u\right) = 0$$

ha a comune colla $f(u, v) = 0$, che è irriducibile, la radice v_0 e però le due equazioni, salvo il segno $(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$, coincidono. Si rileva di qui in particolare che l'equazione (VII) è del grado $p+1$ in u, come in v, e i coefficienti B salgono *al massimo* al grado p in u.

5.ª proprietà: L'equazione modulare non muta, cangiando u, v rispettivamente in $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, e moltiplicando l'equazione per

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} u^{p+1} v^{p+1}.$$

Dall'identità

$$f\left(\varphi(\tau), \varphi\left(\frac{\tau}{p}\right)\right) = 0,$$

cangiando τ in $\frac{\tau}{\tau+1}$, coll'osservare che si ha (pag. 483, (A))

$$\varphi\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right) = \frac{1}{\varphi(\tau)}, \quad \varphi\left(\frac{\tau}{p(\tau+1)}\right) = \varphi\left(\frac{\frac{\tau}{p}}{p.\frac{\tau}{p}+1}\right) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{\tau}{p}\right)},$$

risulta

$$f\left(\frac{1}{\varphi(\tau)}, \frac{1}{\varphi\left(\frac{\tau}{p}\right)}\right) = 0,$$

onde

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} u^{p+1} v^{p+1} . f\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right)$$

deve coincidere con $f(u, v)$.

6.ª proprietà: Se nell'equazione modulare si pone $u = 1$, una delle radici diventa eguale a $+1$ e le rimanenti p a $(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

Pongasi $\tau = -\frac{1}{\tau_1}$ e si avrà

$$u = \varphi(\tau) = \psi(\tau_1);$$

facendo crescere τ_1, per valori puramente immaginarii, all'infinito la u convergerà appunto verso $+1$. Ora abbiamo

$$v_\infty = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \varphi\left(-\frac{p}{\tau_1}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \psi\left(\frac{\tau_1}{p}\right)$$

$$v_0 = \varphi\left(-\frac{1}{p\tau_1}\right) = \psi(p\tau_1),$$

onde v_∞, v_0 convergono rispettivamente verso

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \quad +1.$$

Per ogni altra radice v_ν si ha

$$v_\nu = \varphi\left(\frac{16\nu\tau_1 - 1}{p\tau_1}\right);$$

e se prendiamo due numeri interi a, b tali che sia

$$16\nu a - pc = 1,$$

avremo

$$\frac{16\nu\tau_1 - 1}{p\tau_1} = \frac{c + 16\nu\dfrac{\tau_1 - a}{p}}{a + p\dfrac{\tau_1 - a}{p}}.$$

Facendo inoltre $a \equiv 0 \pmod{16}$

$$a = 16\nu_1,$$

avremo secondo la tabella (A) pag. 483:

$$v_\nu = \varphi\left(\frac{16\nu\tau_1 - 1}{p\tau_1}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(c^2-1)}\,\psi\left(\frac{\tau_1 - a}{p}\right),$$

il che dimostra che v_ν converge verso $(-1)^{\frac{c^2-1}{8}}$ ovvero, essendo $pc \equiv -1$ $\pmod{16}$, verso $(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$, c. d. d.

7.ª proprietà: Nell'equazione modulare figura il termine

$$a\,u\,v,$$

col coefficiente $a = -2^{\frac{p-1}{2}}$.

Se nel primo membro della equazione modulare (VIII)

$$v^{p+1} + B_1 v^p + \ldots B_p v + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} u^{p+1} = 0$$

sostituiamo per u, v gli sviluppi (14), (15)

$$u = \sqrt{2}\,Q\,(1 - 2\,Q^8 + \ldots)$$

$$v = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\sqrt{2}\,Q^p\,(1 - 2\,Q^{8p} + \ldots),$$

debbono annullarsi i varii coefficienti delle potenze di Q. Ma l'ultimo termine porta la potenza

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} (\sqrt{2})^{p+1} Q^{p+1}$$

e questa potenza minima Q^{p+1} non è portata da alcun altro termine, salvo da

$$auv = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} a (\sqrt{2})^2 Q^{p+1} + \ldots ,$$

onde si trae appunto

$$a = -2^{\frac{p-1}{2}} .$$

Per la 5.ª proprietà, segue che nell'equazione modulare il termine $u^p v^p$ vi figura col coefficiente

$$-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} 2^{\frac{p-1}{2}} .$$

§. 192.

Le equazioni modulari per $p = 3, 5, 7, 11$.

Le proprietà ora stabilite per l'equazione modulare bastano già a costruire effettivamente queste equazioni nei casi

$$p = 3, 5, 7, 11 .$$

a) Per $p = 3$ l'equazione modulare, in forza della 3.ª proprietà e della 1.ª, sarà

$$v^4 + a u^3 v^3 + b u v - u^4 = 0$$

e per la 7.ª $a = 2$, $b = -2$, onde si ha

$$(a) \qquad v^4 + 2 u^3 v^3 - 2 u v - u^4 = 0 .$$

Si può dare a questa equazione modulare una notevole forma irrazionale (Legendre). Se la scriviamo sotto le due forme

$$(1 - u^4)\ (1 + v^4) = 1 - u^4 v^4 + 2 u v (1 - u^2 v^2)$$
$$(1 + u^4)\ (1 - v^4) = 1 - u^4 v^4 - 2 u v (1 - u^2 v^2) ,$$

moltiplicando otteniamo

$$(1 - u^8)\ (1 - v^8) = (1 - u^2 v^2)^4$$

e ponendo

$$u^4 = k \ , \quad v^4 = \lambda \ , \quad 1 - u^8 = k'^2 \ , \quad 1 - v^8 = \lambda'^2 \ ,$$

si può scrivere quindi

$$(a^*) \qquad \sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = 1 \, ,$$

che è la forma di Legendre.

b) Sia $p = 5$. — L'equazione modulare, per la 3.ª e 5.ª proprietà, sarà:

$$v^6 + a u^5 v^5 + b u^2 v^4 - b u^4 v^2 - a u v - u^6 = 0$$

e dalla 7.ª avremo $a = 4$, indi dalla 6.ª

$$v^6 + 4 v^5 + b v^4 - b v^2 - 4 v - 1 = (v - 1) \ (v + 1)^5 ,$$

onde $b = 5$ e però

$$(b) \qquad v^6 - u^6 - 4 u v (1 - u^4 v^4) + 5 u^2 v^2 (v^2 - u^2) = 0 \, .$$

c) Sia $p = 7$. — L'equazione modulare sarà

$$v^8 + u^8 + a (u^7 v^7 + u v) + b (u^6 v^6 + u^2 v^2) + c (u^5 v^5 + u^3 v^3) + d u^4 v^4 = 0 \, ,$$

e per la 6.ª proprietà avremo

$$v^8 + a v^7 + b v^6 + c v^5 + d v^4 + c v^3 + b v^2 + a v + 1 = (v - 1)^8 \, ,$$

da cui

$$a = -8 \ , \quad b = 28 \ , \quad c = -56 \ , \quad d = 70$$

e però

$$(c) \quad v^8 - 8 u^7 v^7 + 28 u^6 v^6 - 56 u^5 v^5 + 70 u^4 v^4 - 56 u^3 v^3 + 28 u^2 v^2 - 8 u v + u^8 = 0 .$$

Questa si può scrivere anche

$$(1 - u^8) \ (1 - v^8) = (1 - u v)^8$$

e dà luogo alla forma irrazionale di Gutzlaff

$$(c^*) \qquad \sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} = 1 \, .$$

d) Sia in fine $p = 11$. — Per le proprietà 3ª, 4.ª e 5ª, l'equazione modulare ha la forma seguente:

$$v^{12} + u^3 (a + 2^5 u^8) v^{11} + b u^6 v^{10} + u (-a + d u^8) v^9 + e u^4 v^8 + f u^7 v^7 +$$
$$b u^2 (1 - u^8) v^6 - f u^5 v^5 - e u^8 v^4 + u^3 (-d + a u^8) v^3 - b u^6 v^2 - u (2^5 + a u^8) v - u^{12} = 0 .$$

I coefficienti costanti a, b, d, e, f si determinano subito dalla 6.ª proprietà, secondo la quale, per $u=1$, deve il primo membro ridursi a $(v-1)\,(v+1)^{11}$. Si trova così

$$a=-22\ ,\quad b=44\ ,\quad d=88\ ,\quad e=165\ ,\quad f=132.$$

Osservazioni circa il caso generale. — Nei casi superiori non bastano più le proprietà dell'equazione modulare, descritte al §. 191, per determinare completamente i valori numerici dei coefficienti. In tutti i casi però ci potremo servire del metodo seguente. Scriviamo l'equazione modulare sotto la forma

$$\text{(VII*)}\qquad v^{p+1}+(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}u^{p+1}-(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\,.\,2^{\frac{p-1}{2}}u^p v^p-2^{\frac{p-1}{2}}uv=$$

$$=\sum_{r,s}^{0\ldots p} c_{rs}\,u^r v^s\quad (c_{11}=0,\ c_{pp}=0).$$

Essa dovrà risultare identicamente soddisfatta, quando per u, v si pongano rispettivamente gli sviluppi

$$\begin{cases} u=\sqrt{2}\,Q\,(1-Q^8+2\,Q^{16}+\ldots) \\ v=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\sqrt{2}\,Q^p\,(1-Q^{8p}+2\,Q^{16p}+\ldots), \end{cases}$$

talchè i coefficienti delle varie potenze di Q dovranno eguagliarsi dall'una parte e dall'altra. Ora il termine del 2.º membro

$$c_{rs}\,u^r v^s$$

porta come minima potenza di Q

$$Q^{ps+r}\ ,$$

col coefficiente

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}s}\,(\sqrt{2})^{r+s},$$

e queste minime potenze sono tutte differenti pei vari termini. Inoltre per la 5.ª proprietà si ha, salvo il segno,

$$c_{rs}=c_{p+1-r,\,p+1-s}\ ,$$

onde basta limitarsi a quei valori degli indici r, s pei quali $r+s\leq p+1$. Ma allora, poichè nel 1.º membro tutti i coefficienti sono interi e con-

tengono $2^{\frac{p+1}{2}}$, mentre $r+s \leq p+1$ è in ogni caso pari [1], si conclude: *Tutti i coefficienti* c_{rs} *nell'equazione modulare* (VII*) *sono numeri interi.* In modo analogo a quello tenuto al §. 187, si potrebbe dimostrare ulteriormente che tutti questi coefficienti interi c_{rs} sono divisibili per p.

§. 193.

Abbassamento della equazione di 6.° grado (Notizie storiche).

Galois scoperse e lasciò enunciata una celebre proposizione relativa all'abbassamento delle equazioni modulari per $p = 5, 7, 11$. Queste equazioni, di rispettivi gradi 6, 8, 12, posseggono risolventi di un grado inferiore $= p$. L'esistenza di queste risolventi è dovuta al fatto che il gruppo di monodromia

$$(\alpha) \qquad \nu' \equiv \frac{a\nu + b}{c\nu + d} \quad (ad - bc) \equiv 1) \pmod{p}$$

di $\frac{p(p^2-1)}{2}$ sostituzioni contiene, nei detti casi $p = 5, 7, 11$, sottogruppi d'indice p, ciò che non ha più luogo nei casi superiori. La prima dimostrazione del teorema fu data dal Betti [2]. Soltanto in epoca molto più recente (1881) fu trattata e completamente risoluta dal Gierster [3] la questione di determinare *tutti* i sottogruppi del gruppo (α) e fu così spiegata l'intima ragione per la quale differiscono i casi $p = 5, 7, 11$ dai superiori.

Riconosciuta la possibilità d'abbassamento delle equazioni modulari nei casi indicati, restava da calcolare effettivamente le risolventi che la teoria indicava.

Hermite per il primo, in una celebre memoria del 1858 [4], costruì effettivamente una particolare risolvente di 5.° grado dell'equazione modulare di 6.° e riconobbe che a questa particolare forma poteva ri-

---

[1] Ciò segue dalla 3.ª proprietà, secondo la quale si ha $r \equiv (p+1-s)p \pmod{8}$, indi

$$r + s \equiv 0 \pmod{2}$$

[2] *Annali di Tortolini.* Vol. 3 (1853).

[3] *Math. Annalen.* Bd. 18.

[4] Comptes Rendus t. 46. *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré.*

dursi, risolvendo soltanto equazioni ausiliarie di 2.° e 3.° grado, *la più generale equazione di 5.° grado.* Con ciò fu ottenuta la risoluzione per funzioni ellittiche (modulari) della equazione generale di 5.° grado. Il metodo di Hermite venne perfezionato e trasformato nel seguito specialmente per le ricerche di Kronecker e Brioschi; e in particolare si vide che la risoluzione dell'equazione ausiliaria di 3.° grado si poteva evitare, costruendo altre più convenienti risolventi di 5.° grado dell'equazione modulare.

Noi ci contenteremo qui di esporre il primo metodo di Hermite e rimanderemo per la teoria generale della risoluzione dell'equazione di 5.° grado ai lavori originali di Hermite stesso, Kronecker, Brioschi e in particolare al libro del Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder*, ove la intera teoria è esposta sistematicamente in modo nuovo ed originale.

Per noi si tratta qui in primo luogo, ricorrendo a note proposizioni della teoria dei gruppi, di riconoscere che il gruppo di monodromia dell'equazione modulare di 6.° grado, rappresentato dalla formola

$$\nu' \equiv \frac{a\nu+b}{c\nu+d} \pmod 5 \ , \quad ad-bc \equiv 1 \ ,$$

possiede in effetto sottogruppi d'indice 5 e però esistono risolventi di 5.° grado dell'equazione modulare. Il detto gruppo è infatti semplice e di ordine 60 e per ciò oloedricamente isomorfo col gruppo delle 60 rotazioni dell'icosaedro, ovvero col gruppo alterno su 5 lettere. Ora il gruppo dell'icosaedro contiene cinque sottogruppi tetraedrali d'ordine 12 e quindi d'indice $=5$, ai quali nel gruppo alterno su 5 lettere corrispondono i gruppi alterni su quattro sole delle lettere. Definiamo uno dei cinque detti sottogruppi Γ_{12} del gruppo di monodromia, dando le due sostituzioni elementari di un Γ_{12}

$$(16) \qquad \nu' \equiv -\frac{1}{\nu} \ , \quad \nu' \equiv \frac{\nu+2}{\nu+3} \pmod 5 ,$$

che composte fra loro e colle loro potenze danno appunto luogo a 12 sole sostituzioni distinte, come subito si verifica.

Prendiamo ora una funzione razionale delle 6 radici

$$v_\infty \ , \ v_0 \ , \ v_1 \ , \ v_2 \ , \ v_3 \ , \ v_4$$

dell'equazione modulare, che rimanga invariata per le due sostituzioni elementari (16), cioè per le due

$$(v_0\, v_\infty) \,.\, (v_1\, v_4) \ , \quad (v_0\, v_4\, v_3)\ (v_\infty\, v_1\, v_2) .$$

Una tale funzione è semplicemente la seguente

$$z_0 = (v_\infty - v_0)\ (v_1 - v_4)\ (v_2 - v_3);$$

essa per tutte le sostituzioni del gruppo modulare assume i 5 valori distinti

$$(17)\begin{cases} z_0 = (v_\infty - v_0)\ (v_1 - v_4)\ (v_2 - v_3)\ , \quad z_1 = (v_\infty - v_1)\ (v_2 - v_0)\ (v_3 - v_4) \\ z_2 = (v_\infty - v_2)\ (v_3 - v_1)\ (v_4 - v_3)\ , \quad z_3 = (v_\infty - v_3)\ (v_4 - v_2)\ (v_0 - v_1) \\ \qquad\qquad z_4 = (v_\infty - v_4)\ (v_0 - v_3)\ (v_1 - v_2)\,, \end{cases}$$

che possono compendiarsi nell'unica formola

$$z_\lambda = (v_\infty - v_\lambda)\ (v_{1+\lambda} - v_{4+\lambda})\ (v_{2+\lambda} - v_{3+\lambda})$$
$$\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Le sostituzioni elementari

$$\nu' \equiv \nu + 1\ , \quad \nu' \equiv -\frac{1}{\nu} \pmod 5$$

del gruppo modulare permutano fra loro questi cinque valori e precisamente la prima produce la sostituzione ciclica del 5.° ordine $(z_0\, z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$ e la seconda il prodotto di due trasposizioni

$$(z_1\, z_2)\ (z_3\, z_4)\,,$$

colle quali sostituzioni elementari si genera tutto il gruppo alterno sulle cinque z.

Se ne conclude: *I cinque valori* (17) *sono radici di una risolvente di 5.° grado dell'equazione modulare; il gruppo di questa risolvente è il gruppo alterno sulle cinque radici.*

§. 194.

Costruzione effettiva della risolvente di Hermite.

Per costruire effettivamente la risolvente di Hermite, cominciamo dall'osservare che se nell'equazione modulare

$$v^6 + 4\,u^5 v^5 + 5\,u^2 v^4 - 5\,u^4 v^2 - 4\,u\,v - u^6 = 0$$

si pone

$$w = \frac{v}{u^5}\,,$$

la nuova equazione in w ha coefficienti razionali (non interi) in u^8; e posto quindi

$$W_\lambda = (w_\infty - w_\lambda)\ (w_{1+\lambda} - w_{4+\lambda})\ (w_{2+\lambda} - w_{3+\lambda})$$
$$\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ ,$$

le 5 quantità W_λ sono radici di una risolvente di 5.° grado

$$W^5 + a_1 W^4 + a_2 W^3 + a_3 W^2 + a_4 W + a_5 = 0\ ,$$

con coefficienti razionali in u^8 e poichè si ha

$$z_\lambda = u^{15} W_\lambda\ ,$$

la risolvente di 5.° grado in z avrà la forma

$$(18) \qquad z^5 + B_1 u^7 z^4 + B_2 u^6 z^3 + B_3 u^5 z^2 + B_4 u^4 z + B_5 u^3 = 0\ ,$$

dove i coefficienti B sono funzioni razionali di u^8. Ora, siccome per valori finiti di u le sei v_ν, e quindi anche le cinque z_λ, sono finite, vediamo che *le* B *sono polinomii razionali interi in* u^8.

Per la 5.ª proprietà dell'equazione modulare (§. 191), se si cangia τ in $\frac{\tau}{\tau+1}$, u si cangia in $\frac{1}{u}$ e le radici v_ν nelle loro inverse $\frac{1}{v_{\nu'}}$, salvo l'ordine. Ma vediamo subito come dipende ν' da ν, osservando che per la medesima sostituzione $\begin{pmatrix} 1\ , & 0 \\ 1\ , & 1 \end{pmatrix}$ eseguita su τ deve J_ν cangiarsi in $J_{\nu'}$ [1] e si ha quindi (§, 185)

$$\nu' \equiv \frac{\nu}{\nu+1} \pmod 5\ ,$$

onde

$$v_\infty\ ,\ v_0\ ,\ v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\ ,\ v_4$$

si muteranno rispettivamente in

$$\frac{1}{v_1}\ ,\ \frac{1}{v_0}\ ,\ \frac{1}{v_3}\ ,\ \frac{1}{v_4}\ ,\ \frac{1}{v_2}\ ,\ \frac{1}{v_\infty}$$

e quindi z_0 in

$$\frac{-z_3}{v_\infty\ v_0\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4} = \frac{z_3}{u^6}\ .$$

Dunque la risolvente (18), che è irriducibile, deve rimanere invariata quando vi si cangi u, z rispettivamente in $\frac{1}{u}$, $\frac{z}{u^6}$ e si moltiplichi tutta

---

[1] Si osservi che $J\left(\frac{\tau+16\nu}{5}\right) = J\left(\frac{\tau+\nu}{5}\right) = J_\nu$.

l'equazione per u^{30}, il che dà:

$$z^5 + u^{-1} B_1\left(\frac{1}{u}\right) z^4 + u^6 B_2\left(\frac{1}{u}\right) z^3 + u^{13} B_3\left(\frac{1}{u}\right) z^2 + u^{20} B_4\left(\frac{1}{u}\right) z +$$
$$+ u^{27} B_5\left(\frac{1}{u}\right) = 0,$$

e paragonando colla (18), si ottiene

$$B_1\left(\frac{1}{u}\right) = u^8 B_1(u) \ , \ B_2\left(\frac{1}{u}\right) = B_2(u) \ , \ u^8 B_3\left(\frac{1}{u}\right) = B_3(u)$$
$$u^{16} B_4\left(\frac{1}{u}\right) = B_4(u) \ , \ u^{24} B_5\left(\frac{1}{u}\right) = B_5(u).$$

Queste dimostrano che si ha $B_1 = 0$, B_2 costante mentre B_3, B_4, B_5 sono polinomii reciproci dei rispettivi gradi 1, 2, 3 in u^8. Dunque la (18) avrà la forma

$$z^5 + a u^6 z^3 + b u^5 (1+u^8) z^2 + c u^4 (1+d u^8+u^{16}) \,.\, z + e u^3 (1+f u^8+f u^{16}+u^{24}) = 0 \ ,$$

essendo a, b, c, d, e, f costanti numeriche.

Ora per $u = 1$ tutte cinque le radici z si annullano (§. 191-2.ª) e quindi anche tutti i coefficienti, dopo il primo, della (18).

Se ne trae subito

$$a = 0 \ , \ b = 0 \ , \ d = -2 \ , \ f = -1$$

onde l'equazione diventa

$$(18^*) \qquad z^5 + c u^4 (1-u^8)^2 \,.\, z + e u^3 (1-u^8)^2 \ (1+u^8) = 0$$

e resteranno solo da determinarsi le due costanti c, e. Per ciò serviamoci degli sviluppi (14), (15) §. 192:

$$u = \sqrt{2}\ Q\ (1 - Q^8 + 2\,Q^{16} + \ldots)$$
$$v_\infty = -\sqrt{2}\ Q^5\ (1 - Q^{40} + 2\,Q^{80} + \ldots)$$
$$v_0 = \sqrt{2}\ Q^{\frac{1}{5}} (1 - Q^{\frac{8}{5}} + \ldots)$$
$$v_1 = \varepsilon\sqrt{2}\ Q^{\frac{1}{5}} (1 - \varepsilon^3 Q^{\frac{8}{5}} + \ldots)$$
$$v_2 = \varepsilon^2\sqrt{2}\ Q^{\frac{1}{5}} (1 - \varepsilon\, Q^{\frac{8}{5}} + \ldots)$$
$$v_3 = \varepsilon^3\sqrt{2}\ Q^{\frac{1}{5}} (1 - \varepsilon^4 Q^{\frac{8}{5}} + \ldots)$$
$$v_4 = \varepsilon^4\sqrt{2}\ Q^{\frac{1}{5}} (1 - \varepsilon^2 Q^{\frac{8}{5}} + \ldots)$$

avendo posto

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}.$$

Se si osserva che si ha

$$(\varepsilon - \varepsilon^4)\ (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) = -\sqrt{5},$$

ne risulta per z_0 lo sviluppo

$$z_0 = 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{5}\ Q^{\frac{3}{5}} (1 - Q^{\frac{8}{5}} + \ldots)\ (1 + Q^{\frac{8}{5}} + \ldots)\ (1 + Q^{\frac{8}{5}} + \ldots),$$

ossia

$$z_0 = 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{5}\ Q^{\frac{3}{5}}\ (1 + Q^{\frac{8}{5}} + \ldots),$$

le potenze di $Q^{\frac{1}{5}}$ trascurate entro parentesi essendo la 16ª, 24ª ecc.

Sostituendo nella (18*), col tener conto soltanto delle due più basse potenze di Q che vi compariscono, che sono

$$Q^3\ ,\ Q^{\frac{23}{5}}\ ,$$

avremo l'identità

$$2^{\frac{15}{2}} 5^2 \sqrt{5}\ Q^3 (1 + 5\, Q^{\frac{8}{5}} + \ldots) + 2^{\frac{7}{2}} \sqrt{5}\, c\, .\, Q^{\frac{23}{5}} + \ldots + 2^{\frac{3}{2}}\, e\, Q^3 + \ldots = 0$$

onde si trae

$$c = -2^4\, 5^3\ ,\quad e = -2^6\, 5^2 \sqrt{5}\, .$$

Abbiamo dunque per la forma definitiva della risolvente di Hermite:

(VIII) $$z^5 - 2^4\, 5^3\, u^4 (1 - u^8)^2\, z - 2^6\, 5^2 \sqrt{5}\, u^3 (1 - u^8)^2\ (1 + u^8) = 0\, .$$

Colla trasformazione

$$z = \sqrt[4]{2^4 .\, 5^3 .\, u^4 (1 - u^8)^2}\, .\, y\, ,$$

cioè

$$z = 2 \sqrt[4]{5^3}\, u \sqrt{1 - u^8}\, .\, y\, ,$$

essa diventa:

(VIII*) $$y^5 - y\ - A = 0\, ,$$

dove si è posto

(19) $$A = \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}}\ \frac{1 + u^8}{u^2 \sqrt{(1 - u^8)}} = \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}}\ \frac{1 + k^2}{\sqrt{k(1 - k^2}}\, .$$

Ora Bring, e successivamente Jerrard, hanno dimostrato che ogni equazione di 5.° grado può ridursi, con trasformazioni di Tschirnhaus, risolvendo soltanto equazioni di 2.° e 3.° grado, alla forma (VIII*). Dopo di ciò, se determiniamo il modulo k dalla equazione di 4.° grado

$$\frac{(1+k^2)^2}{k(1-k^2)} = \frac{5^2\sqrt{5}}{4} A^2,$$

cioè

$$k^4 + \frac{5^2\sqrt{5}}{4} A^2 k^3 + 2k^2 - \frac{5^2\sqrt{5}}{4} A^2 k + 1 = 0,$$

che ponendo

$$\mu = k - \frac{1}{k},$$

si riduce alle due successive di 2.° grado

$$\begin{cases} \mu^2 + \frac{5^2\sqrt{5}}{4} A^2 \mu + 4 = 0 \\ k^2 - \mu k - 1 = 0, \end{cases}$$

avremo ridotto l'equazione generale di 5.° grado alla forma di una risolvente di Hermite e le sue radici si esprimeranno per funzioni ellittiche (modulari). La risoluzione dell'equazione di 5.° grado è così ridotta alla divisione (o moltiplicazione) per 5 dell'argomento della funzione modulare $\varphi(\tau)$, in modo analogo come si ottiene la risoluzione trigonometrica dell'equazione di 3.° grado, riducendola alla trisezione dell'argomento nelle funzioni circolari.

Capitolo XVIII.

Principii della teoria delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa.

§. 195.

Definizione delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa e formole fondamentali.

Nei capitoli precedenti abbiamo studiato quelle proprietà generali delle funzioni ellittiche, e in particolare della $\wp(u|\omega, \omega')$, che conven-

gono a tutte le funzioni ellittiche, comunque siano assegnati i valori particolari 2ω, $2\omega'$ dei periodi. Ma vi ha un'importante classe di funzioni ellittiche che, per la natura speciale dei loro periodi (o meglio del loro rapporto $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$), vengono inoltre a godere di singolari proprietà speciali. È questa la classe delle funzioni ellittiche *a moltiplicazione complessa*, che per primo Abel considerò, lasciando enunciate alcune loro proprietà fondamentali.

Per opera specialmente di Kronecker e per le ricerche successive di altri matematici (Hermite, Stuart, Pick, Weber, Greenhill ecc.) fu costruita la teoria di questa speciale classe di funzioni ellittiche. Le singolari proprietà aritmetiche di queste particolari funzioni ellittiche e specialmente la loro intima relazione colla teoria delle forme binarie quadratiche secondo Gauss, danno un particolare interesse allo studio di questo ramo nella moderna teoria delle funzioni ellittiche.

Qui noi ci proponiamo soltanto di far conoscere i principii fondamentali della indicata teoria e nella esposizione ci atterremo particolarmente alle memorie di Halphen [1] e Sylow [2] e all'opera di Weber [3].

Perveniamo direttamente alla speciale classe di funzioni ellittiche, che deve ora formare l'oggetto del nostro studio, proponendoci il problema seguente: *Per quali funzioni ellittiche* $\wp(u \mid \omega, \omega')$ *accade che* $\wp(\varepsilon u)$, *essendo* ε *un conveniente fattore costante (moltiplicatore), si esprima razionalmente per* $\wp u$?

Sappiamo che ciò accade per qualunque funzione ellittica $\wp u$, se il moltiplicatore ε è un numero reale intero; ed ora si tratta appunto di vedere se può accadere in altri casi. Siccome, per la formola di omogeneità, si ha

$$\wp(\varepsilon u \mid \omega, \omega') = \frac{1}{\varepsilon^2}\, \wp\left(u \mid \frac{\omega}{\varepsilon}, \frac{\omega'}{\varepsilon}\right),$$

dai principii della teoria della trasformazione (§. 161) risulta che, supposto $\wp(\varepsilon u)$ funzione razionale di $\wp u$, dovranno sussistere relazioni

---

[1] *Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques.* (*Journal de Mathém.* 1889, t. V).

[2] Id. (*Journal de Mathém.* 1887, t. III).

[3] *Elliptische Funtionen und algebraische Zahlen.* (*Braunschweig* - Vieweg. 1891).

della forma

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \omega = a\dfrac{\omega}{\varepsilon} + b\dfrac{\omega'}{\varepsilon} \\ \omega' = c\dfrac{\omega}{\varepsilon} + d\dfrac{\omega'}{\varepsilon}, \end{cases}$$

dove a, b, c, d sono numeri interi e

$$ad - bc = N > 0.$$

Inversamente, se sono soddisfatte relazioni fondamentali della forma (I), sarà $\wp(\varepsilon u)$ una funzione razionale di grado N della $\wp u$. Possiamo scrivere le (I) anche così

$$\text{(I*)} \qquad \begin{cases} (a-\varepsilon)\omega + b\omega' = 0 \\ c\omega + (d-\varepsilon)\omega' = 0, \end{cases}$$

dalle quali risulta che due casi soli possono presentarsi e cioè:

1.° Le (I*) sono identità e però

$$a = d = \varepsilon\ , \quad b = c = 0,$$

e si hanno allora le formole di ordinaria moltiplicazione, che valgono qualunque siano i periodi.

2.° Se le (I) o (I*) non sono identiche, eliminando ε si ha

$$(a\omega + b\omega')\omega' = (c\omega + d\omega')\omega,$$

ossia, ponendo come al solito

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega},$$

$$\text{(II)} \qquad b\tau^2 + (a-d)\tau - c = 0.$$

Eliminando invece $\dfrac{\omega'}{\omega}$ dalle (I*), abbiamo per ε l'equazione di 2.° grado

$$\begin{vmatrix} a-\varepsilon & b \\ c & d-\varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

cioè

$$\text{(II*)} \qquad \varepsilon^2 - (a+d)\varepsilon + (ad - bc) = 0.$$

Il discriminante comune

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a+d)^2 - 4N$$

delle (II), (II*) deve essere negativo, poichè τ è complesso (col coefficiente dell'immaginario positivo), e per ciò il moltiplicatore ε è un numero complesso della forma

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,(a + d + i\sqrt{-\Delta}).$$

Inversamente, se il rapporto τ dei periodi di una funzione ellittica $\wp u$ è radice di un'equazione di 2.° grado a coefficienti interi e a determinante negativo

$$\text{(1)} \qquad P\tau^2 + Q\tau + R = 0\,,$$

ponendo p. e. nelle (I)

$$b = P\ ,\quad a - d = Q\ ,\quad c = -R$$

$$\text{(2)} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\left\{a + d + i\sqrt{-\Delta}\right\},$$

vediamo che $\wp(\varepsilon u)$ si esprimerà per una funzione razionale di $\wp u$ di grado

$$N = ad - bc.$$

Dunque: *Condizione necessaria e sufficiente perchè* $\wp(\varepsilon u)$ *sia funzione razionale di* $\wp u$, *senza che* ε *sia un intero reale, è che il rapporto* τ *dei periodi sia radice di un'equazione* (I) *a coefficienti interi e a determinante negativo. Allora il moltiplicatore* ε *è un numero complesso della forma* (2).

Di qui appunto l'origine del nome di *moltiplicazione complessa.*

Ora notiamo che ci potremo restringere al caso in cui i quattro interi a, b, c, d nelle (I) non hanno alcun divisore comune (eccetto la unità); poichè, se σ è il loro massimo comun divisore e si pone $\varepsilon = \sigma\varepsilon_1$, si vede dalle (I) che già

$$\wp(\varepsilon_1 u)$$

si esprimerà razionalmente per $\wp u$ e successivamente si avrà

$$\wp(\varepsilon u) = \wp(\sigma\,.\,\varepsilon_1 u)$$

colle ordinarie formole di moltiplicazione pel numero σ. Potremo dunque limitarci al caso in cui a, b, c, d sono primi fra loro, cioè al caso delle moltiplicazioni complesse *primitive.* (Cf. §. 164).

§. 196.

Corrispondenza fra le funzioni $\wp u$ a moltiplicazione complessa e le classi delle forme binarie quadratiche. — Moltiplicazioni elementari.

Se $\wp(u|\omega, \omega')$ è una funzione ellittica a moltiplicazione complessa, fra ω, ω' avremo una relazione quadratica della forma

$$A\omega'^2 + 2B\omega\omega' + C\omega^2 = 0,$$

dove A, B, C sono numeri interi *senza divisore comune*. Il primo membro è una forma binaria quadratica (Cf. §. 23)

$$(A, B, C)$$

primitiva, che si dice *di 1.ª specie* se anche A, 2B, C sono primi fra loro, se cioè A, C non sono ambedue pari, e *di 2.ª specie* nel caso opposto. Il *determinante* della forma (che qui prenderemo col segno opposto a quello considerato da Gauss) è dato da

$$D = AC - B^2$$

ed è essenzialmente positivo. Siccome i coefficienti estremi A, C hanno necessariamente il medesimo segno, li supporremo, come è lecito, positivi.

Si noti che per le forme di 2.ª specie, essendo A, C pari, quindi B impari, sarà sempre

$$D \equiv -1 \pmod 4.$$

Una forma primitiva di 1.ª o 2.ª specie

$$(A, B, C)$$

definisce completamente, a meno di un fattore, i periodi e quindi una funzione ellittica $\wp(u|\omega, \omega')$ a moltiplicazione complessa. Ma siccome, senza cangiare la $\wp u$, possiamo eseguire sui periodi una sostituzione lineare, omogenea a coefficienti interi e a determinante 1, così vediamo che le infinite forme

$$(A', B', C')$$

equivalenti alla (A, B, C) (§. 23) e queste soltanto danno luogo alla medesima $\wp u$. Dunque: *Ogni classe di forme binarie quadratiche a deter-*

minante positivo dà una funzione $\wp u$ a moltiplicazione complessa ed inversamente.

Si tratta ora di stabilire per una tale funzione $\wp u$, corrispondente ad una data forma quadratica

$$(A, B, C),$$

le più generali formole di moltiplicazione complessa. Dovendo essere τ radice della equazione

$$A\tau^2 + 2B\tau + C = 0,$$

paragonando colla (II), risulta intanto che dovremo porre

$$b = xA \ , \quad a - d = x.2B \ , \quad c = -xC \ ,$$

essendo x un fattore di proporzionalità che, per la condizione che a, b, c, d siano interi, mentre A, B, C sono primi fra loro, dovrà essere un numero *intero* se (A, B, C) è di 1.ª specie, laddove se (A, B, C) è di 2.ª specie potrà anche essere la metà di un numero intero. Possiamo dunque porre

$$\text{(III)} \qquad b = xA \ , \quad a = xB + y \ , \quad d = -xB + y \ , \quad c = -xC,$$

dove i numeri x, y saranno certamente interi se (A, B, C) è di 1.ª specie e potranno invece essere ambedue la metà di numeri interi dispari se (A, B, C) è di 2.ª specie; in ogni caso però saranno x, y, ovvero $2x, 2y$, primi fra loro, poichè supponiamo la trasformazione $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ primitiva (§. 164).

Dai valori precedenti di a, b, c, d risultano le formole

$$\text{(IV)} \qquad N = ad - bc = Dx^2 + y^2 \ , \quad \Delta = (a+d)^2 - 4N = -4Dx^2$$

$$\text{(V)} \qquad \varepsilon = y + ix\sqrt{D}.$$

In queste formole (III), (IV), (V) possiamo dare a x, y valori qualunque, soddisfacenti alle dette condizioni, e rimanendo sempre la stessa la funzione $\wp u$, varierà il moltiplicatore ε ed il grado

$$N = Dx^2 + y^2$$

della trasformazione. Il valore minimo di questo grado si otterrà evi-

dentemente pei valori seguenti di x, y

$$x = \pm 1 \ , \ y = 0 \quad \text{per una forma di 1.ª specie},$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \ y = \pm \frac{1}{2} \quad \text{per una forma di 2.ª specie},$$

e si avrà rispettivamente nei due casi

$$N = D \ , \ N = \frac{D+1}{4} \ ,$$

e corrispondentemente pel moltiplicatore

$$\varepsilon = i\sqrt{D} \ , \ \varepsilon = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{D}) \, .$$

Le formole corrispondenti, che esprimono

$$\wp(i\sqrt{D} \, . \, u),$$

ovvero

$$\wp\left(\frac{1 + i\sqrt{D}}{2} \, . \, u\right)$$

razionalmente per $\wp u$, si diranno le *formole elementari di moltiplicazione complessa*, perchè tutte le altre formole di moltiplicazione complessa si otterranno da queste elementari e dalle formole ordinarie di addizione e moltiplicazione dell'argomento. E invero ogni altro valore $\bar{\varepsilon}$ del moltiplicatore sarà, per la (V), della forma

$$\bar{\varepsilon} = r + s\,\varepsilon$$

avendo ε il valore elementare $i\sqrt{D}$ o $\frac{1 + i\sqrt{D}}{2}$, con r, s interi ordinarii (sarà cioè un intero complesso nel campo quadratico $(1, \varepsilon)$).

Ma la formola elementare di moltiplicazione complessa ci dà

$$\wp(\varepsilon u) = F(\wp u)$$

e le formole ordinarie di moltiplicazione

$$\wp(r u) = \Phi(\wp u) \ , \ \wp(s\,\varepsilon u) = F(\wp(r u)) = \Phi_1(\wp u) \, ,$$

essendo F, Φ, Φ_1 razionali nel loro argomento. Derivando le precedenti,

abbiamo

$$\begin{cases} \wp'(ru) = \dfrac{1}{r}\,\Phi'(\wp u)\,.\,\wp' u \\ \wp'(s\varepsilon u) = \dfrac{1}{s\varepsilon}\,\Phi'_1(\wp u)\,.\,\wp' u\,; \end{cases}$$

ed ora dalla formola d'addizione

$$\wp(ru+s\varepsilon u) = \frac{(2\wp(ru)\wp(s\varepsilon u)-\frac{1}{2}g_2)(\wp(ru)+\wp(s\varepsilon u))-g_3-\wp'(ru)\wp'(s\varepsilon u)}{2(\wp(ru)-\wp(s\varepsilon u))^2}$$

avremo subito

$$\wp(r+s\varepsilon)u$$

espressa razionalmente per $\wp u$. Ne concludiamo

Le formole elementari di moltiplicazione complessa per la funzione $\wp u$, corrispondente ad una forma (A, B, C) *primitiva, si ottengono dando ai coefficienti* $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ *della trasformazione ed al moltiplicatore* ε *i valori seguenti:*

$$a = \mathrm{B}\ ,\quad b = \mathrm{A}\ ,\quad c = -\mathrm{C}\ ,\quad d = -\mathrm{B}\ ,\quad \mathrm{N} = \mathrm{D}\ ,\quad \varepsilon = i\sqrt{\mathrm{D}}$$

per le forme di 1.ª specie; e invece

$$a = \frac{1}{2}(\mathrm{B}+1)\ ,\quad b = \frac{1}{2}\mathrm{A}\ ,\quad c = -\frac{1}{2}\mathrm{C}\ ,\quad d = \frac{1}{2}(-\mathrm{B}+1)\ ,\quad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{D}+1}{4}$$

$$\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{\mathrm{D}}}{2}$$

per le forme di 2.ª specie.

§. 197.

Formole effettive di moltiplicazione complessa.

Le formole effettive di moltiplicazione complessa, corrispondenti alle formole (I)

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \omega = a\dfrac{\omega}{\varepsilon} + b\dfrac{\omega'}{\varepsilon} \\ \omega' = c\dfrac{\omega}{\varepsilon} + d\dfrac{\omega'}{\varepsilon}\,, \end{cases}$$

dove a, b, c, d sono interi primi fra loro, non sono altro in sostanza che

le formole della trasformazione primitiva

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

d'ordine $N = ad - bc$. Siccome però, al Cap. XIV, noi abbiamo stabilito queste formole nel solo caso di N primo, converrà ora che le deduciamo in modo diretto e nello stesso tempo avremo anche così le formole generali (primitive) di trasformazione per un ordine N qualunque. A tale oggetto cominciamo dallo scrivere le (I) risolute rispetto a $\frac{\omega}{\varepsilon}$, $\frac{\omega'}{\varepsilon}$:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\omega}{\varepsilon} = \dfrac{d\omega - b\omega'}{N} \\ \dfrac{\omega'}{\varepsilon} = \dfrac{-c\omega + a\omega'}{N} \end{cases} \qquad N = ad - bc.$$

Gli infiniti della funzione

$$\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{\varepsilon}, \frac{\omega'}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^2 \wp(\varepsilon u)$$

sono nei punti

$$u_\infty = \frac{2r\omega + 2s\omega'}{\varepsilon} \quad (r, s \text{ interi qualunque}),$$

coi termini d'infinito

$$\frac{1}{(u - u_\infty)^2}.$$

Ora ci conviene in primo luogo dimostrare che i valori u_∞ coincidono con tutti i multipli della parte aliquota

$$\frac{2\tilde{\omega}}{N}$$

di un conveniente periodo $2\tilde{\omega}$. Se consideriamo le (I), (3) come formole della trasformazione $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$, corrispondente alle relazioni

$$\begin{cases} \omega = a\Omega + b\Omega' \\ \omega' = c\Omega + d\Omega', \end{cases}$$

sostituendo ad Ω, Ω' un sistema di semiperiodi equivalenti Ω_1, Ω'_1, po-

tremo dare alla trasformazione la forma normale (§. 163)

$$\begin{cases} \omega = \sigma \Omega_1 \\ \omega' = \xi \Omega_1 + \frac{N}{\sigma} \Omega'_1 , \end{cases}$$

dove σ è un divisore di N, e il numero ξ è determinato $\left(\text{mod } \frac{N}{\sigma}\right)$ e non ha divisore comune con σ e $\frac{N}{\sigma}$. Di qui si trae

$$\Omega_1 = \frac{\frac{N}{\sigma} \cdot \omega}{N} , \quad \Omega'_1 = \frac{\sigma \omega' - \xi \omega}{N} .$$

Sia μ il massimo comun divisore di σ, ξ, che sarà primo con $\frac{N}{\sigma}$, e pongasi

$$\sigma = \mu . \sigma_1 , \quad \xi = \mu . \xi_1 ,$$

onde

$$(4) \qquad \Omega_1 = \frac{\frac{N}{\sigma} \cdot \omega}{N} , \quad \Omega'_1 = \mu . \frac{\sigma_1 \omega' - \xi_1 \omega}{N} .$$

Eseguiamo ora sui periodi 2ω, $2\omega'$ la sostituzione lineare

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 \\ \omega' = \gamma \omega_1 + \omega'_1 , \end{cases}$$

dove γ indica un intero qualunque, e i nuovi periodi $2\omega_1$, $2\omega'_1$ saranno ancora fondamentali. Le (4) diventano

$$\Omega_1 = \frac{\frac{N}{\sigma} \omega_1}{N} , \quad \omega'_1 = \mu . \frac{(\sigma_1 \gamma - \xi_1) \omega_1 + \sigma_1 \omega'_1}{N} .$$

Poniamo $\sigma_1 \gamma - \xi_1 = h$ e scegliamo γ in guisa che h, il quale è primo con σ_1, lo sia anche con $\frac{N}{\sigma}$, ciò che è possibile essendo σ_1, ξ_1 primi fra loro; avremo

$$\Omega_1 = \frac{\frac{N}{\sigma} \omega_1}{N} , \quad \Omega'_1 = \mu . \frac{h \omega_1 + \sigma_1 \omega'_1}{N} .$$

Trascurando multipli di semiperiodi ω_1, ω'_1, possiamo scrivere

$$\Omega'_1 \equiv \mu \frac{h\omega_1 + \sigma_1\left(1 + \rho\frac{N}{\sigma}\right)\omega'_1}{N},$$

essendo ρ un intero arbitrario. Ora prendiamo ρ in guisa che sia $1 + \frac{N}{\sigma}\rho$ multiplo di $h\mu$, ciò che è possibile perchè $\frac{N}{\sigma}$ è primo con $h\mu$, e ponendo

$$1 + \rho\frac{N}{\sigma} = h\mu \,.\, \rho' \quad (\rho' \text{ intero}),$$

$$\tilde{\omega} = \omega_1 + \sigma\rho'\omega'_1,$$

avremo

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dfrac{\frac{N}{\sigma}\omega_1}{N} = \dfrac{\frac{N}{\sigma}(\tilde{\omega} - \sigma\rho'\omega'_1)}{N} \equiv \dfrac{\frac{N}{\sigma}\tilde{\omega}}{N} \\ \Omega'_1 \equiv \dfrac{h\mu\tilde{\omega}}{N}. \end{cases}$$

Le espressioni

$$u_\infty = 2r\Omega_1 + 2s\Omega'_1$$

avranno quindi la forma

$$u_\infty \equiv \left(\frac{N}{\sigma}r + h\mu \,.\, s\right)\frac{2\tilde{\omega}}{N}$$

e il numero $\frac{N}{\sigma}r + h\mu \,.\, s$, essendo $\frac{N}{\sigma}$, $h\mu$ primi fra loro, percorrerà tutti gli interi possibili, cioè u_∞ tutti i multipli di

$$\frac{2\tilde{\omega}}{N} \quad \text{c. d. d.}$$

Risulta di qui che gli infiniti della funzione

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u),$$

che ammette i periodi della $\wp u$, sono di 2.° ordine nei punti incongrui

$$r\frac{2\tilde{\omega}}{N} \quad (r = 0, 1, 1, \ldots N-1),$$

coi termini d'infinito

$$\frac{1}{\left(u - r\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right)^2},$$

e si ha quindi

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \wp u + \sum_{r=1}^{r=N-1} \wp\left(u - r\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right) + C.$$

Per determinare la costante C basta sviluppare dalle due parti per potenze di u, nell'intorno di $u=0$, e paragonando i termini costanti il che dà

$$C = -\sum_{1}^{N-1} \wp\left(r\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right),$$

ne risulta la formola domandata:

$$\text{(VI)} \qquad \varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \wp u + \sum_{r=1}^{r=N-1} \left\{\wp\left(u - r\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right) - \wp\left(r\,.\,\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right)\right\}.$$

§. 198.

Natura dei coefficienti nelle formole di moltiplicazione complessa.

Si tratta ora di convertire il secondo membro della (VI) in una funzione razionale di $\wp u$. Per ciò distinguiamo due casi, secondo che N è dispari o pari.

1.° caso: N *dispari*. — Associando i valori r, $N-r$ di r, la (VI) può scriversi

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \wp u - 2\sum_{s=1}^{s=\frac{N-1}{2}} \wp\left(\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right) + \sum_{s=1}^{s=\frac{N-1}{2}} \left\{\wp\left(u - s\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right) + \wp\left(u + s\,.\,\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right)\right\},$$

da cui per le formole d'addizione

$$\text{(VII)} \qquad \varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \wp u - 2\sum_{s=1}^{s=\frac{N-1}{2}} \wp\left(s\,.\,\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{s=\frac{N-1}{2}} \frac{\left(2\wp u\,\wp\left(s\,.\,\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right) - \frac{1}{2}g_2\right)\left(\wp u + \wp\left(s\,.\,\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right)\right) - g_3}{\left[\wp u - \wp\left(s\,.\,\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right)\right]^2},$$

formola che esprime effettivamente $\wp(\varepsilon u)$ razionalmente per $\wp u$.

2.° caso: N *pari*. — Associando ancora i valori r, $N-r$, resta questa volta isolato il valore $r=\frac{N}{2}$, onde si ha

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \wp u - 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{N}{2}-1} \wp\left(s \cdot \frac{2\tilde{\omega}}{N}\right) + \wp(u-\tilde{\omega}) - \wp\tilde{\omega} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{s=\frac{N}{2}-1} \left[\wp\left(u - s \cdot \frac{2\tilde{\omega}}{N}\right) + \wp\left(u + s \cdot \frac{2\tilde{\omega}}{N}\right)\right].$$

Siccome $\tilde{\omega}$ è un semiperiodo, sarà $\wp\tilde{\omega}$ uno dei tre valori e_1, e_2, e_3, sia e_α, e diciamo e_β, e_γ gli altri due; avremo

$$\wp(u-\tilde{\omega}) - \wp\tilde{\omega} = \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{\wp u - e_\alpha},$$

sicchè la formola (VI) diventa in questo caso:

$$\text{(VII*)} \quad \varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \wp u - 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{N}{2}-1} \wp\left(s \frac{2\tilde{\omega}}{N}\right) + \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{\wp u - e_\alpha} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{s=\frac{N}{2}-1} \frac{\left(2\wp u \wp\left(s \cdot \frac{2\tilde{\omega}}{N}\right) - \frac{1}{2} g_2\right)\left(\wp u + \wp\left(s \frac{2\tilde{\omega}}{N}\right)\right) - g_3}{\left[\wp u - \wp\left(s \cdot \frac{2\tilde{\omega}}{N}\right)\right]^2}.$$

In ambedue i casi risulta

$$\text{(VIII)} \qquad \varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \frac{U(\wp u)}{V(\wp u)},$$

dove U, V sono polinomii razionali interi in $\wp u$, primi fra loro, di grado N il primo, di grado $N-1$ il secondo.

Importa ora che ricerchiamo di quale natura sono i coefficienti di questi polinomii, che già dalle formole stesse risultano razionalmente formati con g_2, g_3 e col valore $\wp\left(\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right)$. Dimostriamo che sussiste l'importante proprietà:

I coefficienti dei polinomii U, V *nella formola di moltiplicazione complessa* (VIII) *sono funzioni razionali intere di* g_2, g_3 *con coefficienti numerici razionali se la forma* (A, B, C) *è di 1.ª specie, ovvero contenenti l'unica irrazionalità* $i\sqrt{D}$ *se la forma è di 2.ª specie*

Pongasi

$$\wp u = y \ , \quad \mathrm{U}(y) = y^{\mathrm{N}} + a_1 y^{\mathrm{N}-1} + a_2 y^{\mathrm{N}-2} + \ldots + a_{\mathrm{N}-1} y + a_{\mathrm{N}} \ ,$$
$$\mathrm{V}(y) = y^{\mathrm{N}-1} + b_1 y^{\mathrm{N}-2} + b_2 y^{\mathrm{N}-3} + \ldots + b_{\mathrm{N}-2} y + b_{\mathrm{N}-1} \ ,$$

e si scriva la (VIII) nel modo seguente:

$$(5) \quad \varepsilon^2 \wp(\varepsilon u)\,[y^{\mathrm{N}-1} + b_1 y^{\mathrm{N}-2} + b_2 y^{\mathrm{N}-3} + \ldots + b_{\mathrm{N}-1}] - [y^{\mathrm{N}} + a_1 y^{\mathrm{N}-1} + \ldots + a_{\mathrm{N}}] = 0 \, .$$

Se svolgiamo in serie di potenze di u, servendoci degli sviluppi

$$\begin{cases} y = \wp u = \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{g_2}{20} u^2 + \dfrac{g_3}{28} u^4 + \dfrac{g_2^2}{2^4 . 3 . 5^2} u^6 + \ldots \\[2ex] \varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{g_2}{20} \varepsilon^4 u^2 + \dfrac{g_3}{28} \varepsilon^6 u^4 + \dfrac{g_2^2}{2^4 . 3 . 5^2} \varepsilon^8 u^6 + \ldots , \end{cases}$$

ed eguagliamo a zero i coefficienti delle varie potenze di u, otteniamo una serie di equazioni lineari nei coefficienti a, b e i coefficienti di queste equazioni sono appunto della natura indicata nell'enunciato del teorema. Ora queste equazioni lineari, qualunque numero se ne prenda, sono sempre fra loro compatibili quando g_2, g_3 abbiano i valori speciali convenienti alla nostra $\wp u$ a moltiplicazione complessa, perchè le a, b sono certamente determinabili in guisa che la (5) risulti identicamente soddisfatta. Ma se lasciamo le a, b indeterminate, il 1.° membro della (5)

$$(5^*) \quad \varepsilon^2 \wp(\varepsilon u)\,[(\wp u)^{\mathrm{N}-1} + b_1 (\wp u)^{\mathrm{N}-2} + \ldots + b_{\mathrm{N}-1}] - [(\wp u)^{\mathrm{N}} + a_1 (\wp u)^{\mathrm{N}-1} + \ldots + a_{\mathrm{N}}]$$

è una funzione ellittica coi periodi $2\omega, 2\omega'$ che ha nell'origine $u = 0$ un infinito d'ordine $2\mathrm{N} - 2$ ed al massimo altri $\mathrm{N} - 1$ infiniti del 2.° ordine nei punti

$$r \frac{2\tilde{\omega}}{\mathrm{N}} \quad (r = 1, 2, 3 \ldots n - 1).$$

Se nello sviluppo (5*) eguagliamo a zero i coefficienti delle potenze

$$\frac{1}{u^{2(\mathrm{N}-1)}} \ , \ \frac{1}{u^{2(\mathrm{N}-2)}} \ldots \frac{1}{u^2} \ , \ u^0 \ , \ u^2 \ , \ u^4 \ldots u^{2(\mathrm{N}-1)}$$

avremo $2\mathrm{N} - 1$ relazioni lineari fra le $2\mathrm{N} - 1$ costanti a, b, che saranno certo compatibili, per quanto precede, se g_2, g_3 hanno i valori che appartengono alla nostra $\wp u$.

Prendendo le a, b in guisa che tali relazioni siano soddisfatte, la funzione ellittica del 1.° membro della (5*) avrà al massimo $2(N-1)$ poli, mentre in $u=0$ avrà un infinitesimo d'ordine $2N$, e però la funzione stessa sarà identicamente nulla, cioè sarà identicamente:

$$\text{(VIII*)} \qquad \varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \frac{(\wp u)^N + a_1 (\wp u)^{N-1} + \ldots + a_N}{(\wp u)^{N-1} + b_1 (\wp u)^{N-2} + \ldots + b_{N-1}} .$$

E siccome non può in questa formola restare arbitraria qualcuna delle a, b, segue che le $2N-1$ relazioni lineari ricordate fra le a, b servono a determinarle completamente, cioè il determinante formato coi coefficienti delle a, b, in quelle $2N-1$ equazioni lineari, è diverso da zero per quei particolari valori di g_2, g_3. Esso è quindi *a fortiori* diverso da zero se lasciamo in quelle $2N-1$ equazioni g_2, g_3 arbitrarii; queste servono adunque ad esprimere nella (VIII*) i coefficienti a, b razionalmente per g_2, g_3.

Un fatto molto importante segue anche da ciò che, oltre g_2, g_3, nelle equazioni lineari che servono a determinare le costanti a, b figurano unicamente il numero N ed il moltiplicatore ε, mentre non vi è alcuna traccia dei coefficienti (A, B, C) della forma cui la nostra funzione ellittica $\wp u$ a moltiplicazione complessa corrisponde. Ne risulta: *La formola* (VIII) *o* (VIII*) *di moltiplicazione complessa dipende solo dal determinante* D *e dalla specie della forma.*

Osserviamo di più che quando $D \equiv -1 \pmod 4$, ed esistono quindi forme di 1.ª e 2.ª specie, converrà sempre cominciare la ricerca dalle forme di 2.ª specie, per la quale il grado N ha il minimo valore $\frac{D+1}{4}$, e si passerà poi alle formole relative alle forme di 1.ª specie, operando una trasformazione di 2.° grado. E infatti, se si considerano le due forme *principali* di 1.ª e 2.ª specie

$$(1, 0, D) \ , \ \left(2, 1, \frac{D+1}{2}\right),$$

e si indicano rispettivamente con τ, τ_1 i rapporti dei periodi, si ha

$$\tau = i\sqrt{D} \ , \ \tau_1 = \frac{-1+i\sqrt{D}}{2}$$

e quindi τ è legato a τ_1 dalla trasformazione di 2.ª grado $\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$:

$$\tau = 2\tau_1 + 1 .$$

§. 199.

Risolubilità per radicali dell'equazione per la divisione dei periodi.

Al §. 116, occupandoci delle funzioni $\wp$ lemniscatiche, che sono appunto le più semplici funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa e corrispondono a $D = 1$, abbiamo dimostrato che l'equazione per la divisione dei periodi è, in questo caso, risolubile per radicali. Questa proprietà compete, come ora dimostreremo, a tutte le funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa, quando dapprima si riguardino come noti (o si aggiungano al campo di razionalità) gli invarianti g_2, g_3.

Sia $\wp$ una funzione ellittica a moltiplicazione complessa, ed ε il moltiplicatore elementare; avremo

$$\wp\left((m+n\varepsilon)u\right) = F(\wp u), \tag{6}$$

essendo m, n due interi qualunque ed F una funzione razionale con coefficienti razionali in g_2, g_3 $i\sqrt{D}$.

Consideriamo ora l'equazione per la divisione dei periodi in un numero qualunque q di parti, che supporremo senz'altro, come è lecito, un numero primo dispari [1]. Se con Ω indichiamo un semiperiodo qualsiasi

$$\Omega = \lambda\omega - \mu\omega', \tag{7}$$

dove λ, μ sono interi non pari insieme, i valori

$$\wp\left(\frac{2(r+s\varepsilon)\Omega}{q}\right) \quad (r, s \text{ interi}) \tag{8}$$

saranno altrettante radici della equazione $\psi_q(y) = 0$ per la divisione dei periodi (§. 114) di grado $\frac{q^2-1}{2}$. Facciamo ora percorrere nella (8) a (r, s) $\frac{q^2-1}{2}$ coppie incongrue fra loro e colle opposte $(-r, -s)$ (mod q), p. e. le seguenti:

$$r = 1, 2, 3, \ldots \frac{q-1}{2}, \text{ con } s = 0$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots q-1, \text{ con } s = 1, 2, 3 \ldots \frac{q-1}{2},$$

---

[1] Del resto le considerazioni che seguono valgono anche per q dispari qualunque.

e dimostriamo che, scegliendo convenientemente λ, μ nella (7), i $\frac{q^2-1}{2}$ corrispondenti valori (8) saranno tutti diseguali, e per ciò saranno tutte le radici di $\psi_q(y)=0$. Se supponiamo infatti

$$\wp\left(\frac{2(r+s\varepsilon)\Omega}{q}\right)=\wp\left(\frac{2(r_1+s_1\varepsilon)\Omega}{q}\right),$$

avremo necessariamente

$$\frac{[r\pm r_1)+(s\pm s_1)\varepsilon]\Omega}{q}=m\omega+n\omega' \quad (m, n \text{ interi}),$$

cioè

$$(r\pm r_1)\ (\lambda\omega-\mu\omega')+(s\pm s_1)\ (\lambda\varepsilon\omega-\mu\varepsilon\omega')=q\,(m\omega+n\omega'),$$

e sostituendo per $\varepsilon\omega$, $\varepsilon\omega'$ i valori

$$\begin{cases}\varepsilon\omega=a\omega+b\omega'\\ \varepsilon\omega'=c\omega+d\omega',\end{cases}$$

dovranno risultare eguali dall'una e dall'altra parte i coefficienti di ω, ω'. Ne seguono le congruenze

$$\left.\begin{aligned}(r\pm r_1)\lambda+(s\pm s_1)\ (\lambda a-\mu c)&\equiv 0\\ (r\pm r_1)\lambda+(s\pm s_1)\ (\lambda b-\mu d)&\equiv 0\end{aligned}\right\}\pmod q,$$

le quali, *non essendo simultaneamente*

$$r\pm r_1\equiv 0\ ,\quad s\pm s_1\equiv 0 \pmod q)\,,$$

richiedono che si abbia

$$\begin{vmatrix}\lambda & \mu c-\lambda a\\ \mu & \lambda b-\mu d\end{vmatrix}\equiv 0 \pmod q,$$

cioè (§. 197)

$$A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2\equiv 0 \pmod q.$$

Ma poichè (A, B, C) è una forma primitiva, risulta da considerazioni elementari che si possono scegliere λ, μ, non simultaneamente pari, in guisa che la precedente congruenza *non* risulti soddisfatta [1]. Scelti λ, μ

---

[1] Se q divide A e C si diano a λ, μ valori non divisibili per q; se poi q non divide p. e. A, si dia a μ un valore divisibile per q, a λ un valore non divisibile. (Cf. DIRICHLET - *Teoria dei numeri,* pag. 227, edizione italiana).

in questa guisa, facendo percorrere nell'espressione (8) ad r, s le indicate $\frac{q^2-1}{2}$ coppie di valori, si avranno tutte le radici di $\psi_q(y) = 0$. Ora prendiamo le formole di moltiplicazione complessa

$$\wp((r + s\,\varepsilon)\,u) = \mathrm{F}\,(\wp u)$$
$$\wp((r_1+s_1\,\varepsilon)\,u) = \mathrm{F}_1\,(\wp u)\,,$$

essendo F, F_1 funzioni razionali della specie descritta. Mutando nella prima formola u in $(r_1+s_1\varepsilon)\,u$, e nella seconda u in $(r+s\varepsilon)\,u$, deduciamo

$$\mathrm{F}\,(\mathrm{F}_1\,(\wp u)) = \mathrm{F}_1\,(\mathrm{F}\,(\wp u))\,.$$

Facendo in particolare $u = \frac{2\,\Omega}{q}$, abbiamo

$$\wp\left(\frac{r+s\,\varepsilon)\,2\,\Omega}{q}\right) = \mathrm{F}\left(\wp\left(\frac{2\,\Omega}{q}\right)\right)$$
$$\wp\left(\frac{(r_1+s_1\,\varepsilon)\,2\,\Omega}{q}\right) = \mathrm{F}_1\left(\wp\left(\frac{2\,\Omega}{q}\right)\right)$$
$$\mathrm{F}\left(\mathrm{F}_1\left(\wp\left(\frac{2\,\Omega}{q}\right)\right)\right) = \mathrm{F}_1\left(\mathrm{F}\left(\wp\left(\frac{2\,\Omega}{q}\right)\right)\right),$$

vediamo adunque che l'equazione $\psi_q(y) = 0$ è in questo caso un'equazione Abeliana (con un gruppo di Galois di sostituzioni permutabili) ed è per ciò risolubile per radicali, come si era asserito.

§. 200.

Equazione algebrica fra g_2, g_3 per le funzioni $\wp$ a moltiplicazione complessa.

Nei §§. precedenti abbiamo riguardato le funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa come definite dal rapporto τ dei periodi, radice di una forma quadratica (A, B, C), e in particolare, nella risoluzione per radicali dell'equazione per la divisione dei periodi, abbiamo considerati come *noti* gli invarianti g_2, g_3. Ora vogliamo occuparci del problema di determinare gli invarianti g_2, g_3, appena sia data la forma (A, B, C) cui la nostra funzione ellittica

$$\wp\,(u\,|\,\omega, \omega')$$

appartiene. Ricordiamo che, assegnato il rapporto τ dei periodi, gli invarianti g_2, g_3 sono determinati soltanto a meno delle potenze λ^4, λ^6 di un fattore di omogeneità λ, e però il problema proposto si riduce essenzialmente a ricercare il valore corrispondente dell'invariante assoluto

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}\,.$$

Riprendendo le considerazioni alla fine del §. 198, facilmente vediamo che:

Gli invarianti g_2, g_3 di una funzione ellittica a moltiplicazione complessa sono legati fra loro da un'equazione algebrica

$$\text{(A)} \qquad \Phi\,(g_2, g_3) = 0$$

a coefficienti interi, dipendente unicamente dal determinante D *e dalla specie della forma* (A, B, C), *cui $\wp u$ appartiene.*

Nel determinare infatti i valori delle $2N-1$ costanti a, b nella (5) noi abbiamo proceduto algebricamente, come se g_2, g_3 fossero arbitrarii. Ora prendendo quante si vogliano delle seguenti equazioni lineari fra le a, b, dopo le prime $2N-1$, che ci hanno servito a determinare le a, b in funzione di g_2, g_3, è certo che esse sono compatibili colle precedenti *per quei particolari valori di g_2, g_3* che appartengono alla nostra $\wp u$; ma è impossibile che ciò accada *lasciando g_2, g_3 arbitrarii*, altrimenti la formola

$$\varepsilon^2\, \wp\,(\varepsilon u) = \frac{(\wp u)^N + a_1\,(\wp u)^{N-1} + \ldots + a_N}{(\wp u)^{N-1} + b_1\,(\wp u)^{N-2} + \ldots + b_{N-1}}\,,$$

con $\varepsilon = i\sqrt{D}$ o $\varepsilon = \dfrac{1+i\sqrt{D}}{2}$, varrebbe per una $\wp u$ arbitraria, ciò che è assurdo.

Dunque nella serie delle dette equazioni lineari ne incontreremo certamente una $(2N)^{ma}$ che non sarà più indipendente dalle prime $2N-1$ per g_2, g_3 arbitrarii, ed eliminando quindi le $2N-1$ costanti a, b fra queste equazioni lineari, si avrà appunto, sotto forma di determinante, l'asserita relazione (A), che potremo liberare dall'irrazionalità $i\sqrt{D}$, se pur la contiene. È manifesto poi che la (A) dipende unicamente dal determinante D e dalla specie della forma (A, B, C), come porta l'enunciato del teorema.

Ora osserviamo che la relazione (A) fra g_2, g_3, a causa delle mentovate formole d'omogeneità, si può trasformare in un'equazione

$$\text{(B)} \qquad F(J) = 0$$

per l'invariante assoluto $J(\tau)$, *con coefficienti interi*, e di questa equazione saranno radici tutti gli invarianti assoluti delle funzioni ellittiche $\wp u$ a moltiplicazione complessa, corrispondenti a forme quadratiche (A, B, C) della medesima specie e dello stesso determinante D.

Alla dimostrazione della esistenza della equazione algebrica (A), e conseguentemente della (B), possiamo pervenire anche nel modo seguente (Halphen l. c.). Sviluppiamo direttamente i due membri della (VI) §. 197 per potenze di u e paragoniamo dalle due parti i coefficienti di u^2, u^4; abbiamo così le formole:

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{20}(\varepsilon^4 - 1)\, g_2 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{r=1}^{r=N-1} \wp''\left(\frac{2r\tilde{\omega}}{N}\right) \\[2ex] \dfrac{1}{28}(\varepsilon^6 - 1)\, g_3 = \dfrac{1}{24} \displaystyle\sum_{r=1}^{r=N-1} \wp^{\text{IV}}\left(\frac{2r\tilde{\omega}}{N}\right). \end{cases}$$

Sostituendo per $\wp''\left(\frac{2r\tilde{\omega}}{N}\right)$, $\wp^{\text{IV}}\left(\frac{2r\tilde{\omega}}{N}\right)$ i loro valori

$$\wp''\left(\frac{2r\tilde{\omega}}{N}\right) = 6\,\wp^2\left(\frac{2r\tilde{\omega}}{N}\right) - \frac{1}{2}\, g_2$$

$$\wp^{\text{IV}}\left(\frac{2r\tilde{\omega}}{N}\right) = 12\left\{10\,\wp^3\left(\frac{2r\tilde{\omega}}{N}\right) - \frac{3}{2}\, g_2\, \wp\left(\frac{2r\tilde{\omega}}{N}\right) - g_3\right\},$$

ed esprimendo quindi i secondi membri delle (9) razionalmente per $\wp\left(\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right)$, colle formole ordinarie di moltiplicazione dell'argomento, l'eliminazione di $\wp\left(\frac{2\tilde{\omega}}{N}\right)$ fra le (9) porterà ad una relazione (A) fra g_2, g_3, o alla (B) per $J(\tau)$.

§. 201.

Esempi numerici $D = 3$, $D = 2$, $D = 7$.

Prima di procedere allo studio delle proprietà della equazione (B), cui soddisfano gli invarianti assoluti delle funzioni ellittiche a moltipli-

cazione complessa, applichiamo i processi generali esposti ad alcuni casi particolari più semplici.

In due soli casi il grado N della trasformazione per la moltiplicazione complessa è semplicemente $=1$, e cioè nei casi

$$D = 1 \ , \quad D = 3 \ ,$$

corrispondentemente alla unica classe a determinante $D = 1$

$$(1 \ , \ 0 \ , \ 1)$$

e all'unica classe di 2.ª specie per $D = 3$

$$(2 \ , \ 1 \ , \ 2) \ .$$

Le funzioni $\wp$ corrispondenti sono la lemniscatica e la equianarmonica, colle formole rispettive di moltiplicazione complessa

$$\wp(iu) = -\wp u$$
$$\wp(\varepsilon u) = \varepsilon \wp u \ .$$

I valori caratteristici degli invarianti sono $g_3 = 0$ nel 1.° caso, e $g_2 = 0$ nel 2.° Esaminiamo ora i casi successivi in cui si ha $N = 2$, che corrispondono unicamente ai valori

$$D = 2 \ , \ D = 7 \ ,$$

quando, nel caso $D = 7$, si considerino forme di 2.ª specie.

1.° caso: Sia $D = 2$.— Qui abbiamo una sola classe di forme, rappresentata dalla forma ridotta (1, 0, 2). Le formole (I) §. 195 diventano

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &= \omega' \ , \quad \frac{\omega}{\varepsilon} = -\frac{\omega'}{2} \\ \varepsilon\omega' &= -2\omega \ , \quad \frac{\omega'}{\varepsilon} = \omega \end{aligned} \qquad \varepsilon = i\sqrt{2} \ , \ N = 2.$$

Per semiperiodo $\bar{\omega}$ si può prendere semplicemente $\bar{\omega} = \omega'$ e la formola (VII*) pag. 537 ci darà subito

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \wp u + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp u - e_3} \ , \tag{10}$$

che scriviamo sotto la forma

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \frac{\wp^2 u - \alpha \wp u + \beta}{\wp u - \alpha} \ .$$

Per determinare le costanti α, β, seguiamo il processo indicato al §. 198, sostituendo nella (10) gli sviluppi in serie

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 . 3 . 5^2} u^6 + \ldots$$

$$\wp^2 u = \frac{1}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \frac{g_3}{14} u^2 + \frac{g_2^2}{2^4 . 3 . 5} u^4 + \ldots$$

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \frac{1}{u^2} + \frac{4 g_2}{20} u^2 - \frac{8 g_3}{28} u^4 + \frac{16 g_2^2}{2^4 . 3 . 5^2} u^6 + \ldots ,$$

e paragonando i termini costanti e i coefficienti di u^2 dalle due parti dell'identità

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u)(\wp u - \alpha) = \wp^2 u - \alpha \wp u + \beta ,$$

troveremo subito

$$\alpha = -\frac{15 g_3}{7 g_2} , \quad \beta = \frac{3 g_2}{20} .$$

Il paragone poi dei coefficienti di u^4 darà

$$3^2 . 5^2 \alpha g_3 + 14 g_2^2 = 0 ,$$

da cui la relazione algebrica fra g_2, g_3

$$g_2^3 = \frac{3^3 . 5^3}{2 . 7^2} \cdot g_3^2 .$$

Ne deduciamo quindi

$$J(i\sqrt{2}) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 .$$

Si assuma p. e., disponendo del fattore di omogeneità in g_2, g_3,

$$g_2 = 2 . 3 . 5 . = 30$$
$$g_3 = 2^2 . \ 7 \ = 28$$

e si troverà

$$e_1 = 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} , \quad e_2 = 1 - \frac{3}{\sqrt{2}} , \quad e_3 = -2 ,$$

onde la formola di moltiplicazione complessa (10) diventa

$$(12) \qquad -2\wp(i\sqrt{2} . u) = \wp u + \frac{9}{2\wp u + 4} .$$

2.° caso: D = 7. — Qui si ha una sola classe di 1.ª specie ed una sola di 2.ª specie, rappresentate rispettivamente dalle forme ridotte

$$(1\,,\,0\,,\,7)\;,\;(2\,,\,1\,,\,4)\,.$$

Cerchiamo la formola di moltiplicazione complessa della $\wp u$ corrispondente alla seconda forma, dalla quale potremmo poi dedurre quella relativa alla $\wp u$ di 1.ª specie con una trasformazione di 2.° grado (§. 198).

Le formole fondamentali (I) diventano nel caso attuale:

$$\begin{cases} \varepsilon\,\omega = \omega+\omega' \\ \varepsilon\,\omega' = -2\,\omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\omega}{\varepsilon} = -\dfrac{\omega'}{2} \\ \dfrac{\omega'}{\varepsilon} = \omega+\dfrac{\omega'}{2} \end{cases}, \qquad \text{con } \varepsilon = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$$

$$N = \frac{7+1}{4} = 2\,.$$

Potremo quindi fare $\dot{\omega} = \omega'$ e la (VII*) pag. 537 ci darà nuovamente

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \wp u + \frac{(e_3-e_2)\,(e_3-e_1)}{\wp u - e_3}\,. \tag{10}$$

Per determinare i coefficienti e la relazione fra g_2, g_3 potremmo procedere come nel caso precedente; qui preferiamo il calcolo seguente. Facciamo nella (11) $u = \omega$ e avremo

$$\varepsilon^2 e_2 = e_1 + e_2 - e_3\,,$$

che combinata coll'identità

$$0 = e_1 + e_2 + e_3\,,$$

e avendo riguardo all'equazione

$$\varepsilon^2 - \varepsilon + 2 = 0$$

cui soddisfa il moltiplicatore, ci dà

$$e_3 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) e_2\,,\quad e_1 = \left(\frac{\varepsilon}{2} - 2\right) e_2$$

e quindi

$$g_2 = 2\,(e_1^2+e_2^2+e_3^2) = 5\,(2-\varepsilon)\,e_2^2$$

$$g_3 = 4\,e_1\,e_2\,e_3 \qquad = (2-\varepsilon)(\varepsilon-4)\,e_2^3\,,$$

onde

$$\frac{g_2^3}{g_3^2} = \frac{5^3}{7}\,,$$

quindi

$$J\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right) = -\frac{5^3}{2^6} .$$

A meno di un fattore di omogeneità, possiamo porre

$$g_2 = 5 . 7 = 35 \ , \ g_3 = 7^2 = 49 \ ;$$

e allora per le radici e_1, e_2, e_3 avremo:

$$e_1 = \frac{7}{2} \ , \ e_2 = -\frac{\varepsilon+3}{2} = -\frac{7+i\sqrt{7}}{4} \ , \ e_3 = \frac{\varepsilon-4}{2} = \frac{-7+i\sqrt{7}}{4}$$

e per la formola di moltiplicazione complessa [1] :

$$(\varepsilon - 2)\,\wp(\varepsilon u) = \wp u + \frac{7}{2}\,\frac{1-3\varepsilon}{2\,\wp u + 4 - \varepsilon} . \tag{13}$$

Conformemente ai teoremi generali, vediamo che nella (12) il 2.° membro è libero dalla irrazionalità ε, laddove nella (13) vi comparisce.

§. 202.

Invarianti delle classi.

Abbiamo veduto al §. 200 che tutti gli invarianti assoluti J delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa, corrispondenti alle classi delle forme quadratiche (A, B, C) del medesimo determinante e della medesima specie, sono radici di una medesima equazione (B) a coefficienti interi. Siccome ad ogni classe di forme quadratiche corrisponde un tale invariante, chiameremo i valori $J(\tau_1)$, ove τ_1 sia radice di una forma quadratica (A, B, C), *invarianti delle classi* e potremo enunciare il teorema:

Gli invarianti delle classi sono numeri algebrici.

Vogliamo stabilire e precisare questo teorema, applicando la teoria delle equazioni modulari, nella qual cosa ci serviremo nuovamente dell'invariante modificato (§. 183)

$$j(\tau) = 12^3\, J(\tau) .$$

---

[1] Si osservi che si ha

$$(e_3 - e_1)\,(e_3 - e_2) = \frac{7}{4}(1-3\varepsilon).$$

Per questo ci è necessario premettere alcune nozioni sulle equazioni modulari per $j(\tau)$, anche pel caso che il grado della trasformazione

$$\begin{pmatrix} d\,, & c \\ b\,, & a \end{pmatrix},$$

dato da $ad-bc=\mathrm{N}$, non sia un numero primo. Se eseguiamo sull'argomento τ di $j(\tau)$ tutte le sostituzioni primitive[1]

$$\frac{d\tau+c}{b\tau+a}\,.$$

a determinante

$$ad-bc=\mathrm{N}\,,$$

i valori distinti che assume

$$j'=j\left(\frac{d\tau+c}{b\tau+a}\right)$$

sono tutti compresi nella formula

$$\text{(C)} \qquad j\left(\frac{\sigma\tau+\nu}{n}\right),\ n\sigma=\mathrm{N}\,,$$

essendo σ, ν, n tre numeri senza divisore comune, tali che $n\sigma=\mathrm{N}$, e ν risultando determinato solo rispetto al modulo n. Il numero $\psi(\mathrm{N})$ di questi valori distinti (C), supposto che decomponendo N in fattori primi si abbia

$$\mathrm{N}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r},$$

sarà dato da

$$\psi(\mathrm{N})=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\ldots p_r^{\alpha_r-1}(p_1+1)(p+1)\ldots(p_r+1)$$

(Cf. §. 164). Precisamente come si è fatto nel §. 184, pel caso di N primo, si dimostra che questi $\psi(\mathrm{N})$ valori j' sono radici di un'equazione algebrica (modulare), che indicheremo con

$$\text{(D)} \qquad \mathrm{F}_{\mathrm{N}}(j',j)=0\,,$$

dove F_{N} è una funzione razionale intera con coefficienti interi e di grado $\psi(\mathrm{N})$ in j'.

---

[1] In cui cioè a, b, c, d sono primi fra loro.

Sia ora τ_0 l'indice di una forma quadratica (A, B, C) a determinante D, di 1.ª o di 2.ª specie. Poniamo, secondo le formole (III) del §. 196:

$$(14) \qquad b = x\mathrm{A}\ ,\ a = x\mathrm{B} + y\ ,\ d = -x\mathrm{B} + y\ .\ c = -x\mathrm{C}$$
$$\mathrm{N} = ad - bc = \mathrm{D}x^2 + y^2,$$

dove x, y saranno interi primi fra loro se (A, B, C) è di 1.ª specie, o anche, nel caso che (A, B, C) sia di 2.ª specie, la metà di numeri *dispari* primi fra loro.

Avremo

$$\tau_0 = \frac{d\tau_0 + c}{b\tau_0 + a}\ ,$$

e perciò anche

$$j(\tau_0) = j\left(\frac{d\tau_0 + c}{b\tau_0 + a}\right),$$

onde segue che l'equazione modulare (D) è soddisfatta ponendo

$$j = j(\tau_0) \quad j' = j\left(\frac{d\tau_0 + c}{b\tau_0 + a}\right) = j(\tau_0)\ ;$$

dunque: l'invariante di classe $j(\tau_0)$ è radice della equazione

$$(\mathrm{D}^*) \qquad \mathrm{F}_{\mathrm{N}}(u, u) = 0\ ,$$

e poichè questa equazione ha i coefficienti interi, segue nuovamente il risultato superiore che gli invarianti di classi sono numeri algebrici. Ma possiamo spingere più in là la ricerca e dimostrare che: *Gli invarianti $j(\tau)$ di classi sono numeri* **interi** *algebrici* [1]. Per ciò dimostreremo che, *escluso il caso in cui* N *sia un quadrato perfetto*, caso che possiamo sempre evitare scegliendo convenientemente nella (14) i numeri x, y:

Il coefficiente della più alta potenza di u nella (D*) *è l'unità.*

Per dimostrarlo osserviamo che si ha identicamente

$$\mathrm{F}_{\mathrm{N}}(j', j(\tau)) = \Pi\left(j' - j\left(\frac{\sigma\tau + \nu}{n}\right)\right),$$

---

[1] Numero *intero* algebrico è un numero che soddisfa ad un'equazione con coefficienti interi e il primo eguale all'unità. (Cf. Dedekind Suppl. alla *Zahlentheorie* di Dirichlet).

il prodotto del 2.° membro essendo esteso ad un sistema completo di rappresentanti $\begin{pmatrix} \sigma, & \nu \\ 0, & n \end{pmatrix}$; ne risulta:

$$F_N(j(\tau), j(\tau)) = \Pi\left[j(\tau) - j\left(\frac{\sigma\tau+\nu}{n}\right)\right]. \tag{15}$$

Ora, sviluppando $u = j(\tau)$ in serie di potenze di $Q = q^2 = e^{2\pi i\tau}$, si ha

$$u = j(\tau) = Q^{-1}(1 + a_1 Q + a_2 Q^2 + \ldots),$$

le a essendo numeri interi. Per ciò la più alta potenza di u nella (D*) avrà un esponente ed un coefficiente eguali rispettivamente all'esponente e coefficiente della più alta potenza di Q^{-1}, che figura nello sviluppo per potenze di Q nel 2.° membro della (15). Lo sviluppo di ciascun fattore

$$j(\tau) - j\left(\frac{\sigma\tau+\nu}{n}\right)$$

è dato da

$$Q^{-1}(1 + a_1 Q + \ldots) - Q^{-\frac{\sigma}{n}} e^{-\frac{2\pi i\nu}{n}}\left(1 + a_1 Q^{\frac{\sigma}{n}} e^{\frac{2\pi i\nu}{n}} + \ldots\right)$$

e la più alta potenza di Q^{-1} che vi figura è la prima se $\sigma < n$ ed ha coefficiente $= 1$, mentre quando $\sigma > n$ [1] questa più alta potenza negativa di Q è $Q^{-\frac{\sigma}{n}}$, con coefficiente $= -e^{-\frac{2\pi i\nu}{n}}$. Se riuniamo tutti i fattori che si ottengono tenendo fissi σ, n e facendo percorrere a ν tutti i suoi valori distinti, cioè un sistema completo di resti (mod n) che siano primi col massimo comun divisore δ di σ, n, il numero di questi fattori sarà dato da $\frac{n}{\delta}\varphi(\delta)$, avendo $\varphi(\delta)$ il solito significato aritmetico [2], e il prodotto di questi fattori porterà la potenza $\frac{\sigma}{\delta}\varphi(\delta)$ di Q^{-1} col coefficiente

$$\pm e^{\frac{2\pi i}{n}\Sigma\nu}. \tag{16}$$

Ora si ha $\Sigma\nu \equiv 0 \pmod{n}$, poichè se r indica un numero primo con n, mentre ν percorre i suoi valori, anche $r\nu$ percorre un sistema completo

---

[1] Non può essere $\sigma = n$, altrimenti sarebbe $N = n^2$ un quadrato contro la ipotesi.

[2] Numero dei numeri inferiori a δ e primi con δ.

di resti (mod n) e primi con δ onde, $r\Sigma\nu \equiv \Sigma\nu$ (mod n) e quindi appunto $\Sigma\nu \equiv 0$ (mod n), se $n > 2$. Che se $n = 2$, allora $\nu = 1$ e il valore (16) è $= \pm 1$.

In ogni caso dunque il valore assoluto del coefficiente (16) è l'unità. L'esponente della potenza di u portata dai fattori corrispondenti a valori fissi di σ, n è quindi $\frac{n}{\delta}\varphi(\delta)$ o $\frac{\sigma}{\delta}\varphi(\delta)$, secondo che $n > \sigma$ o $\sigma > n$, e per ciò l'esponente totale h è dato da:

$$h = \sum \frac{n}{\delta}\varphi(\delta) + \sum \frac{\sigma}{\delta}\varphi(\delta),$$

tanto la prima che la seconda somma essendo estese ai divisori n o σ di N che sono $> \sqrt{N}$. Si conclude quindi: *La più alta potenza di u, che figura nella* (D*), *ha un esponente h dato da*

$$h = 2\sum \frac{n}{\delta}\varphi(\delta),$$

dove n percorre i divisori di N *che sono maggiori di $\sqrt{N}$ e δ è il massimo comun divisore di n, $\frac{N}{n}$; il coefficiente di questa più alta potenza è $= \pm 1$.*

Così adunque è stabilito il teorema enunciato:

Gli invarianti $j(\tau)$ delle classi sono numeri interi algebrici.

In particolare quando vi ha una sola classe, come nei casi

$$D = 1\ ,\quad D = 2$$

$$D = 3\ ,\quad D = 7\ ,$$

i valori corrispondenti di j saranno numeri interi ordinarii. Come conferma, ricordiamo che abbiamo trovato

$$j(i) = 12^3\ ,\quad j\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$j(i\sqrt{2}) = 20^3\ ,\quad j\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right) = -3^3 . 5^3 \ (\S.\ 201).$$

§. 203.

Proprietà delle equazioni irriducibili per gli invarianti delle classi.

Ogni invariante j_1 di una classe, essendo un numero intero algebrico, soddisfa ad un'equazione

$$\text{(E)} \qquad \varphi(j) = 0$$

irriducibile con coefficienti interi ed il primo eguale all'unità. Vogliamo ora dimostrare il teorema: *Tutte le radici della equazione irriducibile* (E), *cui soddisfa un invariante* j_1 *di classe, sono pure invarianti di classi, del medesimo determinante e della medesima specie.*

Per questo riprendiamo l'equazione (D*)

$$\text{(D*)} \qquad F_N(u, u) = 0$$

per meglio caratterizzare tutte le sue radici. Se u è una radice di (D*) e si pone

$$u = j(\tau_1),$$

l'equazione

$$F_N(j', j(\tau_1)) = 0$$

avrà una radice $j' = j(\tau_1)$ e per ciò sarà, per convenienti valori dei numeri σ, n, ν (senza divisore comune):

$$j(\tau_1) = j\left(\frac{\sigma\tau_1 + \nu}{n}\right), \quad n\sigma = N,$$

e quindi

$$\tau_1 = \frac{d\tau_1 + c}{b\tau_1 + a}, \quad ad - bc = N,$$

essendo a, b, c, d quattro interi senza divisore comune, cioè τ_1 indice di una forma quadratica (A, B, C) primitiva.

Ora di qui seguono (§. 196) le relazioni (14) del §. precedente, essendo x, y interi primi fra loro, ovvero la metà di numeri dispari primi fra loro. Se ne deduce il teorema fondamentale:

Le radici della equazione (D*)

$$\text{(D*)} \qquad F_N(u, u) = 0$$

sono tutti e soli quegli invarianti di classi (A, B, C) *di prima specie con*

determinanti D *pei quali è risolubile, in modo proprio, l'equazione*

$$N = Dx^2 + y^2$$

e quegli invarianti di classi di 2.ª specie con tali determinanti D *che sia solubile l'equazione precedente, ovvero l'altra*

$$4N = Dx^2 + y^2$$

in numeri x, y *impari primi fra loro.*

In altre parole le radici di $F_N(u, u) = 0$ sono tutti e soli quegli invarianti di classi tali che o il grado N sia rappresentabile in modo proprio dalla forma principale (1, 0, D), ovvero 4N dalla forma stessa con soluzioni impari.

Sia dunque la (E) l'equazione irriducibile, cui soddisfa un invariante di classe j_1 a determinante D. Allora j_1 è anche radice della equazione

$$F_D(u, u) = 0\,,$$

la quale avrà pure tutte le altre radici della equazione irriducibile (E), onde si vede intanto che: *tutte le radici della* (E) *sono invarianti di classi.* Ma ora dobbiamo di più dimostrare che tutte queste radici sono invarianti, appartenenti al medesimo determinante ed alla medesima specie.

Siano j_1, j_2 due invarianti di classi, radici della (E), ed appartengano, se è possibile, a determinanti diversi D, D_1; sia p. e. $D < D_1$.

Allora j_2 non potrà essere di 1.ª specie; perchè l'equazione

$$F_D(u, u) = 0\,,$$

avendo la radice j_1 dell'equazione irriducibile (E), ammetterrebbe pure la j_2 e, pel teorema fondamentale, dovrebbe quindi essere solubile in modo proprio l'equazione

$$D = D_1 x^2 + y^2\,,$$

ciò che è assurdo essendo $D < D_1$ [1]. La radice j_2 di maggior determinante sarà quindi di *2.ª specie.* Quella j_1 di minor determinante sarà invece di 1.ª specie; perchè se fosse anche j_1 di 2.ª specie, sarebbe $D \equiv -1$ (mod 4) e j_1 sarebbe radice di

$$F_{\frac{D+1}{4}}(u, u) = 0$$

---

[1] Il caso $D = 1$ naturalmente si esclude perchè allora j_1 è razionale $= 12^3$.

e però anche j_2, onde dovrebbe aversi pel teorema fondamentale, in numeri x, y primi fra loro:

$$\frac{D+1}{4} = D_1 x^2 + y^2 ,$$

ovvero

$$D+1 = D_1 x^2 + y^2 ,$$

in quest'ultimo caso con x, y impari e ciò è assurdo, perchè $D < D_1$ e si suppone $D \neq 3$ [1].

Dunque nelle nostre ipotesi sarà j_1 di prima, j_2 di seconda specie; e poichè ambedue sono radici di $F_D(u, u) = 0$, e non è solubile propriamente l'equazione

$$D = D_1 x^2 + y^2$$

lo sarà, in numeri impari, l'altra

$$4D = D_1 x^2 + y^2 ,$$

onde deduciamo

$$\alpha) \qquad D \geq \frac{D_1 + 1}{4} .$$

D'altronde j_2, quindi j_1, è radice di

$$F_{\frac{D_1+1}{4}}(u, u) = 0$$

e però è solubile propriamente l'equazione

$$\frac{D_1+1}{4} = D x^2 + y^2 ,$$

onde si trae (perchè $D_1 \neq 3$)

$$\frac{D_1+1}{4} \geq D ,$$

e, confrontando con α), risulterebbe

$$D = \frac{D_1+1}{4} .$$

---

[1] Per $D = 3$ sarebbe $j_1 = 0$.

Ma l'equazione

$$F_{D_1}(u, u) = 0$$

ammette la radice j_2, quindi j_1, e però è solubile propriamente l'equazione

$$D_1 = Dx^2 + y^2$$

o

$$4D - 1 = Dx^2 + y^2,$$

onde seguirebbe $x = \pm 1$ indi $y^2 \equiv -1 \pmod 3$, ciò che è assurdo.

Così è dimostrato che tutte le radici della (E) appartengono al medesimo determinante. Ma anche la loro specie è la stessa; perchè se j_1 fosse di 1.ª, j_2 di 2.ª specie, essendo ambedue radici di

$$F_{\frac{D+1}{4}}(u, u) = 0,$$

sarebbe solubile propriamente l'equazione

$$\frac{D+1}{4} = Dx^2 + y^2,$$

ciò che è assurdo, essendo $D \neq 3$.

Dal teorema dimostrato segue che se

$$f_1, f_2, f_3 \ldots f_h$$

sono un sistema completo di forme di egual determinante D e della medesima specie, i cui indici siano

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3 \ldots \tau_h,$$

e i corrispondenti valori degli invarianti delle classi si indicano con

$$j_1, j_2, j_3 \ldots j_h,$$

il polinomio di grado h in j

$$(j - j_1)(j - j_2) \ldots (j - j_h)$$

ha coefficienti interi e per primo coefficiente 1. Indicheremo questo polinomio con $H_D(j)$ per le forme di 1.ª specie, e con $H'_D(j)$ per quelle di 2.ª specie. Così avremo per esempio

$$H_1(j) = j - 12^3, \quad H_2(j) = j - 20^3$$
$$H'_3(j) = j \qquad , \quad H'_7(j) = j + 3^3 . 5^3.$$

§. 204.

Modo di calcolare i fattori $H_m(j)$, $H'_m(j)$.

Nel §. precedente abbiamo dimostrato che i polinomii $H_D(j)$, $H'_D(j)$ hanno coefficienti interi (il primo $=1$); ma resta a dare un metodo che serva al calcolo effettivo di questi polinomii. Per questo procediamo, con Weber, nel modo seguente, che dà nel medesimo tempo una nuova dimostrazione, *per induzione completa*, dei risultati sopra ottenuti. Supponiamo adunque di conoscere tutti i polinomii [1]

$$H_n(j)\ ,\quad H'_{4n-1}(j)$$

per $n<m$, e di aver verificato che essi hanno tutti coefficienti interi, e proponiamoci di calcolare

$$H_m(j)\ ,\quad H'_{4m-1}(j)\,.$$

Per questo costruiamo l'equazione

$$(\beta)\qquad F_m(u, u) = 0\,,$$

le cui radici sono tutti invarianti di classi e precisamente alcune sono invarianti di 1.ª specie, appartenenti a determinanti n pei quali è solubile propriamente l'equazione

$$m = x^2 + n y^2\,.$$

Il massimo valore che si può dare ad n è appunto m, talchè $F_m(u, u)$ contiene come fattore il polinomio di 1.ª specie $H_m(j)$ ed altri $H_n(j)$ di 1.ª specie con $n<m$, e per ciò già noti per ipotesi. Le altre radici della (β) saranno invarianti di classi di 2.ª specie, appartenenti a determinanti $4n-1$ pei quali è solubile l'equazione

$$4m = x^2 + (4n-1)\,y^2$$

e nuovamente il massimo valore di n è m, ove $x=\pm 1$, $y=\pm 1$. Si vede adunque che $F_m(u, u)$ contiene il fattore

$$H_m(j)\,.\,H'_{4m-1}(j)$$

---

[1] Si ricordi che i polinomii $H'_m(j)$ di 2ª specie esistono solo per $m\equiv -1$ (mod 4).

e tutte le rimanenti radici appartengono a polinomii

$$H_n(j) \ , \ H'_{4n-1}(j)$$

con $n < m$ e quindi già noti. Se adunque. coi noti processi razionali, si libera $F_m(u, u)$ dai fattori multipli e da quelli comuni coi polinomii $H_n(j)$, $H'_{4n-1}(j)$, già calcolati, si otterrà intanto il prodotto

$$H_m(j) \, . \, H'_{4m-1}(j) \, ,$$

che avrà coefficienti razionali. Per separare poi questi due fattori H_m, H'_{4m-1}, si osservi che l'equazione

$$F_{4m-1}(u, u) = 0$$

ammette il fattore $H'_{4m-1}(j)$, ma non l'altro $H_m(j)$, giacchè l'equazione

$$4m - 1 = x^2 + my^2$$

è insolubile [1]. Il massimo comun divisore di $F_{4m-1}(u, u)$ e del prodotto $H_m(j) \, . \, H'_{4m-1}(j)$ è adunque $H'_{4m-1}(j)$, che si può quindi separare razionalmente. Così, se ammettiamo dimostrato che i polinomii

$$H_n(j) \ , \ H'_{4n-1}(j) \, ,$$

finchè $n < m$, hanno coefficienti razionali, lo stesso vale di $H_m(j)$, $H'_{4m-1}(j)$; e poichè i polinomii

$$H_1(j) \ , \ H_3^1(j) \ ; \ H_2(j) \ , \ H_7^1(j)$$

hanno coefficienti razionali (§. 203), lo stesso vale in generale. Che poi questi coefficienti siano inoltre **interi** segue da ciò che le loro radici sono numeri interi algebrici.

Il metodo descritto pel calcolo dei polinomii $H_m(j)$, $H'_{4m-1}(j)$ ha un valore soltanto teorico, poichè, anche per valori relativamente piccoli di m, la funzione $F_m(j, j)$ è complicatissima e i calcoli da eseguirsi sarebbero immensamente laboriosi. Altri metodi si hanno per la costruzione dei detti polinomii, che sono principalmente fondati sulle proprietà di funzioni modulari più elevate e delle corrispondenti equazioni modulari; ma noi qui non possiamo occuparcene e rimandiamo alla citata opera del Weber ed alle memorie di Greenhill.

---

[1] Altrimenti seguirebbe $y^2 = 1$, $x^2 \equiv -1 \pmod 3$.

§. 205.

Gli invarianti di classi di 2.ª specie espressi razionalmente per quelli di 1.ª

A fine di poter limitare le ulteriori considerazioni ai polinomii $H_m(j)$ di 1.ª specie e alle corrispondenti equazioni

$$H_m(j) = 0 ,$$

dimostreremo il teorema [1]:

Gli invarianti di 2.ª specie, appartenenti ad un dato determinante m, sono razionalmente esprimibili per quelli di 1.ª specie col medesimo determinante m.

Consideriamo una radice qualsiasi

$$j = j(\omega)$$

della equazione $H_m(j) = 0$, e sia (A, B, C) una corrispondente forma di 1.ª specie, dove quindi uno almeno dei due numeri A, C è dispari, poniamo p. e. sia $A \equiv 1 \pmod 2$. Possiamo supporre anche B dispari; altrimenti colla sostituzione $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ trasformeremmo (A, B, C) nell'equivalente (A, B+A, A+2B+C), ove il cofficiente medio B+A sarebbe impari.

Allora, essendo

$$m = AC - B^2 \equiv -1 \pmod 4 ,$$

sarà necessariamente

$$C \equiv 0 \pmod 4 .$$

Si consideri ora l'equazione modulare di 3.° grado

$$F_2(j', j(\omega)) = 0 , \tag{17}$$

le cui tre radici in j' sono

$$j'_\infty = j(2\omega) , \quad j'_0 = j\left(\frac{\omega}{2}\right) , \quad j'_1 = j\left(\frac{\omega+1}{2}\right) .$$

Posto ordinatamente

$$\omega' = 2\omega , \quad \omega' = \frac{\omega}{2} , \quad \omega' = \frac{\omega+1}{2} ,$$

---

[1] Weber *l.c.* §. 89, pag. 338.

l'equazione cui soddisfa ω' sarà rispettivamente:

$$A\omega'^2 + 4B\omega' + 4C = 0 \qquad \text{per } \omega' = 2\omega$$

$$2A\omega'^2 + 2B\omega' + \frac{C}{2} = 0 \qquad \text{„ } \omega' = \frac{\omega}{2}$$

$$4A\omega'^2 + 4(B-A)\omega' + A - 2B + C = 0 \qquad \text{„ } \omega' = \frac{\omega+1}{2}.$$

Tutte tre le corrispondenti forme

$$(A, 2B, 4C)\ ,\ \left(2A, B, \frac{C}{2}\right)$$

$$(4A,\ 2(B-A)\ ,\ A - 2B + C)$$

sono primitive; ma le due estreme sono di 1.ª specie, col determinante $4m$, la media invece è di 2.ª specie col determinante m. Dunque, delle tre radici della (17), soltanto la media $j'_0 = j\left(\frac{\omega}{2}\right)$ soddisfa anche la equazione

$$H'_m(j') = 0$$

e perciò i due polinomii

$$H'_m(j') \qquad F_2(j', j(\omega))$$

hanno a comune soltanto il fattore lineare

$$j' - j\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

che si calcolerà quindi razionalmente per $j(\omega)$. Si avrà così:

$$j\left(\frac{\omega}{2}\right) = \Theta(j(\omega))\ , \tag{18}$$

essendo Θ il simbolo di una funzione razionale a coefficienti razionali, che sarà affatto indipendente dalla particolare radice scelta $j(\omega)$ della $H_m(u) = 0$. Ogni radice $j(\omega)$ di $H_m(j) = 0$, sostituita nella (18), dà quindi una radice j' di $H_m(j') = 0$ ed ora vogliamo dimostrare che così si ottengono *tutte* le radici di $H'_m(j') = 0$, dopo di che sarà dimostrato il teorema enunciato. Sia $j(\omega')$ una radice di $H'_m(j) = 0$ e

$$(2A\ ,\ B\ ,\ 2C)$$

una corrispondente forma primitiva di 2.ª specie, sicchè avremo:

$$A\omega'^2 + B\omega' + C = 0$$

e potremo supporre che sia A dispari [1].

Allora, posto $\omega = 2\omega'$, sarà ω radice della forma primitiva di 1.ª specie a determinante m:

$$A\omega^2 + 2B\omega + 4C = 0 \ ,$$

e perciò la radice $j(\omega')$ di $H'_m(j) = 0$ si esprimerà colla (18) per la radice $j(\omega) = j(2\omega')$ della $H_m(j) = 0$, c. d. d.

Le varie radici $j(\omega)$ di $H_m(j) = 0$, sostituite in (18), dànno *tutte* e sole le radici di $H'_m(j) = 0$; ma vogliamo ora esaminare ulteriormente la questione se queste radici di $H'_m(j) = 0$ si troveranno o no ripetute. Per decidere la cosa osserviamo che, se due radici differenti $j(\omega)$, $j(\omega_1)$ di $H_m(j) = 0$ dànno, sostituite nella (18), la medesima radice $j(\omega')$ di $H'_m(j) = 0$, dovranno $j(\omega)$, $j(\omega_1)$ essere ambedue radici della equazione modulare

$$F_2(j', j(\omega')) = 0 .$$

Ma queste radici sono

$$(19) \qquad j(2\omega') \ , \ j\left(\frac{\omega'}{2}\right) \ , \ j\left(\frac{\omega'+1}{2}\right) ,$$

e si tratta dunque di vedere in primo luogo quali di questi tre valori sono radici di $H_m(j) = 0$. Ora, posto successivamente

$$\omega = 2\omega' \ , \quad \omega = \frac{\omega'}{2} \ , \quad \omega = \frac{\omega'+1}{2} \ ,$$

dall'equazione

$$A\omega'^2 + B\omega' + C = 0$$

si deduce che ω sarà rispettivamente radice dell'equazione

$$A\omega^2 + 2B\omega + 4C = 0 \quad \text{per } \omega = 2\omega'$$

$$4A\omega^2 + 2B\omega + C = 0 \quad \text{„} \quad \omega = \frac{\omega'}{2}$$

$$4A\omega^2 + 2(B-2A)\omega + A - B + C = 0 \quad \text{„} \quad \omega = \frac{\omega'+1}{2}$$

---

[1] Se A fosse pari, C impari, basterebbe cangiare ω' in $-\frac{1}{\omega'}$ e se A, C fossero ambedue pari, in $\frac{\omega'}{\omega'+1}$.

e le tre forme corrispondenti hanno ancora il determinante m. Di esse però la prima è certamente primitiva (di 1.ª specie), le altre due invece, come subito vediamo, saranno imprimitive se $m \equiv -1 \pmod 8$, primitive quando $m \equiv 3 \pmod 8$. E infatti, siccome

$$4AC - B^2 = m,$$

e $B^2 \equiv +1 \pmod 8$, perchè B è dispari, sarà nel primo caso $AC \equiv 0 \pmod 2$ e nel secondo $AC \equiv 1 \pmod 2$ e quindi, essendo A impari, sarà C pari se $m \equiv -1 \pmod 8$, impari se $m \equiv 3 \pmod 8$.

Dunque se $m \equiv -1 \pmod 8$, dei tre valori (19) solo il primo è radice di $H_m(j) = 0$ ed ogni invariante di 2.ª specie ne dà uno solo di 1.ª specie, cioè: *Se $m \equiv -1 \pmod 8$ gli invarianti di 1.ª specie si esprimono razionalmente per quelli di 2.ª*

Nel caso $m \equiv 3 \pmod 8$ tutti tre i valori (19) sono invarianti di 1.ª specie e rimane soltanto da vedere se sono differenti o no, se cioè fra i tre valori

$$2\omega', \quad \frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega'+1}{2}$$

ve ne sono due equivalenti. Basterà esaminare se i due primi $2\omega'$, $\frac{\omega'}{2}$ possono essere equivalenti, gli altri casi riducendosi a questo col cangiare ω' in $\omega'+1$, ovvero in $-\frac{1}{\omega'}$. Supponiamo dunque che sia

$$2\omega' = \frac{\alpha\frac{\omega'}{2} + \beta}{\gamma\frac{\omega'}{2} + \delta},$$

con α, β, γ, δ interi e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; avremo

$$2\gamma\omega'^2 + (4\delta - \alpha)\omega' - 2\beta = 0,$$

che, paragonata con

$$A\omega'^2 + B\omega' + C = 0,$$

dà

$$2\gamma = xA, \quad 4\delta - \alpha = xB, \quad -2\beta = xC,$$

dove x sarà un intero (perchè A, B, C non hanno divisor comune) evi-

dentemente pari; e se poniamo

$$4\delta+\alpha=y,$$

sarà pure y un intero pari e dalle formole

$$2\alpha=y-Bx\ ,\quad 2\beta=-Cx\ ,\quad 2\gamma=Ax\ ,\quad 8\delta=y+Bx$$

si trae

$$16(\alpha\delta-\beta\gamma)=16=y^2+mx^2,$$

equazione solubile soltanto per $m=3$. In questo caso i tre valori

$$2\omega'\ ,\ \frac{\omega'}{2}\ ,\ \frac{\omega'+1}{2}$$

sono fra loro equivalenti.

Vediamo dunque che se $m\equiv 3 \pmod 8$, e non è $m=3$, le radici $j(\omega)$ di $H_m(j)=0$, sostituite nella (18), dànno tre a tre la medesima radice di $H'_m(j)$. Se si indica quindi con h il numero delle classi delle forme primitive di 1.ª specie a determinante m, con h' quello delle classi di 2.ª specie, si avrà

$$h'=h \quad \text{per } m\equiv -1 \pmod 8$$

$$h'=\frac{h}{3} \quad \text{per } m\equiv 3 \pmod 8,$$

eccettuato $m=3$ ove nuovamente $h'=h$ [1].

Capitolo XIX.

Composizione delle forme quadratiche e gruppo di Galois per l'equazione degli invarianti delle classi.

§. 206.

Composizione delle forme quadratiche secondo Gauss.

Nella ricerca degli invarianti assoluti delle classi tutto si riduce, per quanto sopra si è visto, allo studio dell'equazione

(1) $$H_D(j)=0\ ,$$

---

[1] Dirichlet-Dedekind. *Zahlentheorie,* §. 97 e Supplemento X.°

le cui radici sono gli invarianti appartenenti alle classi di 1.ª specie a determinante D. Secondo un teorema enunciato da Abel[1], l'equazione (1), che ha per radici gli invarianti delle classi, è un'equazione risolubile per radicali. Il gruppo di Galois per quest'equazione, quando al campo assoluto di razionalità si aggiunga il radicale quadratico $i\sqrt{D}$, è un gruppo Abeliano (di sostituzioni permutabili); esso coincide (è oloedricamente isomorfo) col gruppo *di composizione*, secondo Gauss, delle forme quadratiche di 1.ª specie a determinante D. Così la teoria della composizione delle forme, data da Gauss nelle *Disquisitiones arithmeticae*, contiene già tutti gli elementi necessarii per la conoscenza delle equazioni per gli invarianti delle classi, dal punto di vista della teoria di Galois.

Noi ci proponiamo qui, come ultima ricerca, di stabilire le enunciate proprietà, il che ci obbliga a riassumere brevemente la teoria della composizione delle forme quadratiche, rimandando per maggiori notizie al X.° Supplemento dell'opera di Dirichlet-Dedekind e alle lezioni litografate di Klein [2], alle quali ci atteniamo nell'esposizione seguente. Consideriamo una forma quadratica

$$(a, b, c),$$

che supporremo senz'altro primitiva di 1.ª specie. Essa determina una classe di funzioni ellittiche, nelle quali il rapporto τ dei periodi è dato da

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{-b+i\sqrt{D}}{a}$$

e i periodi 2ω, $2\omega'$ sono determinati a meno di un fattor comune di proporzionalità. Consideriamo i vertici della rete parallelogrammica appartenente alla $\wp(u|\omega, \omega')$, che sono nei punti

$$u = 2\omega . x + 2\omega' y, \tag{2}$$

percorrendo x, y tutti i valori interi.

L'insieme di tutti questi punti si dirà il *reticolo* appartenente alla forma (a, b, c); esso sarà determinato solo a meno di una rotazione attorno all'origine e di un'omotetia rispetto all'origine stessa. Per fissare le idee prendiamo

$$2\omega = \sqrt{a}\ , \quad 2\omega' = \frac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{a}}$$

---

[1] L'enunciato d'Abel si riferisce naturalmente ai moduli k^2 di Legendre.

[2] Ausgewählte Kapitel der *Zahlentheorie* (Göttingen 1896).

e il reticolo consterà allora dei punti

$$(3) \qquad M = \sqrt{a}\, x + \frac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{a}}\, y.$$

Da considerazioni già svolte in altra occasione (Vedi Cap. II, §. 23 e Cap. VIII, §. 95) risulta il teorema: *Se due forme quadratiche primitive* (a, b, c), (a', b', c') *hanno il medesimo reticolo, ovvero reticoli che si cangiano l'uno nell'altro per rotazione ed omotetia rispetto all'origine, esse sono equivalenti.*

Veniamo ora all'oggetto proprio di questo §., cioè alla *composizione* dei reticoli e delle forme. Siano (a, b, c), (a', b', c') due forme quadratiche primitive di 1.ª specie e di egual determinante D, e si considerino i rispettivi reticoli

$$M = \sqrt{a}\, x + \frac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{a}}\, y$$

$$M' = \sqrt{a'}\, x' + \frac{-b'+i\sqrt{D}}{\sqrt{a'}}\, y'.$$

Facciamo tutti i possibili prodotti $M M'$ di un numero del primo reticolo per un numero del secondo e addizioniamo quanti si vogliano di questi prodotti, moltiplicati per numeri interi arbitrarii. Dimostreremo che *i numeri così ottenuti sono tutti e soli i vertici di un terzo reticolo, appartenente ad una terza forma quadratica a determinante* D. Il terzo reticolo si dirà il reticolo *composto* dei due e la terza forma si dirà composta delle due (a, b, c), (a', b', c'). Già prima di eseguire il nostro calcolo osserviamo che, siccome a forme equivalenti appartiene il medesimo reticolo e inversamente, si avrà senz'altro il teorema: *La classe della forma composta dipende unicamente dalle classi delle due forme componenti.*

Per dimostrare ora il teorema fondamentale cominciamo dal prendere due forme dalle rispettive classi delle due forme date, che abbiano i primi coefficienti a, a' primi fra loro ed eguale coefficiente medio $b' = b$, ciò che vediamo subito esser sempre possibile. E infatti possiamo intanto supporre che i due primi coefficienti a, a' siano primi fra loro, poichè ad ogni forma primitiva possiamo sostituirne una equivalente il cui primo coefficiente sia primo col numero che più ci piace [1]. Ed ora mediante

---

[1] Cf. Dirichlet-Dedekind, §. 93.

le sostituzioni rispettive

$$\begin{pmatrix} 1 , & m \\ 0 , & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 , & n \\ 0 , & 1 \end{pmatrix}$$

si traducano le forme

$$(a, b, c) \ , \ (a', b', c')$$

nelle equivalenti

$$(a \ , \ b + a\,m \ , \ c + 2\,b\,m + a\,m^2)$$
$$(a' , \ b' + a'\,n \ , \ c' + 2\,b'\,n + a'\,n^2)$$

e si determinino i numeri interi m, n in guisa che risulti

$$b + a\,m = b' + a'\,n ,$$

cioè

$$a\,m - a'\,n = b' - b ,$$

il che è sempre possibile, essendo a, a' primi fra loro. Otterremo così due forme equivalenti alle primitive

$$f_1 = (a, b, c) \ , \ f_2 = (a', b, c')$$

in cui a, a' saranno primi fra loro e il coefficiente medio b sarà il medesimo. Si osservi ora che, il determinante D essendo il medesimo, si ha

$$a\,c = a'\,c'$$

e poichè a, a' sono primi fra loro avremo

$$c = a'\,\mathrm{C} \ , \ c' = a\,\mathrm{C} ,$$

essendo C un conveniente terzo numero. Le due forme saranno quindi

$$(4) \qquad f_1 = (a, b, a'\,\mathrm{C}) \ , \ f_2 = (a', b, a\,\mathrm{C}) .$$

Come si è visto, in due classi qualunque possiamo scegliere due tali forme (4) in cui a, a' siano primi fra loro. Ma per le applicazioni che dovremo farne fra breve converrà che consideriamo il caso più generale in cui nelle forme (4) si supponga soltanto che i tre numeri

$$a \ , \ a' \ , \ 2\,b$$

non abbiano alcun divisore comune. Se questa condizione è soddisfatta, le due forme (4) si diranno *concordanti*.

Ora si prendano due numeri dei corrispondenti reticoli

$$\begin{cases} M_1 = \sqrt{a}\ x + \dfrac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{a}}\ y \\ M_2 = \sqrt{a'}\ x' + \dfrac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{a'}}\ y' ; \end{cases}$$

moltiplicandoli fra loro troviamo, a causa della formola

$$a a' C - b^2 = D :$$

$$(5) \qquad M_1 M_2 = \sqrt{a a'}\,(x x' - C y y') + \frac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{a a'}}\,(a x y' + a' x' y - 2 b y y') .$$

Questi prodotti $M_1 M_2$, e quindi anche la somma di quanti si vogliano di essi, sono numeri del terzo reticolo

$$(6) \qquad M_3 = \sqrt{a a'}\,X + \frac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{a a'}}\,Y ,$$

appartenente alla forma

$$f_3 = (a a', b, C) ,$$

che è ancora a determinante D e primitiva di 1.ª specie, come f_1, f_2. Ma vogliamo di più dimostrare che coi prodotti (5) e colle loro somme si ottengono tutti i numeri del terzo reticolo (6).

Basterà per ciò constatare che si possono ottenere nel detto modo i due numeri fondamentali del terzo reticolo

$$\sqrt{a a'} , \quad \frac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{a a'}} .$$

Quanto al primo si ottiene subito come prodotto di $M_1 = \sqrt{a}$ per $M_2 = \sqrt{a'}$; se facciamo poi

$$M_1 = \sqrt{a} , \quad M'_1 = \frac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{a}}$$

$$M_2 = \sqrt{a'} , \quad M'_2 = \frac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{a'}} ,$$

abbiamo

$$M_1 M'_2 = \frac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{aa'}} \cdot a \ , \quad M_2 M'_1 = \frac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{aa'}} \, a'$$

$$M'_1 M'_2 + C M_1 M_2 = 2b \frac{b-i\sqrt{D}}{\sqrt{aa'}} \ ,$$

che sono numeri formati dai due reticoli nel modo prescritto, ed ora, indicando con

$$m \ , \ n \ , \ p$$

tre interi qualunque, sarà pure uno dei detti numeri:

$$m M_1 M'_2 + n M'_1 M_2 - p (M'_1 M'_2 + C M_1 M_2) = \frac{-b+i\sqrt{D}}{\sqrt{aa'}} (am + a'n + 2bp)$$

ed, essendo a, a', $2b$ primi fra loro, potremo rendere

$$am + a'n + 2bp = 1 \ ,$$

il che dimostra quanto volevamo. Così abbiamo stabilito il teorema fondamentale della composizione delle forme e ritrovata la regola seguente:

Per comporre due classi K, K′ *di forme (primitive di 1.ª specie) di egual determinante, si scelgano dalle due classi due forme concordanti*

$$(a \ , \ b \ , \ a'C) \ , \quad (a' \ , \ b \ , \ aC),$$

nelle quali a, a', $2b$ *siano primi fra loro, e la forma composta sarà*

$$(aa' \ , \ b \ , \ C) \, .$$

Denoteremo la classe composta K″ col simbolo

$$K'' = K K' \ ,$$

come prodotto delle due classi componenti, ove l'ordine dei fattori sarà naturalmente indifferente.

§. 207.

Gruppo di composizione delle forme.

Consideriamo tutte le classi di forme primitive di 1.ª specie di un dato determinante D; se h è il loro numero, indichiamo queste h classi

distinte con

$$(7) \qquad K_1\,,\ K_2\,,\ K_3 \ldots . K_h\,.$$

Componiamo le h classi di questo sistema completo con una qualunque di esse, presa ad arbitrio, K_i. Le h classi composte

$$(8) \qquad K_1 K_i\,,\ K_2 K_i\,,\ \ldots K_h K_i$$

si troveranno certamente fra le (7) e siccome, come ora dimostreremo, nessuna classe è ripetuta nel sistema (8), così le (8) saranno, in altro ordine, le (7) stesse, sicchè la composizione di tutte le classi con una determinata K_i dà luogo ad una *sostituzione* fra le h classi, che indicheremo con s_i.

Per dimostrare la nostra asserzione facciamo le due seguenti osservazioni:

1.ª Sia K_1 la classe principale, contenente cioè la forma principale $(1, 0, D)$. Questa forma principale, composta con ogni altra forma (a, b, c), dà la forma (a, b, c) stessa. E infatti la forma $(1, 0, D)$ è equivalente alla forma $(1, b, ac)$, che è concordante con (a, b, c), e composta con essa, secondo la regola del §. 206, dà appunto (a, b, c). Per ciò la classe principale K_1 si indicherà anche col simbolo 1.

2.ª Sia (a, b, c) una forma qualunque e si consideri la sua *opposta* $(a, -b, c)$, che mediante la sostituzione $\begin{pmatrix} 0\,, & 1 \\ -1\,, & 0 \end{pmatrix}$ si traduce nella equivalente (c, b, a). Possiamo sempre supporre che a, c, siano primi fra loro, altrimenti ci ridurremo a questo caso trasportando (a, b, c) mediante una sostituzione $\begin{pmatrix} 1\,, & m \\ 0\,, & 1 \end{pmatrix}$ in una forma equivalente

$$(a,\ b+am\ ,\ c+2bm+am^2)\,,$$

e prendendo m primo col massimo comun divisore di a, c. Allora le due forme

$$(a, b, c)\ ,\ (c, b, a)$$

sono concordanti e composte dànno la classe principale

$$(ac, b, 1) \equiv (1, -b, ac) \equiv (1, 0, D)\,.$$

Dunque: *Ogni classe* K *composta colla sua opposta* K′ *dà la classe principale 1.*

Ciò premesso, se si avessero due classi eguali nella serie (8), p. e.

$$K_a K_i = K_b K_i ,$$

componendo colla opposta K'_i di K_i risulterebbe $K_a = K_b$.

Ad ogni classe K_i, adoperata come classe moltiplicatrice di tutte le classi (7), corrisponde adunque una sostituzione s_i sulle classi stesse, ed è chiaro che ad una classe composta

$$K_i K_j$$

corrisponde la sostituzione prodotto

$$s_i s_j$$

e alla classe opposta K_i^{-1} di K_i la sostituzione inversa s_i^{-1}, sicchè se K_i è diversa da K_j anche s_i è diversa da s_j.

Così adunque: *Le h sostituzioni sulle classi*

$$s_1 = 1 , \quad s_2 , \quad s_3 \ldots s_h$$

formano un gruppo d'ordine h di sostituzioni permutabili sulle h classi.

Questo è evidentemente un gruppo Abeliano semplicemente transitivo sulle h classi; esso dicesi *il gruppo di composizione delle forme.*

Diremo *periodo* di una classe K il minimo esponente positivo β, a cui bisogna elevare la classe per ottenere la classe principale 1. Evidentemente sarà allora $K^{\beta-1}$, o K^{-1}, la classe opposta di K.

Meritano particolare menzione quelle classi che coincidono colle proprie opposte, che sono cioè a periodo 2; esse diconsi, secondo Gauss, classi *ancipiti* o *ambigue.* Se (a, b, c) è una forma ancipite, equivalente cioè ad $(a, -b, c)$, i due indici equivalenti $\frac{-b+i\sqrt{D}}{a}$, $\frac{b+i\sqrt{D}}{a}$ sono simmetrici rispetto all'asse immaginario e per ciò, supposta la forma ridotta, il suo indice sarà sul contorno del triangolo fondamentale, onde si vede che sussiste il teorema: *Gli invarianti delle classi ancipiti e questi soltanto sono reali.*

Essendo il gruppo di composizione un gruppo Abeliano, potremo scegliere fra le h classi un certo numero r di classi fondamentali

$$k_1 , \quad k_2 , \ldots k_r$$

per formare una *base* del gruppo [1] e se

$$\beta_1 \ , \ \beta_2 \ , \ . \ . \ . \ \beta_r$$

sono i rispettivi periodi di $k_1, k_2 \ldots k_r$, tutte le h forme saranno date dalle espressioni

$$(a) \qquad k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \ldots k_r^{\alpha_r} \begin{cases} \alpha_1 = 0, 1, 2, \ldots \beta_1 - 1 \\ \alpha_2 = 0, 1, 2, \ldots \beta_2 - 1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_r = 0, 1, 2, \ldots \beta_r - 1 \, , \end{cases}$$

nè alcuna forma si troverà così ripetuta, sicchè sarà

$$h = \beta_1 . \beta_2 . \ldots \beta_r .$$

Una forma (a) sarà ancipite se sussisteranno le congruenze

$$2\alpha_1 \equiv 0 \pmod{\beta_1} \ , \ 2\alpha_2 \equiv 0 \pmod{\beta_2} \ldots 2\alpha_r \equiv 0 \pmod{\beta_r} \, ;$$

e poichè se p. e. β_1 è impari, ne risulta $\alpha_1 \equiv 0 \pmod{\beta_1}$, mentre se β_1 è pari vi è l'altra soluzione $\frac{\beta_1}{2}$, vediamo che il *numero delle classi ancipiti è dato da* 2^n [2], essendo n il numero dei periodi fondamentali $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_r$ che sono pari.

§. 208.

Teoremi varî sulla composizione delle forme.

Prima di applicare la teoria della composizione delle forme all'equazione degli invarianti delle classi, conviene che dimostriamo ancora alcuni teoremi relativi alla composizione, in primo luogo il seguente:

Ogni forma (A, B, C) *si può ottenere come risultato di composizione di successive forme*

$$(p, b, c) \ , \ (p', b', c') \ , \ (p'', b'', c'') \ldots ,$$

i cui primi coefficienti $p, p', p'' \ldots$ *sono numeri primi* [3].

---

[1] Vedi *Teoria dei gruppi.*

[2] Naturalmente è qui computata fra le classi ancipiti anche la principale (a periodo 1).

[3] Un teorema molto più generale, la cui dimostrazione è dovuta a Weber, assicura che in ogni classe primitiva di 1.ª specie vi sono infinite forme il cui primo coefficiente è un numero primo, che cioè fra i numeri rappresentabili da una tale forma ve ne sono infiniti primi. Ma la dimostrazione di questo teorema è assai riposta; per le applicazioni attuali basta la proposizione del testo.

Prendiamo la forma (A, B, C) in guisa che il primo coefficiente sia dispari e primo con D e sia p un fattore primo di A, che, non dividendo D, non dividerà nemmeno B. Ora le due forme primitive di 1.ª specie a determinante D

$$\left(p\,,\ \mathrm{B}\,,\ \frac{\mathrm{AC}}{p}\right)\,,\ \left(\frac{\mathrm{A}}{p}\,,\ \mathrm{B}\,,\ \mathrm{C}p\right)$$

sono evidentemente concordanti e, composte fra loro, dànno appunto

$$(\mathrm{A}\,,\mathrm{B}\,,\mathrm{C}) = \left(p\,,\ \mathrm{B}\,,\ \frac{\mathrm{AC}}{p}\right).\left(\frac{\mathrm{A}}{p}\,,\ \mathrm{B}\,,\ \mathrm{C}p\right).$$

Similmente, se p' è un divisore primo di $\frac{\mathrm{A}}{p}$, avremo

$$\left(\frac{\mathrm{A}}{p}\,,\ \mathrm{B}\,,\ \mathrm{C}p\right) = \left(p'\,,\ \mathrm{B}\,,\ \frac{\mathrm{AC}}{p'}\right)\left(\frac{\mathrm{A}}{pp'}\,,\ \mathrm{B}\,,\ \mathrm{C}pp'\right).$$

Così continuando, vediamo che, se si scinde A nei suoi fattori primi $p, p', p''\ldots$ diversi od eguali

$$\mathrm{A} = p\,p'\,p''\ldots,$$

la forma (A, B, C) si otterrà componendo le successive

$$\left(p\,,\ \mathrm{B}\,,\ \frac{\mathrm{AC}}{p}\right)\,,\ \left(p'\,,\ \mathrm{B}\,,\ \frac{\mathrm{AC}}{p'}\right)\,,\ \left(p''\,,\ \mathrm{B}\,,\ \frac{\mathrm{AC}}{p''}\right)\ldots,$$

ciò che dimostra il teorema

Consideriamo ora in particolare una forma

$$\mathrm{P} = (p,\, b,\, c)\,,$$

il cui primo coefficiente p sia un numero primo dispari che non divida D, del quale quindi $-\mathrm{D}$ sarà residuo quadratico, a causa di

$$pc - b^2 = \mathrm{D},$$

e sia β il periodo della classe P. Alla forma (p, b, c) possiamo sostituirne una equivalente $(p, \mathrm{B}, \mathrm{C})$, in cui sia

$$\mathrm{B} \equiv b \pmod{p}\ ,\ \mathrm{B}^2 \equiv -\mathrm{D} \pmod{p^3}.$$

Come si sa [1], essendo $\left(\frac{-\mathrm{D}}{p}\right) = +1$, la seconda congruenza è sempre

---

[1] Dirichlet. *Zahlentheorie*, §. 35.

solubile ed ha due radici opposte incongrue (mod p) ed una di esse è appunto $\equiv b$ (mod p). Se poniamo

$$B^2+D = Cp^\beta ,$$

avremo

$$P = (p, B, Cp^{\beta-1}) .$$

Essendo p primo con $2B$, potremo comporre la classe P con sè stessa ed avremo

$$P^2 = (p^2, B, Cp^{\beta-2}) .$$

Similmente

$$\begin{aligned} P^3 &= (p^3, B, Cp^{\beta-3}) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ P^{\beta-1} &= (p^{\beta-1}, B, Cp) \\ P^\beta &= (p^\beta , B , C) ; \end{aligned}$$

e poichè per ipotesi P^β è la minima potenza di P che coincide colla classe principale (1, 0, D), se ne conclude che la potenza p^β di p è rappresentabile dalla forma principale

$$x^2 + Dy^2$$

ed è la minima per la quale ciò accade.

Dunque: *Se p è un numero primo non divisore di $2D$ e tale che $\left(\frac{-D}{p}\right) = +1$, esiste una minima potenza p^β di p per la quale è risolubile l'equazione*

$$p^\beta = x^2 + Dy^2 ;$$

questo esponente β è anche il periodo delle due classi opposte rappresentate da forme P col primo coefficiente $= p$.

§. 209.

Trasformazione degli invarianti delle classi.

Dopo queste necessarie preparazioni, veniamo ad un'altra parte della ricerca che utilizza le proprietà delle equazioni modulari, esaminando l'effetto della trasformazione sugli invarianti di classi.

Introduciamo per ciò un'opportuna notazione abbreviata, che ci sarà molto utile. Essendo

$$K_1 , K_2 , \ldots K_h$$

un sistema completo di classi, o di forme loro rappresentanti, a determinante D e primitive di 1.ª specie, indichiamo i corrispondenti valori degli invarianti di classi con

$$(9) \qquad j_{K_1} , j_{K_2} , \ldots j_{K_h} ,$$

ciò che si potrà fare senza alcuna ambiguità, la classe determinando completamente il corrispondente valore dell'invariante e reciprocamente. Gli h valori (9) saranno allora tutte e sole le radici dell'equazione

$$(10) \qquad H_D(j) = 0.$$

Prendiamo ad arbitrio una classe K e la corrispondente radice j_K della (10) e indichiamo con p *un numero primo che non divida* D *e di cui* $-$D *sia residuo quadratico.* Come è ben noto, e dimostrabile elementarmente, vi sono infiniti numeri primi di questa specie [1].

Scegliamo la forma (A, B, C) rappresentante della classe K in guisa che i coefficienti estremi A, C siano ambedue divisibili per p, ciò che facilmente si vede esser sempre possibile [2]. Essendo ora ω l'indice della forma (A, B, C), cioè

$$A\omega^2 + 2B\omega + C = 0 ,$$

---

[1] La proprietà enunciata nel testo equivale a dire che se nell'espressione $x^2 + D$ si fanno percorrere a x gli infiniti numeri interi primi con D, i numeri ottenuti offriranno una serie illimitata di divisori primi. Ciò si dimostra subito osservando che se $p_1, p_2, \ldots p_r$ è una serie finita di numeri primi, non divisori di D, e si pone $x = p_1 p_2 \ldots p_r y$ con y intero, il numero $x^2 + D$ ha i suoi divisori primi fuori di $p_1, p_2, \ldots p_r$.

[2] In primo luogo, se A non è già divisibile per p, trasformando (A, B, C) colla sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$, il nuovo coefficiente A è dato da

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + C\gamma^2 ,$$

e possiamo sempre prendere α, γ primi fra loro in guisa che risulti

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + C\gamma^2 \equiv 0 \pmod{p} ,$$

cioè

$$(A\alpha + B\gamma)^2 \equiv -D\gamma^2 \pmod{p} .$$

assoggettiamo l'invariante $j(\omega) = j_K$ alla trasformazione d'ordine p e, considerando la corrispondente equazione modulare

$$(11) \qquad F_p(j', j(\omega)) = F_p(j', j_K) = 0,$$

esaminiamo se la (11) ha radici comuni colla (10), e quali. Per ciò ricordiamo che le radici della (11) sono

$$j'_\infty = j(p\omega) \ , \ j'_\nu = j\left(\frac{\omega+\nu}{p}\right),$$

percorrendo ν un sistema completo di resti (mod p). Ora, posto successivamente

$$\omega' = p\omega \ , \ \omega' = \frac{\omega+\nu}{p},$$

vediamo che nel primo caso ω' soddisfa all'equazione

$$(12) \qquad \frac{A}{p}\omega'^2 + 2B\omega' + Cp = 0,$$

mentre nell'altro si ha:

$$Ap^2 . \omega'^2 + 2p(B - A\nu)\omega' + (A\nu^2 - 2B\nu + C) = 0.$$

Essendo ν una radice di $\nu^2 \equiv -D \pmod{p}$, basta porre infatti $\alpha \equiv \mu\gamma$ e determinare μ da

$$A\mu + B \equiv \pm\nu \pmod{p}.$$

Supposto ora $A = p^r A'$ e A' non divisibile per p, alla forma

$$(A, B, C)$$

se ne può sostituire una equivalente

$$(A, B + \lambda A, C'),$$

determinando λ in guisa che sia

$$(B + \lambda A)^2 = (B + \lambda p^r A')^2 \equiv B^2 + 2B\lambda p^r A' \equiv -D \pmod{p^{r+1}},$$

per il che essendo

$$B^2 + D = AC = p^r A'C,$$

basterà prendere λ in guisa che si abbia

$$2B\lambda \equiv -C \pmod{p}.$$

Ma allora, poichè $AC' - (B + \lambda A)^2 = D$, sarà AC' divisibile per p^{r+1} e perciò C' per p, come si voleva.

Quando ν è differente da zero (mod p) i tre coefficienti

$$Ap^2 \ , \ 2p(B-A\nu) \ , \ A\nu^2-2B\nu+C$$

sono primi fra loro e quindi le radici

$$j'_1 \ , \ j'_2 \ldots j'_{p-1}$$

sono bensì invarianti di classi, ma col determinante Dp^2 e non soddisfano per ciò la (10). Quando invece $\nu=0$, si ha

$$Ap\omega'^2+2B\omega'+\frac{C}{p}=0$$

e tanto la forma

$$\left(\frac{A}{p} \ , \ B \ , \ Cp\right),$$

corrispondente alla (12), come la $\left(Ap \ , \ B \ , \ \frac{C}{p}\right)$ corrispondente alla precedente, sono primitive di 1.ª specie a determinante D. Dunque si conclude che: *La* (11) *ha a comune colla* (10) *soltanto le due radici*

$$j'_\infty=j(p\omega) \ , \ j'_0=j\left(\frac{\omega}{p}\right).$$

Conviene ora vedere quali sono le classi K_i, K_r indici di queste due radici. Per ciò si osservi che posto

$$P=\left(p \ , \ B \ , \ \frac{AC}{p}\right)$$

si ha (§. 208)

$$\left(Ap \ , \ B \ , \ \frac{C}{p}\right)=\left(p \ , \ B \ , \ \frac{AC}{p}\right).(A, B, C),$$

cioè la classe di $\left(Ap, B, \frac{C}{p}\right)$ è la classe composta PK, sicchè $j'_0=j_{PK}$.

D'altronde l'altra forma $\left(\frac{A}{p} \ , \ B \ , \ Cp\right)$ è equivalente a

$$\left(Cp \ , \ -B \ , \ \frac{A}{p}\right),$$

che si compone delle due

$$P^{-1} = \left(p\,,\ -B\,,\ \frac{AC}{p}\right)\,,\quad K = (A, B, C)$$

e perciò $j'_\infty = j_{P^{-1}K}$.

Abbiamo dunque il teorema: *Se si trasforma un invariante* j_K *di una classe* K *(primitiva di 1.ª specie) a determinante* D *mediante una trasformazione di grado primo* p *non divisore di* D, *e di cui* $-D$ *sia residuo quadratico, l'equazione modulare* (11)

$$F_p(j', j_K) = 0$$

ha due sole radici comuni colla (10)

$$H_D(j') = 0\,,$$

e queste sono gli invarianti di classi

$$j_{PK}\ ,\ j_{P^{-1}K}\,,$$

essendo P, P^{-1} *le due classi opposte rappresentate da forme con primo coefficiente* p.

Ora si hanno due casi essenzialmente diversi, secondo che la classe P è ancipite o no, secondo che cioè il periodo di P è $=2$ ovvero >2.

1.º caso: Nel 1.º caso è $P = P^{-1}$ e le due radici $j_{PK}, j_{P^{-1}K}$ coincidono in un'unica radice doppia della (11), che è invece radice semplice della (10). Il massimo comun divisore dei primi membri delle (10), (11) è

$$j' - j_{PK}\,,$$

e, calcolandolo coi processi di ordinaria divisione, si otterrà j_{PK} in funzione razionale $f(j_K)$ di j_K a coefficienti interi; questa funzione razionale f dipenderà unicamente dal numero primo p, cioè dalla classe P e nulla affatto dalla classe K, i calcoli indicati eseguendosi sulle (10), (11) riguardando in quest'ultima j_K come un parametro. Denoteremo per ciò la funzione razionale f con f_P sicchè avremo

$$j_{PK} = f_P(j_K)\,, \tag{13}$$

e questa relazione varrà qualunque sia la classe K. Abbiamo dunque il teorema:

Se P *è una classe a periodo 2 (ancipite) (ed esiste un numero primo p rappresentabile dalla forma* P [1]), *preso l'invariante* j_K *di una qualunque classe* K, *l'invariante* j_{PK} *della classe composta* PK *è esprimibile razionalmente per* j_K *mediante la* (13), *la* f_P *avendo coefficienti interi e dipendendo unicamente dalla classe* P.

2.° caso: La P sia una classe non ancipite. Allora le due radici

$$j_{PK}\ ,\quad j_{P^{-1}K}\ ,$$

che la (10) ha a comune colla (11), sono distinte e il massimo comun divisore dei due primi membri, che calcoliamo nuovamente in modo razionale per j_K, è il polinomio di 2.° grado

$$j'^2 - (j_{PK} + j_{P^{-1}K})\, j' + j_{PK} \,.\, j_{P^{-1}K}\,,$$

onde vediamo che in questo caso potremo scrivere dapprima soltanto

$$(14)\qquad \begin{cases} j_{PK} + j_{P^{-1}K} = f_P(j_K) \\ j_{PK} \,.\, j_{P^{-1}K} = F_P(j_K)\,, \end{cases}$$

indicando nuovamente f_P, F_P funzioni razionali di j_K con coefficienti interi e dipendenti unicamente dalla classe P, non da K.

Si tratta ora di separare le due radici e ottenere p. e. j_{PK} in funzione razionale di j_K. Ciò è sempre possibile, come dimostreremo; però la nuova funzione razionale di j_K che eguaglia j_{PK} non avrà più coefficienti razionali, ma conterrà invece nei coefficienti l'irrazionalità $i\sqrt{D}$, talchè potremo scrivere

$$(15)\qquad j_{PK} = \varphi_P(j_K,\ i\sqrt{D})\,,$$

la funzione razionale φ_P *dei due argomenti* j_K, $i\sqrt{D}$ *avendo coefficienti interi e dipendendo ancora unicamente dalla forma componente* P, *non dalla* K.

Nella dimostrazione di quest'importante risultato, cioè della formola (15), consiste l'ultimo passo che ci resta a fare per condurre a termine la nostra ricerca.

Un primo metodo per stabilire il teorema enunciato si fonda sulle proprietà delle così dette equazioni del *moltiplicatore* [2]; ma non avendo

---

[1] Quest'ultima condizione non è veramente necessaria, trovandosi sempre soddisfatta pel teorema di Dirichlet (Cf. sopra).

[2] Cf. Weber *l.c.*; Pick, *Math. Annalen* 25; Klein *l.c.*

noi potuto trattare nel presente corso di queste speciali equazioni (risolventi dell'equazione per la divisione dei periodi), non possiamo seguire questa via.

Un secondo metodo, dato da Sylow [1] pel caso del modulo k^2, e che utilizza le proprietà delle equazioni modulari e quelle proprie della moltiplicazione complessa, conduce pure, per via molto naturale, al risultato stesso ed è appunto il metodo che qui adotteremo.

§. 210.

Ritorno all'equazione per la divisione dei periodi e determinazione del suo gruppo.

Ci conviene per ciò ritornare all'equazione per la divisione dei periodi della generale funzione ellittica $\wp u$ in p parti eguali (p numero primo) per determinarne il gruppo di monodromia rispetto ai parametri g_2, g_3 e il gruppo algebrico, quando al campo naturale di razionalità (dei numeri razionali) si aggiungano le indeterminate g_2, g_3 [2].

Ricordiamo che le $\frac{p^2-1}{2}$ radici

$$y_{r,s} = \wp\left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{p}\right) \tag{16}$$

dell'equazione

$$\psi_p(y) = 0 \tag{17}$$

per la divisione dei periodi si ottengono facendo percorrere agli indici (r, s) la metà di un sistema completo di p^2-1 coppie (mod p), esclusa la coppia $(0, 0)$, sicchè queste coppie (r, s) insieme colle opposte $(-r, -s)$, che danno la medesima radice $y_{r,s}$, percorrano il detto sistema completo, esclusa la coppia $(0, 0)$ (Cf. §§. 114, 115). Per ciò gli indici r, s nella (16) si intendono presi (mod p) e si riguardano come identiche le coppie opposte.

---

[1] *Journal de Mathém.* 1887.

[2] Alla dimostrazione del teorema enunciato nella formola (15) non sono propriamente indispensabili le ricerche di questo e del seguente §., ma soltanto le considerazioni alla fine del §. 212; lo studio generale del detto gruppo e del suo abbassamento nel caso particolare della moltiplicazione complessa fa però meglio intendere la ragione del risultato espresso nella (15).

Per determinare il gruppo Γ di monodromia della (17) dobbiamo far descrivere ai parametri g_2, g_3, nei loro rispettivi piani complessi, cammini chiusi ed esaminare la sostituzione indotta sulle radici $y_{r,s}$. Ma, quando g_2, g_3 riprendono i medesimi valori, i periodi 2ω, $2\omega'$ subiscono una sostituzione

$$\begin{pmatrix} \alpha\omega+\beta\omega', & \gamma\omega+\delta\omega' \\ \omega & \omega' \end{pmatrix}$$

a coefficienti interi e a determinante 1, e per ciò

$$y_{r,s} = \wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{p}\right)$$

si cangia in

$$y_{r',s'} = \wp\left(\frac{2r(\alpha\omega+\beta\omega')+2s(\gamma\omega+\delta\omega')}{p}\right),$$

cioè gli indici r', s' subiscono (mod p) la sostituzione

$$(18) \qquad \begin{cases} r' \equiv \alpha r + \gamma s \\ s' \equiv \beta r + \delta s \end{cases} \pmod{p}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{p}$$

e dando nella (18) ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tutti i possibili valori (mod p), che soddisfano alla condizione

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{p},$$

col prescindere inoltre da un cangiamento simultaneo di segno in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, si avrà il gruppo Γ di monodromia, che consta evidentemente di $\frac{p(p^2-1)}{2}$ sostituzioni.

Per determinare il gruppo algebrico G, ci fondiamo sulla nota proprietà che G deve contenere il gruppo di monodromia come sottogruppo invariante. Ogni sostituzione di G deve dunque trasformare Γ in sè stesso e quindi ogni sottogruppo ciclico d'ordine p in Γ in un altro tale sottogruppo.

Ma poichè la più alta potenza di p che divide l'ordine $p\frac{p^2-1}{2}$ di Γ è appunto p, tutti questi sottogruppi ciclici d'ordine p, per un corollario del teorema di Sylow, sono fra loro affini, cioè nascono tutti da uno di essi trasformando questo con una sostituzione di Γ. Se g è una sostituzione qualunque di G che trasformi uno dei detti sottogruppi H_1 in

un altro H_2, combinando g con una conveniente γ di Γ, avremo una nuova sostituzione $g' = g\gamma$ di G (equivalente a g rispetto a Γ) che trasformerà H_1 in sè medesimo. Per sottogruppo ciclico H_1 d'ordine p prendiamo quello generato dalla seguente sostituzione U di Γ

$$\text{U)} \quad \begin{cases} r' \equiv r+s \\ s' \equiv \quad s\,, \end{cases}$$

e basterà limitarsi a cercare quelle sostituzioni di G che trasformano U in una sua potenza. Ora si osservi che la sostituzione U e le sue potenze sono *caratterizzate* da ciò che sono le uniche sostituzioni di Γ per le quali le singole radici

$$(19) \qquad y_{10}\,,\ y_{20}\ \ldots\ y_{p-1\,,\,0}$$

restano fisse [1]. Tutte le sostituzioni di Γ della forma

$$(20) \qquad \begin{cases} r' \equiv \alpha r+\gamma s \\ s' \equiv \quad \delta s \end{cases}, \quad \alpha\delta \equiv 1$$

permutano le radici (19) fra loro e per ciò trasformano U in una potenza di U. Se decomponiamo U nei suoi cicli, abbiamo i $\frac{p-1}{2}$ cicli

$$(y_{0,s}\,,\ y_{s,s}\,,\ y_{2s,s}\ \ldots\ y_{(p-1)s,s})\,,\ s = 1,\ 2,\ \ldots\ \frac{p-1}{2}\,,$$

e con una conveniente sostituzione (20) di Γ portiamo le lettere di un ciclo in quelle di un altro ciclo arbitrario.

Ciò premesso, sia g' una sostituzione di G che trasformi U in una sua potenza e però le lettere di un ciclo in quelle di un altro ciclo. Combinando g' con una sostituzione (20) di Γ, potremo cangiare g' in una equivalente di G che trasformerà ancora U in una sua potenza, in guisa da cangiare p. e. il primo ciclo

$$(y_{01}\ y_{11}\ y_{21}\ \ldots\ y_{p-1\,,\,1})$$

---

[1] Una sostituzione di Γ che lasci fissa y_{10} ha necessariamente la forma

$$\begin{cases} r' \equiv r+\gamma s \\ s' \equiv \quad s \end{cases}$$

e coincide per ciò con U^{γ}.

in una sua potenza. Di più, combinando la g con una conveniente potenza di U stessa, potremo sostituire una $\bar{g}$ equivalente che lasci fissa y_{01}. Ma allora, avendosi per le formole di moltiplicazione dell'argomento

$$(\alpha) \qquad y_{0s} = f(y_{01}),$$

dove f è razionale in y_{01}, con coefficienti razionali in g_2, g_3, e qualunque sostituzione $\bar{g}$ del gruppo di Galois essendo permessa in una tale relazione razionale, segue che la nostra sostituzione $\bar{g}$ lascierà fissa ogni radice

$$y_{0s}\ , \quad \left(s = 1, 2, 3 \ldots \frac{p-1}{2}\right).$$

Supposto che la $\bar{g}$ trasformi U in U^ν, dovrà dunque trasformare ogni ciclo

$$(y_{0s}\ y_{ss}\ y_{2s,s} \ldots y_{(p-1)s,s})$$

nella sua potenza ν

$$(y_{0s}\ y_{\nu s,s}\ y_{2\nu s,s} \ldots)$$

e per ciò in generale

$$y_{r,s} \quad \text{in} \quad y_{\nu r,s} \quad \text{per } s \not\equiv 0.$$

Diciamo che ciò vale non solo per $s \not\equiv 0$, ma anche per $s \equiv 0$, che cioè $\bar{g}$ dovrà portare

$$y_{r0} \quad \text{in} \quad y_{\nu r,0}.$$

Si consideri per ciò l'altra sostituzione V di Γ

$$r' \equiv r\ , \quad s' \equiv r+s\ ,$$

che lascia fisse le radici

$$y_{01}\ , y_{02} \ldots y_{0,\frac{p-1}{2}}$$

e contiene il ciclo

$$(y_{r0}\ y_{rr}\ y_{r,2r} \ldots).$$

La $\bar{g}$ deve trasformare anche la V in una potenza di V e per ciò tutte le lettere del ciclo scritto in quelle di un altro ciclo

$$(y_{r'0}\ y_{r'r'}\ y_{r'2r'} \ldots),$$

e in questo precisamente la y_{r0} in $y_{r'0}$, giacchè la $\bar{g}$ deve permutare

fra loro

$$y_{10}\ y_{20}\ y_{30} \cdots y_{\frac{p-1}{2},\,0}\,.$$

D'altronde

$$y_{rr}\,,\ y_{r,2r}\,,\ y_{r,3r} \cdots \left(r = 1,\ 2,\ \ldots .\ \frac{p-1}{2}\right)$$

sono portate da $\bar{g}$ in

$$y_{\nu r,\,r}\,,\ y_{\nu r,2r}\,,\ y_{\nu r,3r} \cdots ,$$

dunque è $r' \equiv \nu r$. Concludiamo adunque:

La sostituzione cercata $\bar{g}$ di G ha l'espressione analitica

$$r' \equiv \nu r\ ,\quad s' \equiv s \pmod{p}$$
$$(\nu = 1,\ 2,\ 3 \ldots p-1).$$

Combinando colle sostituzioni (18) del gruppo di monodromia Γ, si deduce:

Le sostituzioni del gruppo algebrico G *dell'equazione per la divisione dei periodi hanno tutte la forma lineare*

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r' \equiv ar+bs \\ s' \equiv cr+ds \end{array} \pmod{p} \right\} \quad ad-bc \not\equiv 0\,.$$

Tutte le sostituzioni (21) formano un gruppo d'ordine

$$\frac{(p-1)^2\, p\,(p+1)}{2}$$

e dalla nostra dimostrazione risulta soltanto che il gruppo algebrico G è un suo sottogruppo (contenente Γ). Ciò basta al nostro scopo, ma con ulteriori ricerche si dimostrerebbe che G comprende *tutte* le sostituzioni (21) e che l'irrazionale numerico la cui aggiunta abbassa G a Γ è precisamente la radice p^{ma} dell'unità $e^{\frac{2\pi i}{p}}$.

§. 211.

Abbassamento del gruppo nel caso delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa.

Supponiamo ora che la nostra funzione ellittica $\wp u$ sia una funzione $\wp$ a moltiplicazione complessa, appartenente ad una classe K primitiva di

1.ª specie a determinante D. Il gruppo di Galois della sua equazione per la divisione dei periodi in p parti eguali (p primo) sarà certo un sottogruppo del gruppo generale G definito dalle formole (21) del §. precedente

$$\text{G)} \qquad \begin{cases} r' \equiv ar+bs \\ s' \equiv cr+ds \end{cases} \pmod{p}\,, \quad ad-bc \not\equiv 0\,;$$

ed anzi sappiamo già, dalle nostre ricerche al §. 199, che G devesi in tal caso abbassare ad un suo sottogruppo risolubile per radicali. Ciò vogliamo constatare ora direttamente, per trovare la forma effettiva delle sostituzioni del gruppo di Galois. Ci limiteremo per altro al caso che importa soltanto al nostro scopo, al caso cioè in cui p non divida D e sia $-$D residuo quadratico di p:

$$\left(\frac{-\mathrm{D}}{p}\right) = +1\,.$$

Prenderemo allora la forma (A, B, C) rappresentante della classe K, come al §. 209, in guisa che siano A, C divisibili per p e conseguentemente 2B non divisibile.

Consideriamo dapprima il campo naturale di razionalità, cioè quello dei soli numeri razionali, ampliato coll'aggiunta di g_2, g_3, e in esso determiniamo il gruppo di Galois (o un limite superiore del gruppo) per l'equazione (17) della divisione dei periodi. Per le formole di moltiplicazione complessa elementare si ha

$$\wp(\varepsilon u) = \mathrm{F}(\wp u)\,, \quad (\varepsilon = i\sqrt{\mathrm{D}})$$

dove la F è razionale in $\wp u$ e con coefficienti razionali, appartenendo (A, B, C) alla 1.ª specie. In particolare, facendo nella precedente $u = \dfrac{2r\omega+2s\omega'}{p}$, avremo

$$(22) \qquad \wp\left(\frac{2r\varepsilon\omega+2s\varepsilon\omega'}{p}\right) = \mathrm{F}\left(\wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{p}\right)\right).$$

Ora avendosi (§§. 195, 196):

$$(23) \qquad \begin{cases} \varepsilon\omega = \mathrm{B}\omega + \mathrm{A}\omega' \\ \varepsilon\omega' = -\mathrm{C}\omega - \mathrm{B}\omega'\,, \end{cases}$$

indi

$$\varepsilon \frac{2r\omega+2s\omega'}{p} = 2\,\frac{r(B\omega+A\omega')-s(C\omega+B\omega')}{p},$$

ed essendo inoltre

$$A \equiv C \equiv 0 \pmod{p},$$

la (22) può scriversi, come relazione fra le radici dell'equazione per la divisione dei periodi:

$$(a) \qquad y_{Br,-Bs} = F(y_{rs}),$$

formola che vale per un sistema qualunque di valori degli indici r, s.

Sia ora

$$\begin{cases} r' \equiv ar+bs \\ s' \equiv cr+ds \end{cases} \pmod{p}, \quad ad-bc \not\equiv 0$$

una sostituzione qualunque del gruppo di Galois per la nostra equazione. Per le proprietà fondamentali del gruppo di Galois, la (a) resterà verificata eseguendo sugli indici delle due radici $y_{r,s}$, $y_{Br,-Bs}$ la sostituzione $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$; si avrà cioè

$$y_{B(ar-bs),\,B(cr-ds)} = F(y_{ar+bs,\,cr+ds})$$

D'altronde, se cangiamo direttamente nella (a) r, s in $ar+bs$, $cr+ds$, otteniamo

$$y_{B(ar+bs),\,-B(cr+ds)} = F(y_{ar+bs,\,cr+ds});$$

dunque si ha, qualunque siano r, s:

$$y_{B(ar-bs),\,B(cr-ds)} = y_{B(ar+bs),\,-B(cr+ds)}$$

e poichè $B \not\equiv 0 \pmod{p}$ sarà quindi

$$ar-bs \equiv \pm(ar+bs)$$
$$cr-ds \equiv \mp(cr+ds).$$

Se valgono i segni superiori ne segue

$$b \equiv 0, \quad c \equiv 0 \pmod{p},$$

e quando valgano gli inferiori invece

$$a \equiv 0, \quad d \equiv 0.$$

Di qui deduciamo intanto: *Il gruppo di Galois (nel campo assoluto di razionalità, ampliato coll'aggiunta di g_2, g_3) per l'equazione per la divisione dei periodi in p parti eguali* [1] *nella nostra funzione ellittica $\wp u$ contiene soltanto sostituzioni dell'una o dell'altra delle due forme*

$$\alpha) \qquad r' \equiv ar \ , \ s' \equiv ds \pmod p$$

$$\beta) \qquad r' \equiv bs \ , \ s' \equiv cr \pmod p \ .$$

Queste sostituzioni α) β) formano un gruppo d'ordine $(p-1)^2$, nel quale è contenuto, come sottogruppo invariante d'indice 2, il gruppo di sostituzioni permutabili formato dalle α). Coll'aggiunta di una radice quadrata di un numero razionale, l'equazione diventa quindi Abeliana, conformemente ai risultati del §. 199. Anzi, per quanto si è visto al citato §., è facilmente prevedibile che il detto radicale quadratico è precisamente $\sqrt{-D} = i\sqrt{D}$. Ciò constatiamo ora nel modo seguente. Per le formole di moltiplicazione complessa abbiamo (§. 196)

$$\wp\left((1+\varepsilon)u\right) = \Phi(\wp u) \ ,$$

dove la Φ è razionale in $\wp u$, con coefficienti razionali nel campo

$$\left(g_2 \ , \ g_3 \ , \ i\sqrt{D}\right) .$$

Ponendo nuovamente

$$u = \frac{2r\omega + 2s\omega'}{p} \ ,$$

abbiamo

$$(22^*) \qquad \wp\left((1+\varepsilon)\frac{2r\omega+2s\omega'}{p}\right) = \Phi\left(\wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{p}\right)\right)$$

ed ora procedendo su questa come dianzi sulla (22) troveremo

$$y_{(1+B)r,\,(1-B)s} = \Phi(y_{r,s}) \ ,$$

indi eseguendo la sostituzione $\begin{pmatrix} ar+bs \ , & cr+ds \\ r \ , & s \end{pmatrix}$ dell'attuale gruppo di Galois, avremo le congruenze

$$\begin{cases} \pm(1+B)(ar+bs) \equiv a(1+B)r + b(1-B)s \\ \pm(1-B)(cr+ds) \equiv c(1+B)r + d(1-B)s . \end{cases}$$

---

[1] Si ricordi che ciò vale nell'ipotesi che D non sia divisibile per p e si abbia

$$\left(\frac{-D}{p}\right) = +1.$$

Queste sono bensì soddisfatte dalle sostituzioni della forma α), ma non da quelle della forma β), onde concludiamo:

Se si amplia il campo di razionalità precedente (g_2, g_3) *coll'aggiunta di* $i\sqrt{D}$, *il gruppo di Galois per l'equazione della divisione dei periodi in* p *parti eguali* $\left(\text{nell' ipotesi} \left(\frac{-D}{p}\right) = +1\right)$ *consta di sostituzioni tutte della forma* α)

$$\alpha) \qquad r' \equiv a r \ , \quad s' \equiv d s \pmod{p} \ .$$

§. 212.

Dimostrazione della formola fondamentale (15), §. 209.

Dopo queste ricerche preparatorie siamo in grado di ritornare alle ricerche del §. 209 sulla trasformazione degli invarianti di classi per completarle colla dimostrazione dei teoremi enunciati alla fine di questo §. Riprendiamo adunque la considerazione dell'invariante j_K della classe K e della corrispondente equazione modulare (11)

$$F_p(j', j_K) = 0 \ ,$$

colle $p+1$ radici

$$j'_\infty, j'_1, j'_2 \ldots j'_{p-1} \ .$$

Il suo gruppo di Galois nel campo assoluto di razionalità, ampliato coll'aggiunta di j_K, è certamente contenuto nel gruppo

$$\nu' \equiv \frac{\alpha\nu+\beta}{\gamma\nu+\delta} \pmod{p} \ , \quad \alpha\delta - \beta\gamma \not\equiv 0 \ .$$

Ma siccome questa equazione modulare non è altro che una risolvente di grado $p+1$ dell'equazione per la divisione dei periodi, il suo gruppo sarà subordinato a quello determinato al §. precedente, quando si ponga

$$\nu \equiv \frac{r}{s} \pmod{p}$$

(Cf. §. 116), e però non potrà contenere che sostituzioni della forma derivata da α) o β), cioè

$$\alpha^*) \quad \nu' \equiv \lambda\nu \ , \quad \beta^*) \quad \nu' \equiv \frac{\lambda}{\nu} \ ;$$

e poichè queste sostituzioni lasciano ferme le radici j'_0, j'_∞, o le scambiano

fra loro, si conclude nuovamente che le funzioni simmetriche elementari

$$j'_\infty + j'_0 \; , \; j'_\infty \cdot j'_0$$

sono esprimibili razionalmente per j_K con coefficienti razionali (§. 209). Ma ampliamo ora il campo coll'aggiunta di $i\sqrt{D}$; allora nel gruppo della equazione per la divisione dei periodi restano solo sostituzioni della forma α) e per ciò nel gruppo della equazione modulare solo le sostituzioni della forma α^*), le quali lasciano *singolarmente* invariate

$$j'_0 = j_{PK} \; , \; j'_\infty = j_{P^{-1}K}$$

Ne segue, come era stato enunciato al §. 209, che

$$j_{PK} \; , \; j_{P^{-1}K}$$

si possono esprimere razionalmente per j_K, con coefficienti razionali in $i\sqrt{D}$.

Resta soltanto da provare che nella corrispondente formola (15):

$$j_{PK} = \varphi_P\left(j_K \; , \; i\sqrt{D}\right)$$

la funzione razionale φ_P dipende solo dal numero p, o dalla classe P, e resta la stessa sostituendo a j_K una qualsiasi altra radice di

$$H_D(j) = 0 \; .$$

La dimostrazione sarebbe immediata se avessimo stabilita la proprietà che effettivamente sussiste: *L'equazione* $H_D(j) = 0$ *per gli invarianti delle classi è irriducibile, anche se al campo assoluto di razionalità si aggiunge l'irrazionalità* $i\sqrt{D}$. Ma non volendo inoltrarci nelle considerazioni della teoria dei numeri algebrici che servono allo scopo [1], ricorriamo nuovamente alla equazione per la divisione dei periodi

$$\psi_p(y) = 0$$

per separarne razionalmente $\left(\text{dopo aggiunta } i\sqrt{D}\right)$ i fattori che contengono rispettivamente l'uno le radici

$$y_{10} \; , \; y_{20} \cdots y_{\frac{p-1}{2},0}$$

e l'altro le radici

$$y_{01} \; , \; y_{02} \cdots y_{0,\frac{p-1}{2}} \; .$$

---

[1] Cf. PICK. *Math. Annalen,* 26. WEBER *l. c.*

Essendo sempre (A, B, C) la forma cui corrisponde la nostra $\wp u$ e scelta in guisa che

$$A \equiv C \equiv 0 \pmod{p},$$

si esprimano colle formole di moltiplicazione complessa

$$\wp[(B+\varepsilon)u] \quad , \quad \wp[(B-\varepsilon)u]$$

razionalmente per $\wp u$, ciò che si otterrà colla formola

$$\wp[(B+\varepsilon)u] = \frac{U(\wp u, i\sqrt{D})}{V(\wp u, i\sqrt{D})}, \tag{24}$$

essendo U, V polinomii razionali interi in $\wp u$ con coefficienti razionali in g_2, g_3, $i\sqrt{D}$ e deducendosi manifestamente la formola per $\wp((B-\varepsilon)u)$ col cangiare il segno di $i\sqrt{D}$ (Cf. §. 196):

$$\wp[(B-\varepsilon)u] = \frac{U(\wp u, -i\sqrt{D})}{V(\wp u, -i\sqrt{D})}. \tag{24*}$$

Si consideri ora l'equazione

$$V(\wp u, i\sqrt{D}) = V(y, i\sqrt{D}) = 0,$$

e si cerchi se e quali radici ha a comune con

$$\psi_p(y) = 0,$$

cioè si cerchino i valori

$$y_{r,s} = \wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{p}\right)$$

che annullano $V(\wp u, i\sqrt{D})$. Per essi $\wp[(B+\varepsilon)u]$ deve diventare infinita senza che lo diventi $\wp u$, e viceversa ogni valore di u della forma $\frac{2r\omega+2s\omega'}{p}$, esclusa la combinazione $(r, s) \equiv (0, 0)$, tale che renda $\wp[(B+\varepsilon)u]$ infinita, è uno dei richiesti.

Per ciò è necessario e sufficiente che r, s siano tali da rendere

$$(B+\varepsilon)\frac{2r\omega+2s\omega'}{p}$$

eguale a un multiplo di periodi. Ora, per le formole (23), si puo scrivere

$$(B+\varepsilon)\frac{2r\omega+2s\omega'}{p} = 2\frac{rB\omega+sB\omega'}{p} + 2\frac{r(B\omega+A\omega')-s(C\omega+B\omega')}{p}$$

ossia, poichè $A \equiv C \equiv 0 \pmod{p}$, se trascuriamo multipli di periodi:

$$(B+\varepsilon)\,\frac{2r\omega+2s\omega'}{p} \equiv 4\,\frac{rB\omega}{p}\,.$$

Dunque è necessario e sufficiente che sia

$$r \equiv 0 \pmod{p};$$

cioè: *Il massimo comun divisore di* $V(y, i\sqrt{D})$, $\psi_p(y)$ è

$$\chi(y) = (y-y_{01})\,(y-y_{02})\ldots(y-y_{0,\frac{p-1}{2}}).$$

Questo polinomio $\chi(y)$ si calcolerà quindi razionalmente e i suoi coefficienti conterranno razionalmente $g_2, g_3, i\sqrt{D}$; di più, a causa della natura delle formole di moltiplicazione complessa, *l'espressione così trovata per* $\chi(y)$ *varrà indistintamente per tutte le* $\wp u$ *a moltiplicazione complessa*, corrispondenti a forme primitive di 1.ª specie a determinante D.

Se, invece di considerare il polinomio $V(y, i\sqrt{D})$, avessimo considerato l'altro

$$V(y, -i\sqrt{D}),$$

manifestamente pel suo massimo comun divisore $\chi_1(y)$ con $\psi_p(y)$ avremmo trovato

$$\chi_1(y) = (y-y_{10})\,(y-y_{20})\ldots(y-y_{\frac{p-1}{2},0}).$$

Per venire infine alla nostra ricerca, si consideri che j'_0 è funzione simmetrica di

$$y_{01}\,,\ y_{02}\ldots y_{0,\frac{p-1}{2}}$$

(vedi formole (III), pag. 436) e però esprimibile razionalmente per $g_2, g_3, i\sqrt{D}$, con coefficienti razionali. Ma poichè l'invariante assoluto dipende solo dal rapporto dei periodi, mentre g_2, g_3 si cangiano a volontà in $\lambda^4 g_2, \lambda^6 g_3$, con osservazioni perfettamente analoghe a quelle del §. 168 per le equazioni generali modulari, ne concludiamo che si avrà

$$j'_0 = j_{PK} = \varphi_P(j_K, i\sqrt{D})$$

e la funzione φ, indicata al §. 209 formola (15) con φ_P dipenderà appunto unicamente, come ivi era stato asserito, dalla classe P, non da K. Vediamo ora di più che l'altra radice j'_∞ si ottiene semplicemente cangiando

in φ_P il segno di $i\sqrt{D}$, cioè si hanno le formole

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} j_{PK} = \varphi_P(j_K, \ i\sqrt{D}) \\ j_{P^{-1}K} = \varphi_P(j_K, -i\sqrt{D}). \end{cases}$$

§. 213.

Gruppo di Galois per l'equazione $H_D(j) = 0$ e sua risolubilità per radicali.

Applicando le formole ora trovate e il teorema del §. 208, secondo il quale qualunque forma (o classe) può comporsi con successive forme

$$P = (p, b, c) \ , \quad P' = (p', b', c') \ , \quad P'' = (p'', b'', c'') \ldots$$

i cui primi coefficienti siano numeri primi, siamo ora in grado di estendere le formole (A) a qualunque classe e pervenire così al risultato finale, dimostrando la risolubilità per radicali della equazione per gli invarianti delle classi

$$H_D(j) = 0.$$

Cominciamo dallo scrivere le due formole (A)

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} j_{PK} = \varphi_P(j_K, \ i\sqrt{D}) \\ j_{P'K} = \varphi_{P'}(j_K, \ i\sqrt{D}) \end{cases}$$

e mutando, come è lecito, nella prima j_K in $j_{P'K}$ avremo

$$j_{PP'K} = \varphi_P(j_{P'K}, \ i\sqrt{D}) = \varphi_P(\varphi_{P'}(j_K, i\sqrt{D}), \ i\sqrt{D}),$$

che scriveremo

$$j_{PP'K} = \varphi_{PP'}(j_K, \ i\sqrt{D}),$$

ove la funzione razionale $\varphi_{PP'}$ resterà la medesima cangiando comunque la classe K. Se si cangia invece nella seconda delle (B) K in PK si trova

$$j_{PP'K} = (\varphi_{P'}(\varphi_P(j_K, \ i\sqrt{D}), \ i\sqrt{D}) = \varphi_{P'P}(j_K, \ i\sqrt{D}),$$

onde si vede che

$$\varphi_{PP'}(j_K, \ i\sqrt{D}) = \varphi_{P'P}(j_K, \ i\sqrt{D})$$

e la funzione $\varphi_{PP'}$ dipende in sostanza unicamente dalla classe composta

PP'. Similmente si stabilirebbe la formola

$$j_{PP'P''K} = \varphi_{PP'P''}(j_K, i\sqrt{D})$$

e così via per un numero qualunque di classi P componenti. Se ne conclude quindi il teorema:

Essendo K, K' *due classi qualunque fra*

$$K_1, K_2, \ldots K_h,$$

si ha la formola

$$\text{(C)} \qquad j_{K'K} = \varphi_{K'}(j_K, i\sqrt{D}),$$

la funzione razionale $\varphi_{K'}$ *dipendendo unicamente dalla seconda classe* K', *non dalla prima* K.

Cangiando in $\varphi_{K'}$ il segno del radicale $i\sqrt{D}$ si passa alla classe opposta K'^{-1}; si ha cioè

$$\text{(C*)} \qquad j_{K'^{-1}K} = \varphi_{K'}(j_K, -i\sqrt{D}).$$

Ed ora possiamo determinare, nel campo di razionalità dei numeri razionali ampliato coll'aggiunta di $i\sqrt{D}$, la natura del gruppo di Galois per l'equazione degli invarianti delle classi

$$H_D(j) = 0,$$

le cui radici sono

$$j_{K_1}, j_{K_2} \ldots j_{K_h}.$$

Supponiamo infatti che, essendo $K_1 = 1$ la classe principale, una sostituzione S del gruppo di Galois porti j_{K_1} in j_{K_r}. Essendo K_s una qualunque delle classi si ha per la (C)

$$j_{K_s K_r} = \varphi_{K_s}(j_{K_r}, i\sqrt{D})$$

ed anche

$$j_{K_s} = \varphi_{K_s}(j_1, i\sqrt{D}).$$

In quest'ultima relazione eseguiamo, come è lecito, la sostituzione S del gruppo di Galois la quale porta per ipotesi j_1 in j_{K_r} e ne risulterà che S porterà j_{K_s} in

$$\varphi_{K_s}(j_{K_r}, i\sqrt{D}) = j_{K_s K_r}.$$

Dunque la S produce sulle radici

$$j_{K_1}, j_{K_2} \cdots j_{K_h}$$

la permutazione

$$j_{K_1 K_r}, j_{K_2 K_r} \cdots j_{K_h K_r},$$

cioè cangia i loro indici secondo la sostituzione K_r del gruppo di composizione delle classi (§. 207). Se ne conclude:

Nel campo dei numeri razionali, ampliato coll'aggiunta di $i\sqrt{D}$, *il gruppo* G *di Galois per l'equazione*

$$H_D(j) = 0$$

degli invarianti delle classi è contenuto nel gruppo di composizione delle forme.

In ogni caso G è un gruppo Abeliano e per ciò si ha il teorema finale d'Abel a cui miravano le nostre ricerche:

L'equazione $H_D(j)=0$ *è risolubile per radicali.*

L'incertezza lasciata dalle nostre ricerche se il gruppo di Galois di $H_D(j)=0$ coincida col gruppo di composizione, o ne sia soltanto un sottogruppo, si toglierebbe colla dimostrazione già sopra accennata della *irriducibilità* dell'equazione; e poichè il gruppo di composizione sulle forme è semplicemente transitivo, si avrebbe il risultato definitivo: *Il gruppo di Galois per* $H_D(j)=0$, *nel campo di razionalità* $(1, i\sqrt{D})$, *coincide (è oloedricamente isomorfo) col gruppo di composizione delle classi.*

In fine possiamo determinare il gruppo di Galois di $H_D(j)=0$ nel campo assoluto di razionalità, prima cioè dell'aggiunta di $i\sqrt{D}$. I teoremi generali ci assicurano che questo nuovo gruppo Γ, se è effettivamente più ampio, conterrà G come sottogruppo invariante d'indice 2, abbassandosi Γ a G per l'aggiunta della radice quadrata $\sqrt{-D}$. Ora associamo alle sostituzioni del gruppo di composizione G quella sostituzione S che consiste nel cangiare ogni forma nella propria opposta (inversa); la S non appartiene a G (salvo quando, essendo ancipiti tutte le classi, S è l'identità) ed è permutabile, come subito si vede con G. Per ciò

$$\Gamma = [G, SG]$$

è un gruppo d'ordine $2h$, che contiene G come sottogruppo invariante.

Ora dimostriamo facilmente che: *Il gruppo dell'equazione* $H_D(j)=0$, *nel campo assoluto di razionalità, coincide col gruppo* Γ *così ampliato dal gruppo di composizione (ovvero ne è un sottogruppo).*

Consideriamo infatti una funzione razionale *a coefficienti razionali*

$$F(j_{K_1}, j_{K_2}, \ldots j_{K_h})$$

delle radici di $H_D(j) = 0$, che rimanga invariata per tutte *e sole* le sostituzioni di Γ e dimostriamo che il suo valore è quello di un numero razionale, dopo di che sarà appunto provato il teorema. Certamente se aggiungiamo $i\sqrt{D}$ la F è razionalmente nota, perchè le sostituzioni di G la lasciano invariata; dunque si ha

$$F(j_{K_1}, j_{K_2} \ldots j_{K_h}) = a + i\,b\sqrt{D}\,,$$

con a, b numeri razionali. Ma di più la F rimane invariata numericamente cangiando ogni classe nella propria opposta, cioè ogni radice j_K nella *coniugata* $j_{K^{-1}}$, e per ciò il suo valore è reale, onde $b = 0$, ciò che prova l'asserzione.

§. 214.

Decomposizione di $H_D(j)$ in fattori corrispondenti ai generi delle forme secondo Kronecker.

L'equazione $H_D(j) = 0$ è irriducibile, come già si è detto, non solo nel campo assoluto di razionalità, ma anche dopo l'aggiunta di $i\sqrt{D}$. Però Kronecker, nelle sue celebri comunicazioni all'Accademia di Berlino sulla teoria della moltiplicazione complessa, ha trovato che appena si aggiungano convenienti radici quadrate reali (di fattori del determinante D) il polinomio $H_D(j)$ diventa riducibile e si spezza nel prodotto di tanti fattori, di egual grado, quanti sono i *generi* delle forme quadratiche, secondo la definizione di Gauss [1], le radici di ciascun fattore appartenendo appunto alle classi di un medesimo genere.

Di questi bei risultati, dovuti a Kronecker, vogliamo qui soltanto stabilire quella parte che discende senz'altro dalla natura del gruppo Γ della nostra equazione. Per ciò stabiliamo in primo luogo la ripartizione delle h classi in generi, sotto la forma più breve che ci consentono le nozioni acquistate sul gruppo di composizione.

Se si considerano tutte le seconde potenze delle h classi

$$K_1^2\,,\ K_2^2\,,\ K_3^2 \ldots K_h^2\,,$$

---

[1] *Disquisitiones* art. 229-233. — DIRICHLET-DEDEKIND. *Zahlentheorie*. Supplemento IV.

e si indicano con

$$k_1\ ,\ k_2\ ,\ k_3 \ldots k_s$$

le classi distinte così risultanti, è manifesto che queste classi, ottenute per duplicazione, formano per sè un gruppo, cioè un sottogruppo H del gruppo G di composizione. Quindi segue che il numero s è un divisore di h; e ripartendo le sostituzioni (o classi) del gruppo totale G rispetto a quelle del sottogruppo H, otterremo il quadro:

$$\text{(D)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} k_1\ ,\ k_2\ ,\ k_3 \ldots k_s \\ k_1 k'_2\ ,\ k_2 k'_2\ ,\ k_3 k'_2 \ldots k_s k'_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_1 k'_q\ ,\ k_2 k'_q\ ,\ k_3 k'_q \ldots k_s k'_q\ , \end{array} \right. .$$

dove con

$$k'_2\ ,\ k'_3\ ,\ \ldots k'_q$$

abbiamo indicato le classi moltiplicatrici, il cui numero q è l'*indice* di H in G.

Le classi contenute nel quadro (D) in una medesima orizzontale costituiscono un *genere* secondo Gauss, in particolare quelle della prima orizzontale il così detto *genere principale;* il numero q non è altro che il numero dei generi distinti. Facilmente dimostriamo che q è una potenza esatta del 2 e precisamente si ha il teorema:

Il numero q dei generi eguaglia il numero 2^n delle classi ancipiti (§. 207).

Se riprendiamo infatti la rappresentazione di ogni classe per mezzo di una base

$$K_1\ ,\ K_2\ ,\ \ldots K_r\ ,$$

ricordata alla fine del citato §. 207, quando sia

$$K = K_1^{\alpha_1} K_2^{\alpha_2} \ldots K_r^{\alpha_r}\ ,$$

vediamo che K apparterrà al genere principale (si otterrà per duplicazione) allora soltanto quando gli esponenti α siano tutti pari, o tali possano ridursi sostituendo a ciascuno di essi un esponente congruo rispetto al corrispondente modulo β. Ora ciò può sempre ottenersi per quegli esponenti α il cui corrispondente modulo (periodo) β è impari, mentre quando β è pari avremo solo $\frac{\beta}{2}$ valori possibili (pari) per α ed incongrui (mod β).

Dunque indicando, come al §. 207, con n il numero delle β pari, si ha

$$s = \frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r}{2^n},$$

e quindi

$$q = \frac{h}{s} = 2^n, \text{ c. d. d.}$$

Se si compongono fra loro due classi qualunque prese l'una nella orizzontale m^{ma}, l'altra nella m'^{ma}, il numero d'ordine della orizzontale cui appartiene la classe composta dipenderà unicamente da m, m'. In altre parole il gruppo di composizione sulle classi è imprimitivo e i singoli generi formano altrettanti sistemi d'imprimitività. Il gruppo di sostituzioni indotto da G sui generi, che diciamo il gruppo di composizione sui generi, è un gruppo Abeliano d'ordine 2^n semplicemente transitivo e le sue sostituzioni

$$H_1, \; H_2 \ldots H_{2^n}$$

sono tutte a periodo 2 (salvo naturalmente l'identità), perchè due classi del medesimo genere si compongono in una classe del genere principale.

Invece due generi diversi non possono comporsi nel genere principale, onde segue che due classi opposte (componendosi nella principale) appartengono necessariamente allo stesso genere. Se consideriamo dunque il gruppo Γ ampliato da G associandovi la sostituzione che cangia ogni classe nella sua opposta, non solo rispetto a G, ma ben anche rispetto a Γ i 2^n generi costituiranno sistemi d'imprimitività. Ora Γ è il gruppo di $H_D(j) = 0$ nel campo assoluto di razionalità o almeno (stando soltanto a quello che abbiamo propriamente dimostrato) certamente lo contiene. Se ordiniamo le radici di $H_D(j) = 0$ nel quadro corrispondente al quadro (D)

$$(D^*) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} j_{k_1} & j_{k_2} & \ldots & j_{k_s} \\ j_{k_1 k'_2} & j_{k_1 k'_2} & \ldots & j_{k_1 k'_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ j_{k_1 k'_q} & j_{k_2 k'_q} & \ldots & j_{k_s k'_q} \end{array} \right.$$

e prendiamo una funzione razionale simmetrica delle radici di una orizzontale, con coefficienti razionali reali, p. e.

$$(25) \qquad x = j_{k_1}^m + j_{k_2}^m + \ldots + j_{k_s}^m \quad (m \text{ intero}),$$

questa, per le sostituzioni di Γ, assumerà solo $q = 2^n$ valori

$$x_1 \ , \ x_2 \ldots . \ x_{2^n} \ , \tag{26}$$

corrispondenti alle orizzontali del quadro (D*) e questi 2^n valori saranno numericamente distinti, ove si scelga opportunamente la detta funzione simmetrica. Inoltre essi saranno tutti reali, comparendo in essa funzione simmetrica insieme ad un invariante j_K il coniugato j_{K-1}. Pei teoremi generali questi 2^n valori (26) saranno radici di una risolvente di grado 2^n, che indicheremo con

$$\psi_{2^n}(x) = 0 \ , \tag{27}$$

la quale avrà coefficienti reali interi e radici pure reali. Inoltre si potrà supporre che il primo coefficiente sia eguale all'unità, scegliendo la funzione risolvente intera e a coefficienti interi. La risoluzione di questa ausiliaria produce (in ordine ai detti teoremi) nel polinomio $H_D(j)$ appunto lo spezzamento in 2^n fattori, contenenti ciascuno le radici j_K che appartengono a classi del medesimo genere. Il gruppo della risolvente (27) è isomorfo col gruppo di composizione sui generi (o vi è contenuto come sottogruppo). Ma questo gruppo Σ è Abeliano di grado 2^n e non ha che sostituzioni a periodo 2, onde facilmente vediamo che l'equazione si risolve estraendo n radici quadrate separate

$$\sqrt{a_1} \ , \ \sqrt{a_2} \ldots . \ \sqrt{a_n} \ ,$$

che portano sopra numeri interi e positivi. E infatti, se rappresentiamo le sostituzioni σ di Σ mediante una base, questa, avendo ogni sostituzione generatrice a periodo 2, consterà di n termini

$$\sigma_1 \ , \ \sigma_2 \ldots \sigma_n$$

e si avrà

$$\sigma = \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \ldots \sigma_n^{\alpha_n} \ , \tag{28}$$

ciascun esponente α avendo il valore 0 o 1. Ora consideriamo gli n sottogruppi di Σ d'ordine 2^{n-1}

$$\sum_1 = [\sigma_2 \ , \ \sigma_3 \ , \ \ldots \ \sigma_n]$$

$$\sum_2 = [\sigma_1 \ , \ \sigma_3 \ , \ \ldots \ \sigma_n]$$

$$\sum_n = [\sigma_1 \ , \ \sigma_2 \ , \ \ldots \ \sigma_{n-1}] \ ,$$

che hanno la sola sostituzione identica a comune. Se costruiamo una funzione razionale intera a coefficienti interi delle radici della (27) che rimanga invariata per tutte e sole le sostituzioni di Σ_1, essa darà luogo ad una risolvente di 2.° grado a radici reali della (27) e l'aggiunta di un radicale quadrato $\sqrt{a_1}$, che porta sopra un numero razionale intero e positivo a_1, abbasserà il gruppo Σ a Σ_1. Procedendo medesimamente per gli altri sottogruppi $\Sigma_2, \Sigma_3 \ldots \Sigma_n$, l'aggiunta simultanea degli indicati radicali

$$\sqrt{a_1}\,,\ \sqrt{a_2}\ \ldots\ \sqrt{a_n}$$

abbasserà Σ al sottogruppo comune di

$$\sum_1\,,\ \sum_2\,,\ \ldots\ \sum_n\,,$$

cioè all'identità, ciò che dimostra quanto sopra è asserito. Concludiamo adunque:

Per spezzare il polinomio $H_D(j)$ *in* 2^n *fattori corrispondenti ai generi delle forme quadratiche, basta l'aggiunta al campo assoluto di razionalità di* n *radici quadrate*

$$\sqrt{a_1}\,,\ \sqrt{a_2}\,,\ \ldots\ \sqrt{a_n}$$

estratte sopra n *numeri* $a_1, a_2 \ldots a_n$ *razionali, interi e positivi.*

Un più profondo esame dimostrerebbe che questi numeri $a_1, a_2 \ldots a_n$ non sono altro che fattori primi del determinante D, o loro prodotti [1]. Ma le ulteriori ricerche necessarie alla dimostrazione precisa dei teoremi di Kronecker, come quelle che riguardano la più volte mentovata irriducibilità dell'equazione $H_D(j) = 0$ per gli invarianti delle classi eccederebbero i limiti imposti alle presenti lezioni.

---

[1] Cf. WEBER *l. c.* §§. 103-106.

INDICE

PARTE PRIMA

Teoria delle funzioni di variabile complessa.

Capitolo I.

Funzioni di variabile complessa secondo Cauchy-Riemann. — Serie di potenze e loro proprietà. — Rappresentazioni conformi.

§. 1. — Piano complesso e sfera complessa . . . . . pag. 3
2. — Funzioni di variabile complessa . . . . . » 5
3. — Serie di potenze. — Cerchio di convergenza . . . . » 10
4. — Serie derivata . . . . . » 13
5. — Teorema di Cauchy-Hadamard . . . . . » 15
6. — Funzioni elementari e^z, sen z, cos z, log z, z^a . . . » 18
7. — Serie di potenze sulla periferia del cerchio di convergenza . » 21
8. — Rappresentazioni conformi . . . . . » 23
9. — Esempî diversi . . . . . » 27

Capitolo II.

Sostituzioni lineari. — Gruppi discontinui di sostituzioni lineari e loro rappresentazione geometrica.

§. 10. — Sostituzioni lineari ed affinità circolari . . . . . pag. 31
11. — Composizione delle sostituzioni . . . . . » 34
12. — Classificazione delle sostituzioni di 1.ª specie . . . » 37
13. — Sostituzioni di 2.ª specie. — Riflessioni . . . . . » 39
14. — Gruppi discontinui di sostituzioni lineari . . . . . » 42
15. — Sottogruppi . . . . . » 45
16. — Gruppi ciclici e loro campo fondamentale . . . . . » 46
17. — Gruppi di sostituzioni paraboliche . . . . . » 48
18. — Gruppo modulare. — Circoli e rette di riflessione . . . » 53
19. — Il triangolo fondamentale del gruppo ampliato . . . » 56
20. — La rete modulare e le riflessioni generatrici A, B, C . . » 59
21. — Triangolo fondamentale del gruppo modulare . . . . » 61
22. — Sostituzioni ellittiche del gruppo modulare . . . . . » 64
23. — Forme binarie quadratiche a determinante negativo . . » 65
24. — L'affinità circolare trasportata nello spazio e le formole di Poincarè . . . . . » 68

§. 25. — Il gruppo delle sostituzioni unimodulari a coefficienti interi complessi . . . . . pag. 72
26. — Decomposizione di un numero nella somma di quattro quadrati » 76

Capitolo III.

Trasformazioni di integrali doppi in integrali semplici. — Funzioni armoniche e loro proprietà fondamentali. — Problema di Dirichlet e sua risoluzione nel caso del campo circolare.

§. 27. — Integrali curvilinei. — Integrali doppi . . . . . pag. 78
28. — Formola di Gauss . . . . . » 82
29. — Altre formole di trasformazione . . . . . » 86
30. — Ordine di connessione delle aree piane . . . . . » 88
31. — Integrali di differenziali esatti . . . . . » 91
32. — Formola di Green . . . . . » 95
33. — Funzioni armoniche con derivate regolari al contorno . . » 97
34. — Funzione di Green . . . . . » 101
35. — Massimi e minimi delle funzioni armoniche . . . . » 102
36. — Problema di Dirichlet . . . . . » 105
37. — L'integrale di Gauss $\int_s \frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds$ . . . . . » 106
38. — Studio dell'integrale $\frac{1}{\pi}\int_s \mathrm{U}\frac{\partial \log\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} ds$ . . . . . » 109
39. — Risoluzione del problema di Dirichlet pel campo circolare . » 113

Capitolo IV.

Integrali di funzioni di variabile complessa. — Teorema fondamentale di Cauchy e sue conseguenze. — Sviluppi in serie di Taylor. — Sviluppo di Laurent. — Concetto di funzione analitica secondo Weierstrass. — Serie di funzioni analitiche.

§. 40. — Integrali definiti di funzione di variabile complessa . . pag. 117
41. — Teorema di Cauchy. — Integrali indefiniti . . . . . » 119
42. — Formola di Cauchy . . . . . » 121
43. — Sviluppi in serie di potenze . . . . . » 123
44. — Sviluppo di Laurent . . . . . » 127
45. — Funzioni analitiche . . . . . » 129
46. — Campo di esistenza di una funzione analitica . . . . » 132
47. — Serie di funzioni analitiche . . . . . » 135
48. — Applicazioni . . . . . » 137

Capitolo V.

Punti singolari delle funzioni monodrome. — Poli e punti singolari essenziali. — Residui. — Integrale logaritmico. — Inversione delle serie di potenze.

§. 49. — Punti regolari . . . . . pag. 140
50. — Infinitesimi . . . . . » 142
51. — Punti singolari. — Poli . . . . . » 143
52. — Esempî di singolarità essenziali . . . . . » 146
53. — Residui . . . . . » 148
54. — L' integrale $\int_s w(z)\,dz$ nel caso di punti singolari interni . » 151
55. — Polidromia dell' integrale indefinito . . . . . » 152
56. — Indicatore logaritmico . . . . . » 154
57. — Formola: $\Omega_1 - \Omega_0 = 2\pi(N_0 - N_\infty)$ . . . . . » 157
58. — Inversione delle serie . . . . . » 160

Capitolo VI.

Funzioni uniformi in tutto il piano complesso. — Loro sviluppi in serie di frazioni parziali secondo Cauchy. — Teorema di Mittag-Leffler. — Sviluppi in prodotti infiniti per le trascendenti intere.

§. 59. — Trascendenti intere . . . . . pag. 163
60. — Punti singolari essenziali . . . . . » 165
61. — Funzioni uniformi con un numero finito di singolarità . » 167
62. — Metodo di Cauchy per gli sviluppi in serie di frazioni parziali » 169
63. — Due casi particolari . . . . . » 171
64. — Sviluppi in serie per $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$, $\cot z$ . . . . . » 174
65. — Teorema di Mittag-Leffler . . . . . » 178
66. — Costruzione di una trascendente intera per prodotti infiniti » 181
67. — Forma degli esponenti $Q_{m_n}(z)$ . . . . . » 184
68. — Genere delle trascendenti intere. — La Γ Euleriana . . » 186
69. — Caso in cui le distanze fra i punti d' infinitesimo si mantengono superiori a una quantità fissa . . . . . » 189

Capitolo VII.

Funzioni analitiche di più variabili complesse. — Funzioni implicite. — Proprietà fondamentali delle funzioni algebriche.

§. 70. — Funzioni regolari di due variabili complesse . . . pag. 191
71. — Serie di potenze . . . . . » 194
72. — Campo ristretto di convergenza. — Prolungamento analitico » 196
73. — Radici di un' equazione $f(w, z) = 0$ . . . . . » 197
74. — Teorema di Weierstrass . . . . . » 200
75. — Funzioni implicite . . . . . » 202
76. — Funzioni algebriche . . . . . » 203
77. — Teorema fondamentale . . . . . » 205
78. — Punti di diramazione . . . . . » 207

§. 79. — Singolarità polari . . . . . pag. 209
80. — Le funzioni algebriche come funzioni analitiche . . . » 211
81. — Gruppo di monodromia . . . . . » 213
82. — Sostituzioni elementari del gruppo di monodromia . . » 214

Capitolo VIII.

Prime nozioni sulle superficie di Riemann e sugli integrali Abeliani.

§. 83. — Concetto generale della superficie Riemanniana . . . pag. 217
84. — La superficie Riemanniana a due fogli per $w = \sqrt{P(z)}$. » 219
85. — Deformazione della superficie Riemanniana in quella di una sfera, di un anello ecc. . . . . » 221
86. — La superficie Riemanniana a m fogli . . . . . » 223
87. — Funzioni uniformi sulla superficie Riemanniana . . . » 226
88. — Teorema di Cauchy, residui e indicatore logaritmico . . » 229
89. — Funzioni razionali sulla superficie Riemanniana . . . » 232
90. — Nozioni sugli integrali Abeliani . . . . . » 235
91. — Caso iperellittico . . . . . » 238
92. — Il genere p secondo Riemann . . . . . » 243

PARTE SECONDA

Teoria delle funzioni ellittiche.

Capitolo IX.

Le funzioni fondamentali σu, $\wp u$ di Weierstrass. — Le funzioni generali ellittiche espresse per la σu. — Equazione differenziale per la $\wp u$.

§. 93. — Cenni storici sulla teoria delle funzioni ellittiche . . pag. 249
94. — Costruzione della funzione σu di Weierstrass . . . » 252
95. — Proprietà fondamentali della σu . . . . . » 255
96. — Le funzioni ζu, $\wp u$ e la doppia periodicità di $\wp u$, $\wp' u$. » 258
97. — Effetto dell'aggiunta di periodi all'argomento di σu . . » 260
98. — Proprietà generali delle funzioni ellittiche . . . . » 263
99. — Ordine di una funzione ellittica e teorema d'Abel . . » 264
100. — Espressione di una funzione ellittica con infinitesimi ed infiniti assegnati . . . . . » 267
101. — Funzioni doppiamente periodiche di 1ª, 2ª, e 3ª categoria . » 270
102. — Formola $\wp u - \wp v = \frac{\sigma(v+u)\,\sigma(v-u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}$ ed equazione ai tre termini per la σ . . . . . » 272

§. 103. — Equazione differenziale per la $\wp u$: $\wp'^2 = 4\,\wp^3 - g_2\,\wp - g_3$. pag. 274
104. — Gli invarianti g_2, g_3 e gli sviluppi di $\wp u$, ζu, σu nell'intorno di $u = 0$ . . . . . » 277

Capitolo X.

Decomposizione di una funzione ellittica in elementi semplici. — Teorema d'addizione per la ζu e la $\wp u$. — Le funzioni ellittiche espresse razionalmente per $\wp u$, $\wp' u$. — Moltiplicazione e divisione dell'argomento nella $\wp u$.

§. 105. — Costruzione di una funzione ellittica con assegnati termini d'infiniti . . . . . pag. 281
106. — Formole d'addizione per la ζu e la $\wp u$ . . . . . » 282
107-108. — Espressione di una funzione ellittica per $\wp u$, $\wp' u$. » 286
109. — Funzioni uniformi con un teorema d'addizione . . . » 291
110. — Moltiplicazione dell'argomento in $\wp u$ . . . . . » 294
111. — La funzione $\psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2} u}$ . . . . . » 295
112. — Calcolo delle funzioni ψ_n per formole ricorrenti . . . » 298
113. — Divisione dell'argomento nella $\wp u$ . . . . . » 300
114. — Equazione per la divisione dei periodi . . . . . » 304
115. — Risolventi di grado $n+1$ e loro gruppo . . . . . » 307
116. — Divisione dei periodi nella $\wp$ lemniscatica . . . . . » 309

Capitolo XI.

Proprietà fondamentali della prima funzione modulare $J(\tau)$. — La funzione $\wp(u; g_2, g_3)$ con assegnati invarianti. — Integrali ellittici di prima specie e loro inversione. — Integrali ellittici generali.

§. 117. — L'invariante assoluto $J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\,g_3^2}$ come funzione del rapporto τ dei periodi . . . . . pag. 312
118. — L'invariante $J(\tau)$ come funzione automorfa rispetto al gruppo modulare . . . . . » 315
119. — Distribuzione dei valori di $J(\tau)$ nella rete modulare . . » 317
120. — Rappresentazione conforme del triangolo fondamentale sul semipiano . . . . . » 320
121. — La funzione inversa $\tau(J)$ e il teorema di Picard . . » 322
122. — Esistenza della $\wp u$ con invarianti assegnati . . . » 324
123. — Equazione differenziale per le funzioni ellittiche di secondo ordine . . . . . » 326
124. — Primo metodo d'inversione con una sostituzione lineare . » 328
125. — Secondo metodo d'inversione . . . . . » 332
126. — Integrazione delle funzioni razionali di w e $\sqrt{P(w)}$ . . » 336
127. — Integrali normali ellittici di Weierstrass . . . . . » 337

Capitolo XII.

Le tre funzioni σ pari di Weierstrass e le funzioni ellittiche di Jacobi sn v, cn v, dn v. — Il quadrato k^2 del modulo come funzione modulare. — Formole d'addizione per sn v, cn v, dn v.

§. 128. — Funzioni periodiche appartenenti a sottogruppi del gruppo modulare . . . . . pag. 339
129. — Le tre funzioni σ pari . . . . . » 342
130. — Le funzioni ellittiche $\sqrt{\wp u - e_r}$ e i valori di $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$. » 344
131. — Aggiunta di semiperiodi all'argomento delle $\sigma_r u$ . . » 347
132. — Serie di potenze in u per la $\sigma_r u$ . . . . . » 348
133. — Le funzioni ellittiche di Jacobi sn v, cn v, dn v . . . » 350
134. — Relazioni fra sn v, cn v, dn v e loro derivate . . . » 354
135. — Il quadrato k^2 del modulo come funzione modulare . . » 355
136. — Formole d'addizione per sn v, cn v, dn v . . . . . » 358
137. — Trasformazione di 1.° ordine per sn v, cn v, dn v . . » 361

Capitolo XIII.

Le funzioni $\wp u$, σu, $\sigma_r u$ per valori reali degli invarianti e le funzioni di Jacobi sn v, cn v, dn v per valori reali del modulo k fra 0 e 1. — Integrali ellittici di Legendre e Jacobi.

138. — Osservazioni fondamentali sulla $\wp(u; g_2, g_3)$ con invarianti reali . . . . . pag. 364
139. — Caso del discriminante $\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2 > 0$ . . . . . » 367
140. — Andamento di $\wp' u$. — La cubica: $y^2 = 4\, x^3 - g_2 x - g_3$ . . » 370
141. — Alcune applicazioni geometriche . . . . . » 372
142. — La $\wp(u; g_2, g_3)$ con invarianti reali e discriminante Δ negativo . . . . . » 375
143. — Degenerazione della $\wp u$ nel caso di $\Delta = 0$ . . . . . » 378
144. — Le funzioni sn v, cn v, dn v per valori reali, positivi e < 1 di k^2 » 380
145. — Integrale ellittico di 1.ª specie di Legendre. — Degenerazione di sn v, cn v, dn v . . . . . » 382
146. — Gli integrali di 2.ª specie $E(v)$, $Z(v)$ di Legendre e Jacobi » 384
147. — L'integrale di 3.ª specie $\Pi(v, a)$ di Jacobi . . . . . » 387
148. — Riduzione dell'integrale ellittico di 1.ª specie alla forma normale di Legendre . . . . . » 388

Capitolo XIV.

Sviluppi in prodotti infiniti ed in serie trigonometriche delle funzioni σ. — Serie ϑ di Jacobi e loro proprietà.

§. 149. — Sviluppo in prodotto infinito semplice per $\sigma_3 u$ . . . pag. 391
150. — Sviluppi in prodotti infiniti per le quattro σ e per le costanti $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$, $\sqrt[24]{\Delta}$ . . . . . » 394

§. 151. — Sviluppi per $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$, $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[12]{kk'}$ e per sn v, cn v, dn v pag. 398
152. — Sviluppo di una funzione periodica in serie di Fourier . » 399
153. — Sviluppo in serie trigonometrica per la $\sigma_3 u$ . . . » 401
154. — Sviluppo delle altre σ e serie per calcolare η . . . » 403
155. — Le serie ϑ di Jacobi . . . . . » 406
156. — Relazioni fra le ϑ . . . . . » 408
157. — Dimostrazione dell'identità di Jacobi e valori in serie di $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt[8]{\Delta}$ . . . . . » 411
158. — Sviluppi in prodotti infiniti per le ϑ . . . . . » 414
159. — Trasformazioni di 1.° ordine per le $\vartheta(v, \tau)$ . . . . » 416

Capitolo XV.

Teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche. — Trasformazioni di grado primo della $\wp u$ e della σu. — Trasformazione di Landen.

§. 160. — Problema della trasformazione delle funzioni ellittiche . pag. 420
161. — Trasformazioni razionali e loro grado . . . . . » 423
162. — Equivalenza delle trasformazioni . . . . . » 426
163. — Riduzione alla forma normale . . . . . » 428
164. — Trasformazioni imprimitive e primitive. — Trasformazioni di grado composto . . . . . » 430
165. — Trasformazioni di grado primo . . . . . » 434
166. — Distinzione del caso $n=2$ dal caso di n dispari . . . » 437
167. — Risolubilità per radicali dell'equazione di trasformazione . » 438
168. — Esistenza dell'equazione modulare fra gli invarianti assoluti » 440
169. — Formole di trasformazione per la σu . . . . . » 442
170. — Trasformazione di Landen . . . . . » 444
171. — Applicazione al calcolo degli integrali ellittici . . . » 447
172. — Trasformazione di Landen nelle amplitudini . . . » 448
173. — Media aritmetico-geometrico $M(a, b)$ secondo Lagrange e Gauss . . . . . » 452

Capitolo XVI.

Funzioni modulari ellittiche.

§. 174. — Definizione delle funzioni modulari. — Loro sottogruppo . pag. 455
175. — Diramazione di una funzione modulare $\varphi(\tau)$ rispetto all'invariante assoluto $J(\tau)$ . . . . . » 458
176. — Sottogruppi d'indice finito e loro poligono fondamentale . » 461
177. — Esistenza di funzioni modulari appartenenti ad un dato sottogruppo . . . . . » 464

§. 178. — Il poligono fondamentale del sottogruppo $G = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$ (mod 2) pag. 466
179. — Distribuzione dei valori di $k^2(\tau)$ nel suo poligono fondamentale . . . . . » 471
180. — La funzione $k^2(\tau)$ come uniformizzante . . . . . » 473
181. — Le funzioni modulari $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{k'^2}$ . . . . . » 475
182. — Le funzioni modulari $\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k}$, $\psi(\tau) = \sqrt[4]{k'}$ . . . . » 478

Capitolo XVII.

Equazioni modulari per l'invariante assoluto e per la funzione modulare $\sqrt[4]{k}$. — Metodo di Hermite per la risoluzione dell'equazione generale di 5.° grado.

§. 183. — Considerazioni preliminari . . . . . pag. 485
184. — Esistenza dell'equazione modulare per $j(\tau)$. . . . . » 487
185. — Gruppo di monodromia dell'equazione modulare . . » 490
186. — Diramazione di j' rapporto a j e poligono fondamentale di $j\left(\frac{\tau}{p}\right)$ . . . . . » 493
187. — Proprietà dei coefficienti dell'equazione modulare . . » 498
188. — Gruppo algebrico dell'equazione modulare . . . . . » 501
189. — Equazione modulare per $\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k}$ e sue radici . . . » 503
190. — Gruppo di monodromia ed algebrico dell'equazione modulare » 508
191. — Proprietà dell'equazione modulare $f(u, v) = 0$ . . . . » 511
192. — Le equazioni modulari per $p = 3, 5, 7, 11$ . . . . . » 516
193. — Abbassamento dell'equazione modulare di 6.° grado . . » 519
194. — Costruzione effettiva della risolvente di 5.° grado di Hermite » 521

Capitolo XVIII.

Principii della teoria delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa.

§. 195. — Funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa e formole fondamentali . . . . . pag. 525
196. — Corrispondenza colle classi di forme binarie quadratiche . » 529
197. — Formole effettive di moltiplicazione complessa . . . » 532
198. — Natura dei coefficienti nelle formole di moltiplicazione complessa . . . . . » 536
199. — Risolubilità per radicali dell'equazione per la divisione dei periodi . . . . . » 540
200. — Equazione algebrica fra g_2, g_3 . . . . . » 542
201. — Esempî numerici $D = 3, 2, 7$ . . . . . » 544
202. — Invarianti delle classi . . . . . » 548

§. 203. — Proprietà delle equazioni irriducibili per gli invarianti delle classi . . . . . pag. 553
204. — Modo di calcolare i fattori $H_m(j)$, $H'_m(j)$ . . . . . » 557
205. — Gli invarianti di classi di 2.ª specie espressi razionalmente per quelli di 1.ª specie . . . . . » 559

Capitolo XIX.

Composizione delle forme quadratiche e gruppo di Galois per l'equazione degli invarianti delle classi.

§. 206. — Composizione delle forme quadratiche secondo Gauss . . pag. 563
207. — Gruppo di composizione delle forme . . . . . » 568
208. — Teoremi varii sulla composizione delle forme . . . » 571
209. — Trasformazione degli invarianti delle classi . . . » 573
210. — Ritorno all'equazione per la divisione dei periodi e determinazione del suo gruppo . . . . . » 579
211. — Abbassamento del gruppo nel caso delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa . . . . . » 583
212. — Dimostrazione della formola fondamentale (15), pag. 578 . » 587
213. — Gruppo di Galois per l'equazione $H_D(j)=0$ e sua risolubilità per radicali . . . . . » 591
214. — Decomposizione di $H_D(j)$ in fattori corrispondenti ai generi delle forme secondo Kronecker . . . . . » 594

CORREZIONI ED AGGIUNTE

Pag. 130, linea 9 — Alle parole: *e la serie* $P_1(z-b)$, *che nell'area comune a* C, C_1 *rappresenta la funzione* $w(z)$ si aggiungano le osservazioni seguenti:

La differenza $P(z-a) - P_1(z-b)$ delle due serie è una funzione $\tilde{\omega}(z)$ finita, continua e monodroma entro la lunula comune a C, C_1 che inoltre è *nulla* nel disco circolare col centro in b, interno alla lunula, onde segue che essa è nulla in tutta la lunula. E infatti sia A un punto interno al detto disco, B un punto qualunque nella lunula; si tracci una curva γ che entro la lunula vada da A in B. Sul tratto di γ uscente da A interno al disco è $\tilde{\omega}(z) = 0$; e se supponessimo $\tilde{\omega}(B) \neq 0$ esisterebbe sulla curva γ (per un noto teorema di Weierstrass) un punto di separazione C, perfettamente determinato, tale che nel tratto AC sarebbe $\tilde{\omega}(z) = 0$, mentre da C in poi, *in qualunque prossimità di* C, $\tilde{\omega}(z)$ assumerebbe anche valori non nulli. Ora ciò è assurdo, perchè in C si annulla $\tilde{\omega}(z)$ e si annullano inoltre evidentemente tutte le sue derivate. Se c è il valore di z in C, lo sviluppo di $\tilde{\omega}(z)$ in serie $P(z-c)$, secondo il teorema di Cauchy, ha dunque nulli tutti i suoi coefficienti.

Pag. 194, linea 4 — Alla fine del periodo: *per le serie di potenze di una variabile* si aggiunga: «*quando alla condizione di semplice convergenza si sostituisca quella di convergenza assoluta*».

Pag. 194, linea 9 — In luogo di: *la serie converga* leggi: *la serie converga assolutamente.*

Pag. 194, linea 5 dal basso — In luogo di: *è convergente* si legga: *è convergente assolutamente.*

Pag. 195, linea 3 dal basso — In luogo di: *Se la serie di potenze* $P(z_1, z_2)$ *converge* leggi: *se la serie di potenze* $P(z_1, z_2)$ *converge assolutamente.*

Pag. 196, linea 9 dal basso — In luogo di: *la serie converga* leggi: *la serie converga assolutamente.*

Pag. 196, linea 7 dal basso — In luogo di: *la serie* $P(z_1, z_2)$ leggi: *la serie dei moduli della* $P(z_1, z_2)$.

Pag. 197, linea 1 — In luogo di: *la serie* leggi: *la serie dei moduli.*

Pag. 195, linea 6 dall'alto — Leggi al modo seguente:

$$R_{m_1 n_1} = \sum_{m=m_1}^{m=\infty} \sum_{n=n_1}^{n=\infty} |a_{mn}| \, |z_1|^m \, |z_2|^n + \sum_{m=0}^{m=m_1-1} \sum_{n=n_1}^{n=\infty} |a_{mn}| \, |z_1|^m \, |z_2|^n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{n=n_1-1} \sum_{m=m_1}^{m=\infty} |a_{mn}| \, |z_1|^m \, |z_2|^n .$$

Pag. 195, linea 14 dall'alto — Leggi:

$$R_{m_1 n_1} < g \, \zeta_1^{m_1} \, \zeta_2^{n_1} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \zeta_1^m \, \zeta_2^n + g \, \frac{1-\zeta_1^{m_1}}{1-\zeta_1} \, \zeta_2^{n_1} \sum_{n=0}^{n=\infty} \zeta_2^n + g \, \frac{1-\zeta_2^{n_1}}{1-\zeta_2} \, \zeta_1^{m_1} \sum_{m=0}^{m=\infty} \zeta_1^m .$$

Pag. 195, linea 15 dall'alto — Dopo: *scrivere* aggiungi: *a fortiori:*

» 195, » 16 » — Leggi al modo seguente:

$$R_{m_1 n_1} < g \, \frac{\zeta_1^{m_1} \, \zeta_2^{n_1} + \zeta_1^{m_1} + \zeta_2^{n_1}}{(1-\zeta_1)\,(1-\zeta_2)} .$$

quella di convergenza assoluta.

Pag. 194, linea 9 — In luogo di: *la serie converga* leggi: *la serie converga assolutamente.*

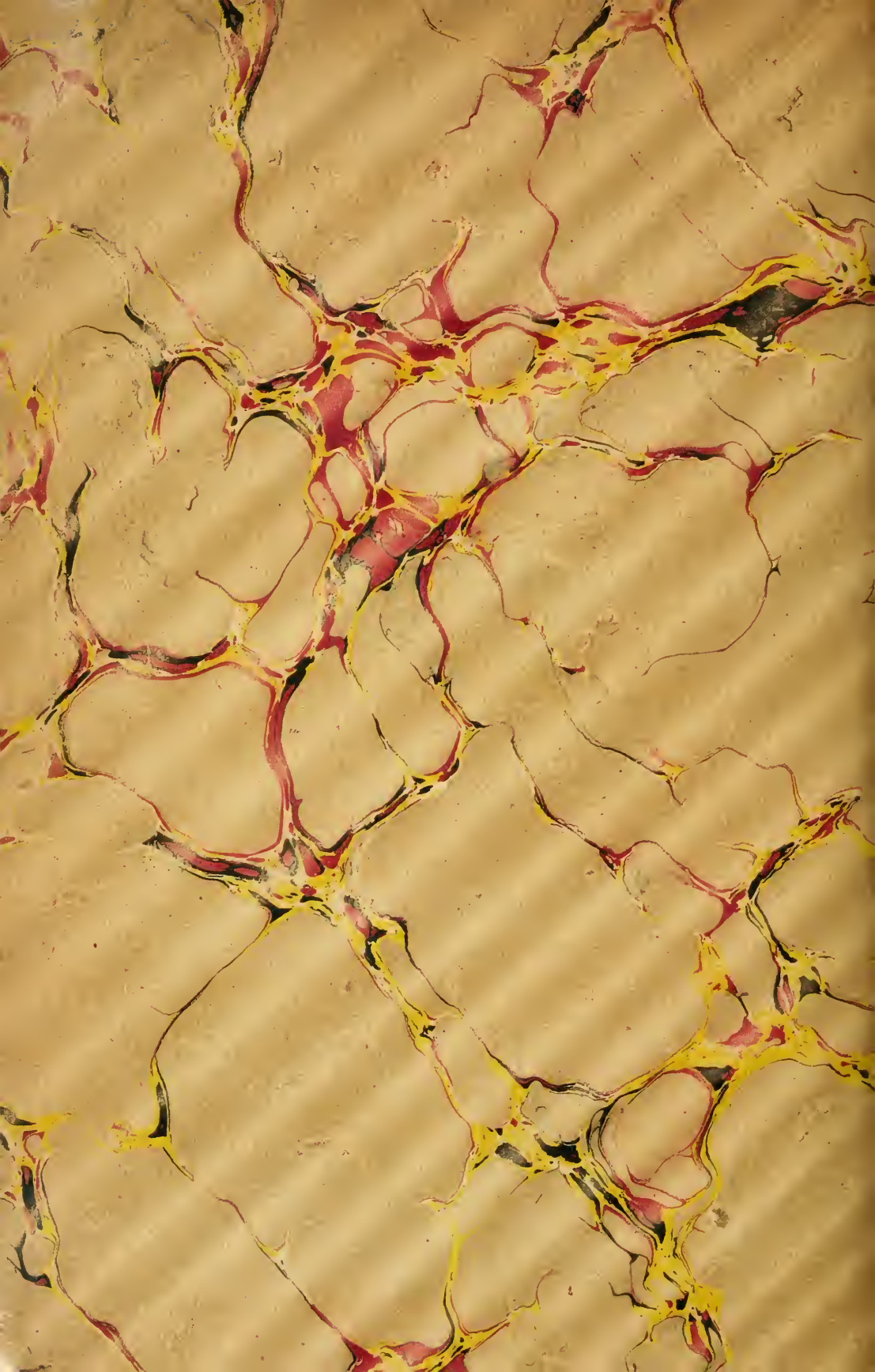
Pag. 194, linea 5 dal basso — In luogo di: *è convergente* si legga: *è convergente assolutamente.*

Pag. 195, linea 3 dal basso — In luogo di: *Se la serie di potenze* $P(z_1, z_2)$ *converge* leggi: *se la serie di potenze* $P(z_1, z_2)$ *converge assolutamente.*

Pag. 196, linea 9 dal basso — In luogo di: *la serie converga* leggi: *la serie converga assolutamente.*

Pag. 196, linea 7 dal basso — In luogo di: *la serie* $P(z_1, z_2)$ leggi: *la serie dei moduli della* $P(z_1, z_2)$.

Pag. 197, linea 1 — In luogo di: *la serie* leggi: *la serie dei moduli.*



PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
331
B53
1901
c.1
PASC